CORRECTION TES SPECIALITE Juin 2019

Exercice 1 :

1. **FAUX**

$$p_S\left(\overline{R}\right)=\frac{p\left(\overline{R}\cap S\right)}{p(S)}=\frac{0,3\times 0,2}{0,7\times 0,4+0,3\times 0,2}=\frac{0,06}{0,34}=\frac{6}{34}=\frac{3}{17}\approx 0,18$$

2. **FAUX**

$E(X)=\dfrac{k+18}{2}$ donc $\dfrac{k+18}{2}=12$ donc $k=2\times 12-18=6$

3. **VRAI**

$$\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{e}\right)+\ln(2)=\ln(2x)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2\times\frac{x^2}{\frac{x^5}{e}}\right)=\ln(2x)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e}{x^3}\right)=\ln(2x)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e}{x^3}\right)-\ln(2x)=5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{2e}{x^3}}{2x}\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{x^4}\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{x^4}=e^5$$

$$\Leftrightarrow x^4=\frac{e}{e^5}$$

$$\Leftrightarrow x^4=\frac{1}{e^4}$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{e^4}\right)^{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

4. **FAUX**

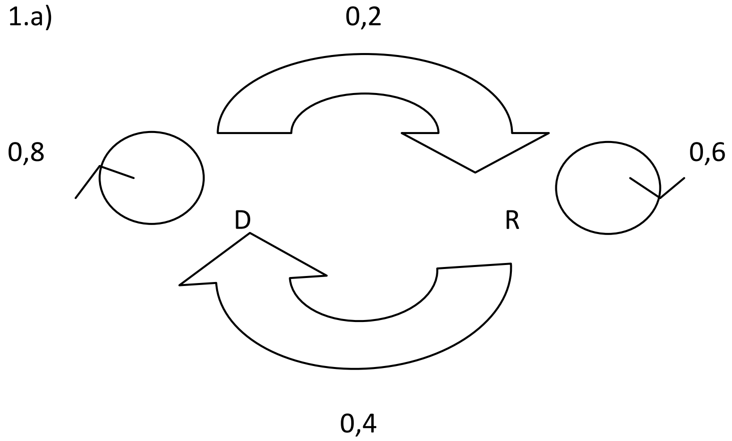
Il y a deux tangentes horizontales car la dérivée s'annule deux fois (0 est une valeur intermédiaire entre -5 et 30 et 0 est une valeur intermédiaire entre -5 et 20).

5. **VRAI**

La fonction est convexe sur $[5;15]$ car f' est croissante sur $[5;15]$.

Exercice 2 :

1.a)



1.b) La matrice de transition est $M=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$ (erreur sur le sujet : ce n'est pas la matrice d'adjacence)

2. a) $P_1=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$

2. b) $M^2=\begin{pmatrix}0,72 & 0,28\\ 0,56 & 0,44\end{pmatrix}$

$P_3=P_1\times M^2=\begin{pmatrix}0,56 & 0,44\end{pmatrix}$

Le troisième jour, la probabilité que Julie emprunte les routes départementales est 0,56.

3. a) $P_{n+1}=P_n\times M$

Donc $d_{n+1}=0,8d_n+0,4r_n$ et $r_{n+1}=0,2d_n+0,6r_n$

3.b) Algorithme 3

4.

On a $r_{n+1}=0,2d_n+0,6r_n$

Donc $r_{n+1}=0,2(1-r_n)+0,6r_n=0,2-0,2r_n+0,6r_n=0,2+0,4r_n$

5. a)

$$v_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3}$$

$$v_{n+1} = 0,4r_n + 0,2 - \frac{1}{3}$$

$$v_{n+1} = 0,4r_n - \frac{2}{15}$$

$$v_{n+1} = 0,4\left(v_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{15}$$

$$v_{n+1} = 0,4v_n + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}$$

$$v_{n+1} = 0,4v_n$$

Le premier terme est $v_1 = r_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

5. b) $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1}$

donc

$$r_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times 0,4^n \times 0,4^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 0,4^n + \frac{1}{3}$$

5.c)

0,4<1 donc la limite de $0,4^n$ est 0

Donc la limite de la suite (r_n) est égale à $\frac{1}{3}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité que Julie utilise la voie rapide est $\frac{1}{3}$.

