الوحــدة الأولــى

الحلقــة و الحقــل

<u>مقدمـــة:</u> مر معنا (س ، c) نظام جبري ذو عملية واحدة.

لقد وجدنا من خواص النظام :

1- الخاصة التبديلية: ∀س، ص ∋ س فإن س c ص = ص c س

2- الخاصة التجميعية: ∀س ،ص ، ع ∋ س

س c(ص c ع) = (س c ص) c ع

3- خاصية المحايد: (و) ∀ س ∋ س . فإن س c و = و c س = س

4- خاصية النظير: ∀س ∋ س لنفرض نظيره س¯

س c س¯ = س¯ c س = و

وفي هذا العام سنتعرف على النظام ذو العمليتين :

تعريف: (س، c، O) نظام ذو عمليتين إذا كان كل من :

c ، O عملية ثنائية ولكل منها خصائصها .

وهناك خصائص مشتركة بينهما منها التوزيع ويقسم إلى قسمين:

<u>أولاً</u> : التوزيع من اليمين س O (ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

<u>ثانياً</u> : التوزيع من اليسار (ص c ع) O س=(ص O س) c (ع O س)

<u>ثالثاً</u> : إذا كانت O تبديليه وكانت توزيعة من اليمين :

قلنا O توزيعي على c ويصبح شرط التوزيع

س O (ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

توضيح: لنعرف على ح العمليتين c ، O بالشكل

∀س،ص ∋ ح فإن س c ص = $\frac{س+ص}{2}$

س O ص= ص . والمطلوب

1) هل O توزيعي على c   2) هل c توزيعي على O

الحل:

1- الشرط: س O (ص c ع) = (س O ص) c (س O ع) .

الطرف الأيمن: س O (ص c ع) = س O ($\frac{\text{ص+ع}}{2}$)= $\frac{\text{ص+ع}}{2}$

الطرف الأيسر: (س O ص) c (س O ع) = ص c ع = $\frac{\text{ص+ع}}{2}$

لاحظ الأيمن = الأيسر ∴ O توزيعي من (اليمين) على c

نفس الشرط لكن من اليسار

(س c ص) O ع =(س O ص) c (ص O ع)

الطرف الأيمن (س c ص) O ع= $\frac{\text{ص+ع}}{2}$ O ع = ع

الطرف الأيسر (س O ع) c (ص O ع) = ع c ع= $\frac{\text{ع+ع}}{2}$ $\frac{\text{2ع}}{2}$ ع

نعم O توزيعي على c من اليسار ∴ O توزيعي على c

2- بما أن c تبديلي يكفي اختيار التوزيع من جهة واحده

شرط التوزيع من اليمين س c (ص O ع)=(س c ص) O (س c ع)

الطرف الأيمن س c (ص O ع) = س c ع = $\frac{\text{س+ع}}{2}$

الطرف الأيسر (س!ص) O (س c ع) = $\frac{\text{س+ص}}{2}$ O $\frac{\text{س+ع}}{2}$

= $\frac{\text{س+ع}}{2}$ = الطرف الأيمن. ∴! توزيعي على O

تمارين ومسائل(1-1)

[1] بين أياً من الأنظمة الرياضية التالية يمثل زمرة

أ) (ح!,+)لا يمثل زمرة لغياب (الصفر)الذي هو العنصر الحيادي.

ب) (ح!،×) يمثل زمرة لأن (×)الضرب العادي تجميعي وتبديلي. والمحايد الضربي(1) ولكل عنصر نظير أو مقلوب.

جـ) (ص$_8$,⊕) زمرة . بشكل عام(ص$_ن$,⊕) زمرة

د) (ص$_{11}$,⊗) ليست زمرة لوجود. ∋ ص$_{11}$ ليس له نظير.

هـ) (ص!$_{11}$, ⊗) زمرة لأن (11) أولي

[2] ليكن (ح!,O)نظاماً رياضياً تجميعياً حيث العملية O معرفة على ح!كالتالي

س O ص =3س ص ∀س,ص ∋ ح! فأثبت أن(ح! ,O) زمرة تبديليه.

الحـل:

- الخاصة التبديلية : ∀س,ص ∋ ح!

$$\left.\begin{array}{l}\text{س O ص} = 3\text{س ص} \\ \text{ص O س} = 3\text{ص س}\end{array}\right\} \Leftarrow$$ **س O ص = ص O س** ⇐ O **إبدالية.**

- الخاصة التجميعية (معطاة)
- خاصية المحايد (و) ∀ س ∋ ح! يكون س O و= س

$$3\text{س و} = \text{س} \Leftarrow \text{و} = \frac{\text{س}}{3\text{س}} = \frac{1}{3} \ni \text{ح}!$$

- خاصية النظير: ∀س ∋ ح! نفرض نظيره سَ فيكون

$$\text{س O سَ} = \text{و} \Leftarrow 3\text{س سَ} = \frac{1}{3} \Leftarrow \text{سَ} = \frac{1}{9\text{س}}$$ قانون النظير

∴ (ح! ,O) زمرة تبديليه.

