

مقرر الوحدة الثانية التطبيقات

تعريف:

التطبيق من $S \leftarrow V$ هو علاقة تربط كل عنصر من المجال S بعنصر وحيد من

المجال V .

مكونات التطبيق:

1- المجال S .

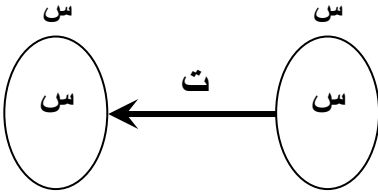
2- المجال المقابل V .

3- قاعدة التطبيق: هي علاقة تربط كل عنصر من المجال بصورة من المجال المقابل

ويعبر عنها بأسلوبين:

$$(1) \quad S \xleftarrow{t} T \quad (S)$$

$$(2) \quad T (S) = V$$



مدى التطبيق: هو مجموعة صور عناصر المجال.

∴ المدى $\supseteq V$

مثال (1): $r: P \leftarrow R$ بحيث $R (S) = S^2 + 1$ المطلوب:

(أ) أوجد: $r (3)$ ، $r (5)$ ، $r (6)$ ، $r (h)$ ، $r (h + 1)$

(ب) أوجد: $r (0, \{1\})$

الحل:

$$r (3) = (3) = 1 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$r (S) = S^2 + 1$$

$$r (6) = (6) = 1 + 6^2 = 1 + 36 = 27$$

$$r (5) = (5) = 1 + 5^2 = 1 + 25 = 26$$

$$r (h) = (h) = 1 + h^2$$

$$r (h + 1) = (h + 1) = 1 + (h + 1)^2 = 1 + h^2 + 2h + 2$$

(ب)

$$\left. \begin{aligned} 1 &= 1 + {}^2(0) = (0) \text{ ر} \\ 2 &= 1 + 1 = 1 + {}^2(1) = (1) \text{ ر} \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{ر} \left(\{1, 1\} \right) = \{2, 1\}$$

مثال (2): ليكن التطبيق ر: ص ← ص قاعدته معرفة كما يلي:

$$\left. \begin{aligned} 1 & \\ 0 & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{إذا كان س عدداً زوجياً} \\ & \text{إذا كان س عدداً فردياً} \end{aligned}$$

[أ] ما هي صور كل من الأعداد: -2، -1، 0، 1، 2، 3، 4 في هذا التطبيق.

[ب] ما هو مدى التطبيق.

الحل:

$$[أ] \quad 1 = (2-) \text{ ر} \quad ، \quad 0 = (1-) \text{ ر}$$

$$1 = (\text{صفر}) \text{ ر} \quad ، \quad 0 = (1) \text{ ر}$$

$$1 = (2) \text{ ر} \quad ، \quad 1 = (4) \text{ ر}$$

$$[ب] \text{ المدى} = \{0, 1\}$$

مثال توضيحي: س = {1، 3، 5، 7، 9}

$$\text{ص} = \{2، 4، 6، 8، 10، 12، 14\}$$

$$\text{القاعدة: ر (س) = س + 1}$$

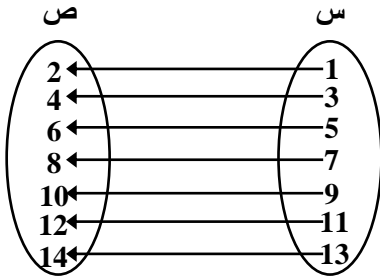
المطلوب:

1: مثل التطبيق سهماً

2: اكتب بيان التطبيق كأزواج مرتبة.

3: عيّن مدى التطبيق: هل المدى = المجال المقابل؟

الحل:



[1]

$$2 = 1 + 1 = (1) \text{ ر}$$

$$4 = 3 + 1 = (3) \text{ ر}$$

$$6 = 5 + 1 = (5) \text{ ر}$$

$$8 = 7 + 1 = (7) \text{ ر}$$

$$10 = 9 + 1 = (9) \text{ ر}$$

[2] بيان التطبيق ن = $\{(10, 9), (8, 7), (6, 5), (4, 3), (2, 1)\}$

[3] المدى = $\{10, 8, 6, 4, 2\}$ المجال المقابل ص.

مثال توضيحي: لتكن س = $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ ، ص = س

س	1	2	3	4	5
ر (س)	4	2	1	2	4

القاعدة معطاة بالجدول التالي

المطلوب:

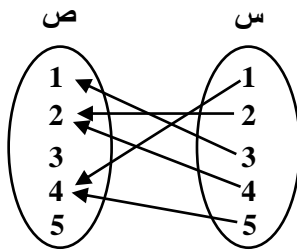
أ) ارسم مخططاً سهمياً يمثل هذا التطبيق.