Exercice 3 :

Partie A :

1. $p(D<8)=p\left(-10^{99}<D<8\right)\approx 0{,}11$

2. $p(8<D<26)\approx 0{,}85$

3. On reconnaît l'intervalle 2σ car $15{,}5-2\times 6=3{,}5$ et $15{,}5+2\times 6=27{,}5$

Partie B :

1. On considère X qui suite la loi binomiale de paramètres p = 0,25 et n = 10.
   Succès : « Sébastien effectue le relevé » donc p = 0,25
   On choisit 10 relevés donc n = 10

2. $P(X=4)\approx 0{,}15$

3. $p(X\geq 2)=1-p(X\leq 1)=1-0{,}24=0{,}76$

Partie C :

L'intervalle de fluctuation est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

L'amplitude est $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}}<0{,}1$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2}>\frac{1}{0{,}1}$$

$$\sqrt{n}>\frac{2}{0{,}1}$$

$$n>\left(\frac{2}{0{,}1}\right)^2$$

$$n>400$$

Il faut effectuer 401 relevés.

Exercice 4 :

Partie A :

1. $f(0) \approx 115 \quad et \quad f(60) \approx 70$

2. $f''(7) = 0$ car le point A est le point d'inflexion.

3. a) Il faut hachurer la surface entre la courbe, l'axe des abscisses et les 2 droites verticales $x = 0 \;\; et \;\; x = 60$

3.b) Un rectangle correspond à 200 unités d'aires. Dans la partie hachurée, il y a au moins 20 rectangles donc l'aire est supérieure à $200 \times 20 = 4000$ unités d'aires. L'estimation n'est donc pas correcte.

Partie B :

1.

$$f'(x) = 0 + 14 \times e^{\frac{-x}{5}} + (14x + 42) \times \left(\frac{-1}{5}\right) e^{\frac{-x}{5}} = 14e^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times 14xe^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times 42e^{\frac{-x}{5}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{-x}{5}} \left(14 - \frac{14}{5}x - \frac{42}{5}\right) = e^{\frac{-x}{5}} \left(\frac{-14}{5}x + \frac{28}{5}\right) = \frac{1}{5} e^{\frac{-x}{5}} (-14x + 28)$$

2. a) et 2. b)

x	0		2		60
1/5		+		+	
-14x+28		+	0	-	
$e^{-x/5}$		+		+	
f'(x)		+	0	-	
f(x)	112		117		70

3. On a $f''(x) = 14e^{\frac{-x}{5}} \frac{x - 7}{25}$

x	0		7		60
14		+		+	
x-7		-	0	+	
25		+		+	
$e^{-x/5}$		+		+	
f''(x)		-	0	+	

On en déduit que la fonction est convexe sur $[7;60]$.

4.a) Il faut vérifier que $G'(x)=g(x)$

$$G'(x)=-70\times e^{\frac{-x}{5}}+(-70x-560)\times\left(\frac{-1}{5}\right)e^{\frac{-x}{5}}=-70e^{\frac{-x}{5}}-\frac{1}{5}\times(-70)xe^{\frac{-x}{5}}-\frac{1}{5}\times(-560)e^{\frac{-x}{5}}$$

$$G'(x)=e^{\frac{-x}{5}}\left(-70+\frac{70}{5}x+\frac{560}{5}\right)=e^{\frac{-x}{5}}(14x+42)=g(x)$$

4.b) Une primitive de f est : $F(x)=70x+G(x)$

4.c)

$$\int_0^{60} f(x)\,dx=F(60)-F(0)=\left[70\times60+(-70\times60-560)e^{-60/5}\right]-\left[70\times0+(-70\times0-560)e^{-0/5}\right]$$

$$\int_0^{60} f(x)\,dx=\left[4200-4670e^{-12}\right]-\left[-560\right]=4200+560-4670e^{-12}=4760-4760e^{-12\mathbb{F}}$$

$$\int_0^{60} f(x)\,dx\approx4760$$

<u>Partie C :</u>

$4760\times2+5400=14920$

14 920 cm² = 1,492m²

$\frac{1}{4}\times10=2,5$

1,492<2,5 donc il aura suffisamment de vernis.