[3] أذا كان كل من النظامين (ص$_6$,⊕) , (ص!$_{11}$, ⊙) زمرة تبديليه فأوجد

حل المعادلات.

أ) المعادلة س $\oplus$ 2 = 1 في (ص$_6$, $\oplus$).

الحـل:

س = $2 \oplus \bar{1} = 4 \oplus 1 =$ باقي $\left(\frac{4+1}{6} \right) =$ باقي $\left(\frac{5}{6} \right) = 5$

$\therefore$ س = 5   أنتبه نظير كل عنصر [العنصر الذي يكمله إلى (6)]

ب) المعا دله 6 $\odot$ س = 4 في الزمرة (ص$_7$, $\odot$)

الحل: 6 $\odot$ س = 4	طبعاً $\bar{6} = 6$
$\therefore$ س = $\bar{6} \odot 4 = 6 \odot 4$	لأن 6 $\odot$ 6 = باقي $\left(\frac{6 \times 6}{7} \right) = 1$

= باقي $\left(\frac{4 \times 6}{7} \right)$ = باقي $\left(\frac{24}{7} \right) = 3$ $\therefore$ س = 3

4- لنعرف على نَ^{c} العمليتين c , O على النحو التالي

س! ص = س + ص − 1

س O ص = س + ص − س ص

أ) هل (نَ^{c} ، c ، O) نظام ذو عمليتين .

الحل: $\forall$ س ، ص ϶ نَ فإن س + ص ϶ نَ^{c} $\Leftarrow$ س + ص − 1 ϶ نَ^{c}

$\Leftarrow$ س c ص ϶ ن^c عملية ثنائية .

$\forall$ س ، ص ϶ نَ^{c} $\Leftarrow$ س+ص ϶ نَ^{c}
س×ص ϶ نَ^{c}
$\Leftarrow$ س+ص − س ص ϶ نَ^{c}

$\Leftarrow$ س O ص ϶ نَ^{c} $\Leftarrow$ O عملية ثنائية .

$\therefore$ (نَ^{c} ، c ، O) نظام ذو علميتين .

ب) هل c تتوزع على العملية O

طالما c تبديلي ⇐ شرط التوزيع س c (ص O ع) =(س c ص) O (س c ع)

الطرف الأيمن: س c (ص O ع) = س c (ص+ع− ص ع)

= س+ص+ع−ص ع −1

الطرف الأيسر :(س c ص) O (س c ع)=(س+ص−1) O (س+ع−1)

= س + ص −1 + س+ع−1− (س+ص−1)(س+ع−1)

واضح الأيمن ≠ الأيسر ⇐ c غير توزيعي على O.

ج) هل العملية O تتوزع على العملية c ؟

طالما O تبديلي يكون شرط التوزيع س O (ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

الطرف الأيمن: س O (ص c ع) = س O (ص+ع−1)

= س + ص + ع − 1 − س(ص+ع−1)

= س + ص + ع − 1 − س ص − س ع + س

الأيسر (س O ص) c (س O ع) = (س+ ص− س ص) c (س+ع−س ع)

= س + ص − س ص+ س+ ع − س ع −1= الأيمن ∴ O توزيعي على c

[5] ليكن (س, c) نظاماً رياضياً ذا عملية وليكن أ,ب,جـ ∍ س.

بحيث أ c ب =أ c جـ فهل من الضروري أن يكون ب=جـ؟ولماذا؟

الحـل: كـلا ولنقض الشيء يكفي مثال

في (ص$_6$,⊙) 3 ⊙ 4= 3 ⊙ 2=0 لكن 4 ≠ 2

---

[6] في الزمرة المنتهية يمكننا تمثيل عملياتها في جدول

فسر لماذا لا يتكرر عنصر ما في سطر أو عمود واحد ؟

الحـل: لنفرض س ={ أ,ب,جـ,د,هـ..... ل} ن عنصراً مختلفاً

c	أ	ب	جـ	د	هـ....... ل
أ	أ c أ	أc ب	أc جـ	أc د	أ c هـ
ب	ب c أ	بc ب	بc جـ		ب c ل

لنفرض أ c ب = أ c جـ فحسب خواص الزمرة يمكن الاختصار

⇐ ب = جـ وهذا تناقض لأن عناصر س مختلفة

****

7) ليكن ({9},c) نظاماً رياضياً ذا عملية c

أ – أوجد 9c9

c	9
9	9

ب – هل العملية c تبديليه

الحل: 9c9=9

الحل: العنصر يتبدل مع نفسه

جـ – هل c تجميعية على{9}

الحــل:

• 9 c (9c9) = 9c 9=9

• (9c 9) c 9= 9c 9= 9

⇐ **! تجميعي**

د – هل للنظام محايد ؟

الحـل: الجواب نعم هو (9) نلاحظ 9 c 9=9

هـ– هل للنظام زمرة ؟

الحل: بما أن نظير (9) هو (9) ∴ كل شروط الزمرة موجودة التجميعي, الحيادي ,النظير .