ب) ما هي صورة العدد 3 في هذا التطبيق.

ج) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل.

د) هل هناك عنصر في ص صورة لأكثر من عنصر في س.

هـ) اكتب البيان كأزواج مرتبة.



الحل:

أ) \Leftarrow

$$\text{ب) ر (3) = 1}$$

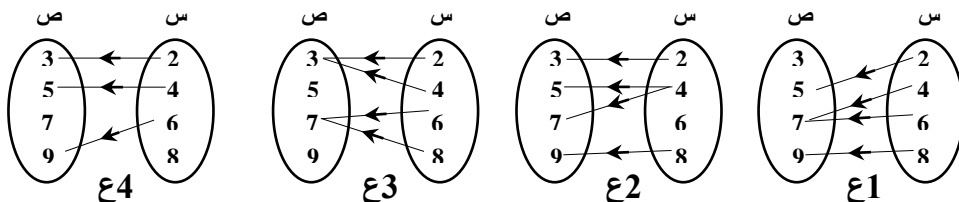
$$\text{ج) المدى} = \{1, 2, 4\} \neq \text{ص}$$

د) الجواب: نعم 2 صورة للعنصرين 2 ، 4 وكذلك 4 \in ص مرتبط بالعنصرين 1 ، 5 .
هو صورة لهما.

هـ) البيان ن = $\{(4, 5), (2, 4), (1, 3), (2, 2), (4, 1)\}$

إجابة تمارين ومسائل (1/2)

[1] لتكن $S = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $V = \{3, 5, 7, 9\}$ بين أيّاً من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً:



الحل:

ع1: يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من المجال S انطلق منه سهم واحد أي كل عنصر مرتبط والارتباط وحيد.

ع2: لا تمثل تطبيقاً لأكثر من سبب:

$$(1) 6 \in S \text{ لم ينطلق منه سهم (غير مرتبط).}$$

$$(2) 4 \in S \text{ ارتبط لكن الارتباط غير وحيد. إذ انطلق منه سهمين.}$$

ع3: تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من S مرتبط بعنصر واحد فقط من V .

ع4: لا تمثل تطبيقاً لأن $8 \in S$ غير مرتبط.

[2] إذا كانت العلاقة $E = \{(1, 3), (1, -2), (3, 1), (1, 0), (0, -2)\}$ تمثل

تطبيقاً فحدد مجال ومدى هذا التطبيق.

الحل:

$$\text{المجال } S = \{3, 2, 1, 0, -2\}$$

$$\text{المدى } V = \{1, -3, 1, 0\}$$

[3] ليكن ت تطبيقاً من س إلى ص حيث $S = \{أ، ب، ج\}$ ، $V = \{0، 4، 5\}$

، ت (أ) = 4 ، ت (ب) = 0 ، ت (ج) = 5

المطلوب:

(أ) مثل التطبيق كأزواج مرتبة.

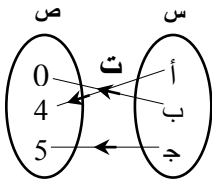
(ب) مثله كمخطط سهمي.

(ج) حدّد مجاله ومداه.

الحل:

(أ) $\{(أ، 4) ، (ب، 0) ، (ج، 5)\}$

(ب)



ج) المجال س = $\{أ، ب، ج\}$

المدى = $\{0، 4، 5\}$

[4] لتكن $S = \{2، 4، 6، 8\}$ وعرّفنا العلاقة ع من س إلى ص بالمخطط السهمي كما

في الشكل:

المطلوب:

(أ) اثبت أن العلاقة ع تطبيقاً.

(ب) حدّد قاعدة هذا التطبيق.

(ج) حدّد عناصر مداه.

(د) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل.

الحل:

(أ) ع تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من س له صورة واحدة في ص.

$$\text{ب) لاحظت } (2) = 10 = 5 \times 2$$

$$\text{ت } (4) = 20 = 5 \times 4$$

∴ كل عنصر من س يرتبط بعنصر من ص

$$\text{ت } (6) = 30 = 5 \times 6 \text{ يكبره (5 مرات)}$$

$$\text{ت } (8) = 40 = 5 \times 8$$

∴ نستنتج أن القاعدة ت (س) = 5س

$$\text{ج) المدى} = \{10, 20, 30, 40\} = \text{ص}$$

$$\text{د) المدى} = \text{ص}$$

[5] ليكن ت: ط ← ط تطبيقاً قاعدته ت (س) = 2س + 3

$$\text{أ) أوجدت } (2), (4), (6), (8) \text{ ت}$$

ب) حدد مدى هذا التطبيق.