الحلقـــة

تعريف هي نظام ذو عمليتين(س, $\circ$, $\odot$) يحقق

1-(س,$\circ$) زمرة إبدالية 2-$\odot$ تجميعي على س 3-$\odot$توزيعي على $\circ$

- أذا كان $\odot$ ذو عنصر محايد دعيت الحلقة (حلقة واحدية)
- أذا كان $\odot$ إبدالي دعيت حلقة إبدالية .

تعريف قواسم الصفر بالنسبة لـ $\odot$ ندعو أ, ب قواسم للصفر أذا كان:

أ $\neq$ و , ب $\neq$و $\Leftarrow$أ × ب = و (حيث و محايد)

- كل حلقة تحتوي على قواسم للصفر تدعى حلقة غير تامة
- الحلقة التامة هي كل حلقة لا تحتوي على قواسم للصفر.

التعريف رمزياً $\forall$أ,ب $\ni$ س إذا كان

أ$\odot$ب = و $\Leftarrow$ أ = و أو ب = و

ملاحظة هامة:

(ص$_{ن}$, $\oplus$, $\odot$) = $\left\{\begin{array}{l}\text{حلقة تامة إذا كان (ن) أولي}\\ \text{غير تامة إذا كان ن غير أولي}\end{array}\right.$

مثال : (ص$_{6}$, $\oplus$, $\odot$) حلقة غير تامة لوجود قواسم للصفر

2$\neq$0 ,3$\neq$0 حيث (و=0 محايد العملية الأولى$\oplus$)

لاحظ 2 $\odot$ 3 = باقي ($\frac{3\times2}{6}$) = ($\frac{6}{6}$) = صفر

$\therefore$ نسمي كلاً من 2,3 قواسم للصفر

والحلقة غير تامة (انتبه ن = 6 غير أولي)

الخصائص الأساسية في الحلقة

خاصية1 في أي حلقة (س , c , O)

∀ أ ∋ س فإن أ O و = و O أ = و حيث و محايد العملية c

خاصية2 في أي حلقة (س, c , O) حيث ∀ أ , ب, جـ ∋ س

يتحقق ما يلي:

1- (أ O ب)´ = أ O ب´ 2- أ´ O ب´ = أ O ب

3- أ O (ب c جـ)´ = (أ O ب) c (أ O جـ)

4- (ب c جـ)´ O أ = (ب O أ) c (جـ O أ)

تمارين ومسائل(1 - 2)

1] لتكن (س , c , O) حلقة بين أياً من العبارات التالية صائبة

أ) النظام (س, c) زمرة آبلية (✓)

ب) النظام (س, O) زمرة (×)

جـ) كل عنصر من س له نظير بالنسبة للعملية O (×)

د) للمعادلة أ c س = ب حل وحيد في س (✓)

لأن (س , c) زمرة

[2] لتكن (س , c) زمرة آبلية والعمليتان O , ∆ على س معرفتان على النحو التالي:

أ O ب = و ∀ أ , ب ∋ س, (و محايد c) ، أ ∆ ب = أ ∀ أ,ب ∋ س.

أ) أثبت أن (س, c , O) حلقة ؟

الحل: 1- (س , c) زمرة إبدالية

2- الخاصة التجميعية (أ O ب)Oجـ= و O جـ = و
أ O (ب O جـ) = أ O و = و

$\Leftarrow$

(أ O ب)Oجـ= أ O (ب O جـ) $\therefore$ O تجميعي

1- شرط التوزيع أ O (ب c جـ) = (أOب) c (أOجـ)

الطرف الأيمن أO (ب c جـ) = و

الطرف الأيسر (أOب)! (أOجـ) = و c و= و

$\therefore$ O توزيعي على ! $\therefore$(س, !,O) حلقة

ب) (س , c , Δ) ليست حلقة

الحـل:

شرط التوزيع : أ Δ (ب c جـ)= أ Δب c أ Δجـ

الطرف الأيمن أ Δ (ب c جـ)= الأول = أ

الطرف الأيسر (أ Δب) c (أ Δجـ) = أ c أ ليس بالضرورة = أ

$\therefore$ الأيمن $\neq$ الأيسر $\therefore$ (س, !,Δ) $\therefore$ ليست حلقة

[3] لتكن O , c عمليتين معرفتين على ص على النحو التالي:

أ c ب = أ + ب − 1

أOب= أ + ب − أب $\forall$ أ , ب $\ni$ ص.

برهن أن (س, c ,O) حلقة تبديليه أحادية

الحـل:

1- أ c ب = أ + ب − 1
ب c أ = ب + أ − 1

$\Leftarrow$ أ c ب = ب c أ $\Leftarrow$ c تبديليه

2-(أ c ب) c جـ =(أ + ب−1)cجـ = أ+ ب−1+ جـ −1= أ+ب+جـ−2

أ c (بcجـ)= أc(ب+جـ−1)= أ+ب+جـ−1−1 = أ+ ب+ جـ−2

∴ (أ c ب)c جـ = أ c (ب c جـ) ⇐ c تجميعية

3− المحايد ∀ س لنفرض المحايد (و)

أc و = أ ⇐ أ + و−1 = أ ⇐ و − 1 =0 ⇐ $\boxed{و = 1}$

4− النظير ∀ س ∋ ص لنفرض نظيره سَ

سc سَ = و س + سَ −1 = 1 ⇐ $\boxed{\textbf{سَ = 2− س}}$

∴(ص, c) زمرة أبدالية

5− (أOب)Oجـ = (أ + ب − أ ب)Oجـ = أ + ب − أ ب +جـ

− جـ أ −جـ ب+ جـ أ ب

أO(بOجـ)= أO(ب+جـ− ب جـ) = أ+ ب + جـ − ب جـ − أ ب

− أجـ + أ ب جـ ⇐ O تجميعي

6− التوزيع سO(بcجـ) = سO(ب+جـ−1) = س+ب+جـ−1

− س ب − س جـ + س

(سOب) c (سOجـ) =(س+ب− س ب)c(س+جـ− س جـ)

= س+ب− س ب+ س+ جـ− س جـ −1 ⇐ توزيعي على c

7− خاصية المحايد بالنسبة لـO

∀ س ∋ ص نفرض المحايد ى:سOى = س ⇐ س+ ى− س ى= س

ى(1− س) = ⇐0 ى=0 ∋ص/{1}

8− الخاصة الإبدالية : أOب = أ + ب − أب

بOأ = أ + ب − أب ⇐ أOب = بOأ

∴(ص, c, O) حلقة إبدالية ذات عنصر وحده

[6] ليكن (ص$_{6}$,⊕, ⊙) حلقة إبدالية

أ) بين أنها حلقه ليست تامة ب) أوجد مجموعة حل المعادلة ⊕2س⊙ 4=0

الحـل: أ) لنقض الشيء يكفي مثـال:

2⊙3 =باقي ($\frac{3\times2}{6}$) =0 ⇐ 2⊙ 3=0

علماً بأن 2≠0 , 3≠0 نسمي كل منها قاسماً للصفر والحلقة غير تامة.

ب) 2 ⊙ س⊕4=0 في هذه الحلقة 4̄= 2 ∴ أنقل 4 بنظيرها الجمعي

2 ⊙ س=2 نعلم أن 2⊙1 = 2 , 2⊙4=2 ⇐س=1 أو س=4

تعريف : يكون(س, c ,O) حقلاً إذا حقق الشروط التالية :

1- زمرة أبدالية   2-   (س',O) زمرة حيث س'= س/{ و }

3- O توزيعي على c

ملاحظة: 1- إذا كان O تبديلي قيل الحقل أبدالي .

2- كل حقل هو حلقة تامة _

إذا كان أOب = و إجباري أ= و   أو ب = و.

3- ليس كل حلقة تامة حقل.

4- للمعادلة حل وحيد في الحقل

مثال: (أOس) c ب = جـ ⇐أOس= جـ c بَ

⇐ س= أ$^{-1}$O (جـ! بَ) حيث أ ≠ و

* حل المعادلة (2O س) c 1= 2 في كل من الحلقتين الآتيتين

أ) (ح , + ,×)

ب) (ص$_3$, ⊕ , ⊙)

الحل: أ) أنتبه c $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ +

O $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ ×

∴ $(ه2س) \circ 1= 2$ تكافئ المعادلة $(2\times س)+1=2$

∴ $2س =2-1 \Leftarrow 2س =1 \Leftarrow س= \frac{1}{2} \in ح$

ب) انتبه $\circ \xrightarrow{\text{تقابل}} \oplus$

$ه \xrightarrow{\text{تقابل}} \odot$

والمعادلة $2ه س \circ 1= 2$ تكافئ $(2\odot س) \oplus 1=2$

من الجدول الأول (1 محايد ضربي)

ودائماً $\bar{2} = 2$ لأن $2\odot 2=1$

من الجدول الثاني الصفر محايد بالنسبة لـ$\oplus$

$(\bar{1} = 2)$ ∴ $(2\odot س) \oplus 1=2$ $2\odot س =1\oplus \bar{2}$

$2\odot س =2\oplus 2$ $2\odot س =1$ ∴ $س =1\odot \bar{2}$

$س=1 \odot 2$ $\boxed{\therefore س = 2}$

تمـــــارين (3-1)

[1] بين مع التعليل صواب أو خطاء كل من العبارات التالية:

أ) كـل حقل حلقة تامة . (✓)

لأن شـروط الحلقة كلهـا ضـمن شـروط الحقل يضـاف إلــى ذلـك الحقـل لا يحتوي على قواسم للصفر

ب)كل حلقة تامة حقل. (×)

كلا لأن (ص,+,×) حلقة تامة [ليس لكل عنصر فيها نظير ضربي

∴ ليست حقل

ج)إذا كان النظام (س,$\circ$,ه) حقلاً فأنه لكل عنصر من النظام (س, ه)نظير.