الحل:

$$\text{لدينا ت (س) = } 2\text{س} + 3$$

$$\text{أ) } 7 = 3 + 4 = 3 + 2 \times 2 = (2) \text{ ت}^*$$

$$\text{ت}^* (4) = 11 = 3 + 8 = 3 + 4 \times 2$$

$$\text{ت}^* (6) = 15 = 3 + 12 = 3 + 6 \times 2$$

$$\text{ت}^* (8) = 19 = 3 + 16 = 3 + 8 \times 2$$

$$\text{ب) } 3 = 3 + 0 = (0) \text{ ت}^*$$

$$\text{ت}^* (1) = 5 = 3 + 1 \times 2$$

$$\text{ت}^* (2) = 7 = 3 + 2 \times 2 \text{ ∴ المدى} = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

[6] إذا كانت ع علاقة معرفة بالقاعدة ق (س) = س + 1 فبين أيّاً من العلاقات الآتية

تمثل تطبيقاً؟

(أ) ع: ط ← ط

(ب) ع: ص ← ط

(ج) ع: ط ← ص

(د) ع: ص ← ص

الحل:

(أ) $\forall s \in \mathbb{N} \exists t \in \mathbb{N} s+1=t \Leftarrow \text{ق (س) = س + 1}$ يمثل قاعدة لتطبيق من ط ← ط

(ب) ليس قاعدة لتطبيق من ص ← ط لنقض الشيء يكفي مثال:

$$س = 5^- \in \text{ص} \Leftarrow \text{ق (5^-) = 1 + 5^- = 4^- \notin \text{ط}$$

(ج) $\forall s \in \mathbb{N} \exists t \in \mathbb{N} s \Leftarrow \text{ص} \Leftarrow \text{س} \Leftarrow \text{ص} \Leftarrow \text{ق (س) = ص} \in \text{ص}$

∴ نعم تمثل قاعدة تطبيق من ط ← ص

(د) $\forall s \in \mathbb{N} \exists t \in \mathbb{N} s+1=t \Leftarrow \text{ق (س) = ص} \in \text{ص}$

∴ تمثل قاعدة تطبيق.

[7] ليكن التطبيق ق: س ← ص مُعرِّفاً بالقاعدة ق (س) = 2 س

حيث $س = \{2, 3, 5, 7\}$

$ص = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

حدّد مدى التطبيق ثمّ مثل هذا التطبيق كأزواج مرتبة.

الحل:

المدى هو مجموعة صور س وفق القاعدة $\boxed{\text{ق (س) = 2 س}}$

$$* \text{ق (2) = } 2 \times 2 = 4$$

$$6 = 3 \times 2 = (3) \text{ ق}^*$$

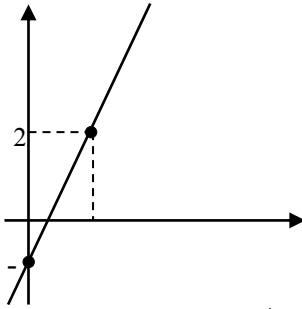
$$10 = 5 \times 2 = (5) \text{ ق}^*$$

∴ المدى = {4 ، 6 ، 10 ، 14}

$$14 = 7 \times 2 = (7) \text{ ق}^*$$

∴ بيان التطبيق ن = {(14 ، 7) ، (10 ، 5) ، (6 ، 3) ، (4 ، 2)}

[8] إذا كانت ت تطبيقاً من ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = 3س - 1 مثل هذا التطبيق بيانياً.



الحل:

ص = 3س - 1 دالة من الدرجة الأولى
∴ تمثل بيانياً بمستقيم.

لرسمه نختار نقطتين سهلتين.

$$\text{مثلاً: } \text{س} = 0 \Rightarrow \text{ت} = (0) \quad 1 - = 1 - 0 \times 3 = (1-، 0)$$

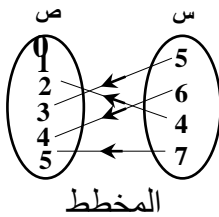
$$\text{س} = 1 \Rightarrow \text{ت} = (1) \quad 2 = 3 - 1 = 1 - 1 \times 3 = (2 ، 1)$$

نرتبها بجدول:

1	0	س
2	1-	ص

[9] التطبيق ت: س ← ص معرف بالقاعدة ت (س) = س - 2 حيث:

س = {5 ، 4 ، 6 ، 7} ، ص = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5} كون جدولاً لهذا



التطبيق ثم ارسم مخطظه السهمي.