الجواب (×) لان و ∈ س ليس له نظير بالنسبة لـ O

د) إذا كان النظام (س, c, O) حلقة تبديليه واحدية , وكان لكل عنصر غير صفري نظير ضربي فأن(س , c, O)حقلاً.   الجواب (√)

[2] (ص$_5$, ⊕,⊙) حلقه – واحديه عنصرها المحايد (1)

أ) اثبت أن (ص$_5$, ⊕,⊙) حقلاً.

ب) حل المعادلة 2 ⊙ س⊕1=4 في هذا الحقل

الحـل:

أ) كل شروط الحقل معطاة باستثناء النظير الضربي في ص$_5$ لتشكل الجدول

العنصر	1	2	3	4
نظيرة	1	3	2	4

⊙	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

∴ لكل عنصر في ص$_5$ نظير ضربي

ب) 2⊙ س⊕ 1 =4 ابعد 1 إلى الطرف الثاني بالنظير الجمعي

2⊙ س =4⊕1

2 ⊙ س=4⊕4

2 ⊙ س=3

أنقل 2 بالنظير الضربي

س=2^{-1} ⊙ 3 من الجدول 2^{-1} = 3

س=3⊙3=4 ⇐ $\boxed{\text{س} = 4}$

> انتبه $\bar{1}$= 4
>
> لأن 4⊕1=باقي($\frac{1+4}{5}$)=باقي($\frac{5}{5}$)=0

[3] ليكن (ح , c ,×) حقلاً حيث × عملية الضرب العادي والعملية c معرفة

على ح كما يلـي :

أ) أ c ب = أ + ب + 2 $\forall$ أ, ب $\ni$ ح

المطلوب أ) عين العنصر المحايد بالنسبة للعملية c .

ب)عين صيغة لإيجاد نظير العنصر بالنسبة للعملية c أيضاً.

جـ) حل المعادلة (3×س) c 4 = 8 في هذا الحقل .

الحـل: أ) $\forall$س $\ni$ح لنفرض المحايد (و)

$\therefore$ سc و = س$\Leftarrow$س+ و+2= س

$\Leftarrow$ و + 2 = 0

و=−2

ب) $\forall$س $\ni$ح لنفرض نظيره س َ

$\therefore$س c س َ= و $\Leftarrow$ س+ س َ+ 2 = −2$\Leftarrow$

$\boxed{\text{س َ= −4− س}}$

يدعى قانون النظيـر.

جـ) 3س c 4=8

3س=4 َc 8

3س=−8c 8

3س=−8+8+2

3س =2 $\Leftarrow$ س= $\frac{2}{3}$

لإيجاد نظير (4)عوض

في قانون النظير

4 َ= −4−4=−8

[4] في الحقل(س,c, O)أثبت أن للعملية س^2= س حلين وهما العنصر المحايد بالنسبة للعملية! والعنصر المحايد بالنسبة للعمليةO (حيث س^2= سO س)

الحـل: س^2= س

الحالة الأولى   سOس= س   شكل سَ مع الطرفين

سَ c س Oس= سَ c س أنتبـــهc , O تجميعيـــان

أدمج (س c س) Oس = و

و Oس= و ⇐ س= و $^{-1}$O و= و ∴ س = و

الحالة الثانية

س^{2} = س

س Oس = س شكل س$^{-1}$ مع الطرفين

س$^{-1}$O س^{1}O س = س$^{-1}$O س

(س$^{-1}$O س) O س = ى ⇐ ى o س = ى ⇐س=ى

[5] أعط مثالاً لكل من :

أ) حلقة تبديليه وليست تامة ب) حلقة تامة لكنها ليست حقلاً.

الحـل:

أ- (ص$_4$, ⊕ , ⊙)حلقة تبديليه ليست تامة لوجود قواسم للصفر لاحظ

$2 \odot 2$ = باقي $\left(\frac{2\times2}{4}\right)$ = باقي $\left(\frac{4}{4}\right)$ =0

ب- (ص,+,×) حلقة تامة لعدم وجود قواسم للصفر مع ذلك ليس لكل عنصر نظير ضربي ∴ ليست حقلاً .

تماريـــن عامـــة

الحلقة: لتكن س={ 0, 2, 4, 6, 8 } ولنعرف على س العمليتين الثنائيتين H, O على النحو التالي: سHص = باقي $\left(\frac{س+ص}{10}\right)$

سOص = باقي $\left(\frac{س\timesص}{10}\right)$

أ) كون جدولين مختلفين لهاتين العمليتين .

ب) تحقق من أن (س,H , O)حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

8	6	4	2	0	H
8	6	4	2	0	0
0	8	6	4	2	2
2	0	8	6	4	4
4	2	0	8	6	6
6	4	2	0	8	8

8	6	4	2	0	O
0	0	0	0	0	0
6	2	8	4	0	2
2	4	6	8	0	4
4	8	2	2	0	6
4	8	2	6	0	8

أولاً: (س, H) العملية المعرفة بهذه الصورة تبديلية وتجميعية

8	6	4	2	0	العنصر
2	4	6	8	0	نظيرة

∴ (س, H) زمرة تبديلية .

ثانياً: O إبدالية بسبب تناظر العناصر حول القطر الرئيسي , O تجميعية

لأن العملية المعرفة بهذه الصورة تقبل أنها تجميعية دون برهان .

لـO محايد وهو (6) , O توزيعية على H

∴ (س, H, O) حلقة إبدالية ذات عنصر وحدة .

[2] لتكن (س, +, 0) حلقة غير تبديلية ولنعرف على س عملية جديدة

(O) على النحو التالي: أO ب =أب− ب أ ∀أ, ب ∋ س. هل

(س, +, O) حلقة ؟ انتبه أOب ≠ بO أ.

الحل: (س, +) زمرة إبدالية أحد شروط الحلقة (س, +, 0) ولنثبت أنO تجميعية

∀ أ, ب ,حـ * (أO ب) O جـ =(أب − ب أ)O جـ =

(أب− ب أ) جـ (أب – ب أ) =

أب جـ − ب أ جـ − جـ أ ب +جـ ب أ

* أO (ب O جـ) = أ O (ب جـ− جـ ب) =

أ (ب جـ− جـ ب) − (ب جـ −جـ ب) أ = أب جـ − أجـ ب −

ب جـ أ +جـ ب أ بكل أسف – ب أجـ ≠− أ ب جـ وهذا سبب كافٍ لأن أقول O

غير تجميعية .

∴ (س, +, O) ليست حلقة .

الحقـــــــل

[3] لنعرف على(ن) العمليتين الثنائيتين H , Oعلى النحو التالي:

سHص=س+ص−1

سOص= س ص− س− ص+2 برهن أن النظام (ن, H, O) حقل .

أولاً: العمليةH (1) ∀س, ص ∋ ن, سHص = س+ص−1

, صH س=ص+س−1

⇐سH ص= صH س ⇐ Hابدالية . (2) ∀ س, ص, ع∋ ن.

*(سHص)H ع =(س+ص−1) Hع = س+ص−1+ع−1=

س+ص+ع−2

* سH(صHع) =سH(ص+ع−1) =س+ص+ع−1 −1 =

س+ ص+ع−2 ⇐ H تجميعي

(3) لفرض المحايد و ∴ ∀س∋ ن ⇐سHو= س .

س+و−1= س⇐و−1=0 ⇐و=1 .

(4) النظير ∀س∋ ن لنفرض نظيره سَ سH سَ = و

س+ سَ−1= ⇐ 1 سَ =−2− س ∴(س, H) زمرة إبدالية .

ثانياً: (1) ∀س, ص∋ ن/{1} ⇐سO ص= س ص− س− ص+2

ص O س= ص س− س− ص+2. واضح أن O إبدالية .

(2) ∀س, ص, ع ∋ ن/{1} فإن (سO ص) Oع =(س ص− س−

ص+2)O ع= (س ص− س− ص+2)ع − س ص + س + ص − 2− ع

+ 2 = س ص ع – س ع – ص ع+2ع – س ص+ س + ص–ع

= س ص ع – س ع – ص ع – س ص+ س + ص + ع .

سO(صOع) =سO (ص ع – ص – ع+2)

= س ص ع– س ص – س ع+2س– س – ص ع + ص + ع – 2+2 =

س ص ع – س ص – س ع – ص ع +س+ص+ع ⟸ O تجميعي .

(3) نفرض المحايد ى ∴ ∀س, ص, ع ∋ ن/{1} سOى= س .

س ى– س–ى+2= س س ى–ى=2س–2

ى(س–1) =2س–2 ⟸ ى= $\frac{2س-2}{س-1}$ = $\frac{2(س-1)}{(س-1)}$=2 ∴ ى=2

(4) النظير: ∀س ∋ ن /{1} نفرض النظير سَ.

سO سَ =ى ⟸ س سَ– س– سَ+2=2

سَ(س–1)=س ⟸ سَ= $\frac{س}{س-1}$ ∋ ن /{1} ∴ (ن /{1}, O)زمرة تبديلية

(5) لنثبت أن O توزيعي بالنسبة لـH الشرط

سO (صHع) = (سO ص)H (سO ع)

الطرف الأيمن: ∴ سO (صHع)= سO (ص+ع–1)

= س(ص+ع–1) – س – ص – ع + 1 + 2 =

= س ص + س ع – 2س – ص– ع + 3

الأيسر: (س ص– س– ص+2) H (س ع – س – ع+2)

=س ص– س– ص+ 2 + س ع – س– ع+2–1

=س ص – س ع–2س–ص–ع+ ⟸ ∴O3 توزيعي على H

(ن, H, O) حقلاً تبديلياً .