الحل:

حسب القاعدة

$$\text{ت (س) = س} - 2 \Rightarrow \text{ت} = (5) \quad 3 = 5 - 2 =$$

$$\text{ت} = (6) \quad 4 = 2 - 6 =$$

4	7	6	5	س
5	2	4	3	ص

الجدول

$$ت (4) = 2 - 4 = 2$$

$$ت (7) = 2 - 7 = 5$$

[10] لتكن س = { -2, -1, 0, 1, 2 } ، ص = { -3, -2, 0, 1 } ، والتطبيق م: س ← ص معرفاً بالقاعدة م (س) = $1 - 2^س$ حدد مدى التطبيق ثم مثله جدولياً.

الحل:

المدى هو مجموعة صور س وفق القاعدة م (س) = $1 - 2^س$

$$∴ م (2-) = 1 - 2^{2-} = 1 - 4 = -3$$

$$م (1-) = 1 - 2^{1-} = 1 - 1 = 0$$

$$م (0) = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

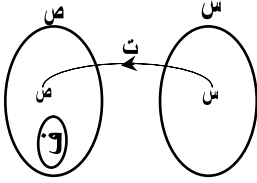
$$م (1) = 1 - 2^1 = 1 - 2 = -1$$

$$م (2) = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$$

س	2-	1-	0	1	2
ص	3	0	0	-1	-3

الصورة العكسية للتطبيق معكوس التطبيق

ليكن التطبيق $f: S \rightarrow V$ عكس الأسهم تحصل على علاقة: $f^{-1}: V \rightarrow S$ تتمتع بالخواص التالية:



$$[1] \forall v \in V \text{ فإن: } f^{-1}(v) = \{s : s \in S\}$$

وهنا قد تكون المجموعة خالية أي لا توجد صورة عكسية. وقد تكون مؤلفه من عنصر واحد أو أكثر.

$$[2] \text{ إذا كانت } f \supseteq S \text{ فإن } f^{-1}(f) \supseteq S$$

[3] الصورة العكسية لتطبيق هي علاقة قد تكون تطبيقاً وقد لا تكون تطبيقاً.

مثال: $f: S \rightarrow V$ حيث $S = \{2, 4, 6\}$

$V = \{1, 2, 3\}$ المعرف بالقاعدة.

$$f(s) = \frac{s}{2}$$

[أ] مثل التطبيق سهمياً.

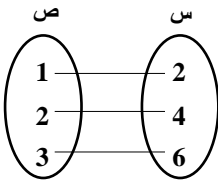
[ب] أوجد $f^{-1}(1)$ ، $f^{-1}(2)$ ، $f^{-1}(3)$

[ج] هل معكوس التطبيق تطبيقاً.

[د] أوجد قاعدة التطبيق العكسي.

[هـ] أوجد وفق هذه القاعدة الصورة العكسية للعنصر $3 \in V$

الحل:



$$[أ] \quad 1 = \frac{2}{2} = (2) \text{ هـ}$$

$$2 = \frac{4}{2} = (4) \text{ هـ}$$

$$3 = \frac{6}{2} = (6) \text{ هـ}$$

$$[ب] \quad 2 = (1)^{-1} \text{ هـ}$$

$$\{6, 4\} = (\{2, 3\})^{-1} \text{ هـ}$$

[ج] لوعكسنا الأسهم لوجدنا كل عنصر انعكس منه سهم وحيد. \therefore هـ⁻¹ تطبيق.

$$[د] \quad \frac{ص}{1} = \frac{س}{2} \text{ حصل على س ثم بَدَل المتغيرات}$$

س = 2ص بدل المتغيرات:

$$\leftarrow ص = 2س \quad \therefore \text{هـ}^{-1} (س) = 2س$$

$$[هـ] \quad 6 = 3 \times 2 = (3)^{-1} \text{ هـ}$$

 ليكن التطبيق ر: س ← ص يحث أن:

$$س = \{1, 2, 3, 4\}, \text{ ص} = \{أ, ب, ج, د\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ إذا كان العدد زوجي.} \\ \text{د إذا كان العدد فردي.} \end{array} \right\} = (س) \text{ ر والقاعدة}$$

المطلوب:

[1] مثل التطبيق سهماً.