[4] إدا علمت أن (ص$_7$, ⊕, ⊙) حلقة تبديليه ذات عنصر محايد`

أ) تحقق من أن ($ص_7$, ⊕, ⊙) حقل

ب) حل المعادلة 3 ⊙ س ⊕ 1 =ع في هذا الحقل

الحل: (أ) ($ص_7$, ⊕, ⊙) حلقة تامة لان 7 أولي.

∴لنبحث عن النظير في $ص_7$

العنصر	1	2	3	4	5	6
نظيرة	1	4	5	2	3	6

(ب) 3 ⊙ س ⊕ 1=4

3 ⊙ س=$4^{/}$ ⊕ 1

3 ⊙ س=4 ⊕ 6

3 ⊙ س=3

6 ⊕ 1 = باقي $\left(\frac{6+1}{7}\right)$ =0

∴ 1^{-}=6

4 ⊕ 6= باقي $\left(\frac{4+6}{7}\right)$ = 3

س= 3^{-1} ⊙ 3 =ى =1   ∴ س=$\boxed{1}$

<u>تمارين هامة ومسائل</u>

[1] من المعلوم أن كل حقل هو حلقة تامة وكل حلقة تامة هي حلقة أبدالية لكن عكس أي من العبارتين ليس بالضرورة يكون صحيحاً بين ذلك بإعطاء.

أ) مثال لحلقة تامة لكنها ليست حقلاً.

ب) مثال لحلقة أبداليه لكنها ليست تامة.

جـ) مثال لحلقة تامة منتهية , هل هي حقل ؟

الحل: أ) (ص, +, ×)

ب) ($ص_6$, ⊕, ⊙)

جـ) ($ص_7$, ⊕, ⊙) حقل لأن لكل عنصر نظير.

[2] ليكن (ح, H, ×) حقلاً, وحيث × عملية الضرب على الأعداد

الصحيحة والعملية H معرفة على ح كما يلي:

س H ص = س+ص+3 ∀س, ص ∋ح

حل المعادلة2 س H 3 = 6 في هذا الحقل.

الحل: 2س+3+3=6

$$2س=6-6=0 \Leftarrow س=\frac{0}{2}=0$$

$\therefore$ س= 0

[3] لتكن (س, +, O) حلقة ذات عنصر محايد برهن أن :

أ) العنصر المحايد بالنسبة للعملية O وحيد.

ب) إذا كان للعنصر أ نظير بالنسبة للعملية O فإن $أ^{-1}$ وحيد.

الحل: أ) لنفرض وجود محايدين $ى_1$, $ى_2$ بالنسبة لـO ∀ س ∋ س .

$$\left.\begin{array}{l} س O ى_1 = س \\ س O ى_2 = س \end{array}\right\} \Leftarrow س O ى_1 = س O ى_2 .$$

$\Leftarrow$ س O $ى_1$ − س O $ى_2$ =0

س O ($ى_1$ − $ى_2$)=0 $\Leftarrow$ $ى_1$ − $ى_2$=0 $\Leftarrow$ $ى_1$ = $ى_2$

ب) لنفرض لـ أ نظيرين $أ_1$, $أ_2$. أ O $أ_1$ =ى , أ O $أ_2$= ى $\Leftarrow$

أ O $أ_1$= أ O أ $\Leftarrow$ $أ_2$ O أ $\Leftarrow$ $أ_1$ − أ O $أ_2$=0

أ O ($أ_1$− $أ_2$)=0 $\Leftarrow$ $أ_1$− $أ_2$=0 $\Leftarrow$ $أ_1$= $أ_2$ $\therefore$النظير وحيد.

اختبــار الوحــدة

[1] كل من الأنظمة التالية ليس حلقة . أعط سبباً واحداً على الأقل لكل حالة. أ) (ط, +, ×) ب) ($ص^{H}$, +, ×) جـ) (ن, ×, +) .

[2] بين أياً من الأنظمة التالية حقل, وأياً منها حلقة وليس حقلاً.

أ) (ص, +, ×) ب) (ن, +, ×) جـ) ($ص_4$, ⊕, ⊙) د) ($ص_5$, ⊕, ⊙)

[3] بين نوع النظام الرياضي (حلقة, حلقة تامة, حقل) الذي تحقق فيه كل من الخواص التالية:

أ) للمعادلة أ O س H ب=جـ فية حلٌ وحيد, حيث أ ≠و

ب) سO ص= سO ع ⇐ ص=ع

جـ) سO ص= و ⇐ س = و أو ص= و

د) لكل عنصر أ∍ س, أ ≠ و نظير بالنسبة للعملية O حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة للعمليةH في النظام (س, H, O)

[4] حل المعادلة 2Oس H 3=4 في كل من الأنظمة الرياضية الآتية:

أ) (ح, +, ×) ب) ($ص_5$, ⊕, ⊙) جـ) ($ص_6$, ⊕, ⊙)

[5] أختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

أ) مجموعة حل المتراجحة 2س+2≥1 هي :

$]\frac{3}{2} , \infty[$, $]-\infty , \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2} , \infty[$.

ب) مجموعة حل المتراجحة 1−2س <3 هي:

$]-\infty, -1[$, $]2, \infty[$, $]-\infty, 2[$.

جـ) مجموعة حل المتراجحة $\frac{1}{س} < 2$, س $\neq 0$ هي:

$]0, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, \infty[$, $]-\infty, \frac{1}{2}[$

حــل اختبار الوحـدة

[1] أ) (ط, +) ليست زمرة $\therefore$ (ط, +, ×) ليست حلقة.

ب) (ص^{H} , +, ×) ليست حلقة لأن (ص^{H}, +) ليست زمرة لغياب المحايد الجمعي (0) .

جـ) (ن, ×, +) ليست حلقة لأن (ن, ×) ليست زمرة لأن (0) ليس له مقلوب (نظير ضربي) .

[2] أ) (ص, +, ×) حلقة تامة لكنها ليست حقل لعدم وجود النظير الضربي مثلاً ٥ ∋ ص^{H} $\Leftarrow \frac{1}{5} \notin$ ص*.

ب) (ن, +, ×) حقل لأن: (1) (ن, +) زمرة تبديلية .

(2) (ن^{H}, ×) زمرة (3) × توزيعي على + .

جـ) (ص$_4$, $\oplus$, $\odot$) حلقة غير تامة وليست حلق بدليل

$2 \odot 2$= باقي$(\frac{2\times 2}{4})$= باقي $(\frac{4}{4})$ = صفر $\therefore$ تحتوي على قواسم للصفر.

د) (ص$_5$, $\oplus$, $\odot$) حلقة تامة منتهية $\therefore$ حقل.

[3] معلوم لدينا أن الحلقة غير التامة

ليس بها خاصية الاختصار وحل المعادلة $\therefore$ نبعدها من تفكيرنا

الحلقة التامة غير المنتهية الاختصار ممكن فيها , أما حل المعادلة غير

ممكن في بعضها مثل الحلقة (ص, +, 0) . بشكل عام كل هذه الخواص مجتمعة محققة في الحلقة التامة المنتهية وفي الحقل.

أ) محقق في الحلقة التامة المنتهية والحقل .

ب) الحلقة التامة و الحقل .

جـ) الحلقة التامة و الحقل .

د) في حلقة التامة المنتهية والحقل .

[4] حل المعادلة 2 O س H 3 =4 في كل من الأنظمة

أ) في (ح, +, ×) + تمثل H & × تمثل ∴ O المعادلة تصبح على الصورة

2س+3=4 ⟸ 2س=4−2 ⟸ 3س=1 ⟸ س= $\frac{1}{2}$.

ب) H تمثل ⊕ , O, تمثل ⊙.

∴ المعادلة تصبح على الصورة 2 ⊙ س ⊕ 3 = 4 .

∴ 2⊙س= 4^{-} ⊕3	معروف ان 3^{-}=2 في $ص_5$.
2⊙س= 4⊕2	ومعروف أن 4⊕2=باقي ($\frac{6}{5}$) =1 .
2⊙س= 1	نعلم 2^{-1} هو 3
س= 2^{-1}⊙1=2^{-1}	لأن 2⊙3= باقي ($\frac{6}{5}$) =1 .
س = 3	

جـ) ($ص_6$, ⊕, ⊙) نفس الخبر المعادلة 2 ⊙ س ⊕ 3 = 4.

2 ⊙ س =3^{-} ⊕ 4 , 2 ⊙ س =3 ⊕ 4

2 ⊙ س =1 وهذا مستحيل لأن الحلقة غير تامة ∴ مجموعة الحل Ø.

[5] أ) 2س + 1 ≥ 2 .

الحل: 2س ≥ 1 ⟸ س ≥ $\frac{1}{2}$ ∴مجموعة الحل]−∞, $\frac{1}{2}$ [

الإجابة الثانية صحيحة.

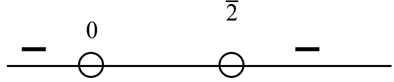
ب) $1-2$س>3 هي : $1-3>2$س . ⇐ -2س>2س ⇐ $\frac{-2}{2}$ ⇐ $>$ س ⇐

$-1>$س ⇐ مجموعة الحل $]-\infty, -1[$

جـ) $\frac{1}{س}>2$, س $\neq 0$ الحل: $\frac{1}{س}-2>0$ ⇐ $\frac{1-2س}{س}>0$

الأصفار : البسط = صفر ⇐ $1-2$س$=0$ ⇐ $1=2$س ⇐ س= $\frac{1}{2}$

المقام = صفر ⇐ س$=0$.

بالنسبة للإشارة 

عوض س=1 ⇐ $\frac{1-2س}{س}$ = $\frac{1-2}{س}$ = $\frac{سالب}{موجب}$ ∴ البقعة $]\frac{1}{2}, +\infty[$ سالبة .

اعكس إشارة بقية البقع ∴ مجموعة الحل $]0, \frac{1}{2}[$ # .