[2] إذا عكسنا الاسهم هل يصبح المعكوس تطبيقاً. اذكر السبب وإذا كان هناك أكثر من

سبب اذكره وماذا تسمى المعكوس عندئذٍ.

$$[3] \text{ أوجد ر}^{-1} \text{ (ب)}$$

$$[4] \text{ أوجد ر}^{-1} \text{ ({ب, ج})}$$

$$[5] \text{ أوجد ر}^{-1} \text{ ({أ, ب})}$$

الحل:

$$[1] \text{ ر (1) = د}$$

$$\text{ر (2) = أ}$$

$$\text{ر (3) = د}$$

$$\text{ر (4) = أ}$$

[2] إذا عكسنا الاسهم لم يُعَد تطبيقاً للأسباب التالية:

الأول: العنصر ب \in ص لم ينعكس منه أي سهم.

∴ غير مرتبط وهذا ينافي تعريف التطبيق.

الثاني: أ مرتبط لكن الارتباط غير وحيد.

(سينعكس منه سهمين) وهذا ينافي تعريف التطبيق.

∴ المعكوس يُدعى علاقة عكسية.

$$[3] \quad \phi = \text{ر}^{-1}(\text{ب})$$

$$[4] \quad \phi = \text{ر}^{-1}(\{\text{ب}, \text{ج}\})$$

$$[5] \quad \text{ر}^{-1}(\{\text{أ}, \text{ب}\}) = \{4 - 2\} \supset \text{س}$$

مثال: إذا كان التطبيق ر: ح ← ح معرفةً بالقاعدة ر (س) = 1 + 2س + س²

فما الصورة العكسية للعنصر 36؟ وهل لهذا التطبيق معكوس.

الحل: معك ص = 36 نريد س من المجال

$$\text{لدينا ص} = 1 + 2س + س^2$$

$$\text{ضع ص} = 36 \Leftrightarrow 36 = 1 + 2س + س^2$$

$$\text{صفرها س}^2 + 2س + 36 - 1 = 0$$

$$\text{س}^2 + 2س - 35 = 0$$

$$0 = (س + 7)(س - 5)$$

$$\text{إمّا س} + 7 = 0 \Leftrightarrow \text{س} = -7$$

$$\text{أو س} - 5 = 0 \Leftrightarrow \text{س} = 5$$

$$\therefore \text{ر}^{-1}(36) = \{5, -7\}$$

∴ بما أن 36 إنعكس منه سهمين.

∴ التطبيق ليس له معكوس.

إجابة تمارين ومسائل (2/2)

[1] ليكن ت: س ← ص تطبيقاً معرفةً بالمخطط السهمي الموضح بالشكل والمطلوب:

(1) أوجد b^{-1} (أ) ، b^{-1} (ب) ، b^{-1} (ج)

(2) أوجد b^{-1} (ج ، ب)

(3) بيّن أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً.

الحل:

(1) $b^{-1} (أ) = \{ \} = \phi$ لا توجد صورة عكسية.

$b^{-1} (ب) = \{ 5 ، 3 ، 2 \}$

$b^{-1} (ج) = \{ 7 \}$

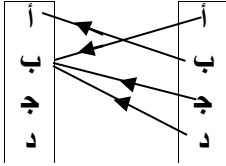
(2) $b^{-1} (ج ، ب) = \{ 7 ، 5 ، 3 ، 2 \}$

(3) b^{-1} ليس تطبيقاً لأكثر من سبب:

الأول: أ لم ينعكس منه أي سهم.

الثاني: ب انعكس منها أكثر من سهم. ∴ خالف تعريف التطبيق.

[2] ليكن q تطبيقاً ق: $S \leftarrow S$ حيث $S = \{ أ ، ب ، ج ، د \}$ معرفاً بالمخطط السهمي



المبيّن بالشكل:

المطلوب: (1) أوجد q^{-1} (ب) ، q^{-1} (ج)

(2) مثل التطبيق كأزواج مرتبة.

(3) أوجد معكوس التطبيق.

(4) هل معكوس التطبيق q تطبيقاً؟ ولماذا؟

الحل: (1) $q^{-1} (ب) = \{ أ ، ب ، ج \}$ ، $q^{-1} (ج) = \{ \} = \phi$

(2) بيان التطبيق $N = \{ (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (ج ، ب) ، (د ، ب) \}$

(3) $q^{-1} = \{ (ب ، أ) ، (أ ، ب) ، (ب ، ج) ، (ب ، د) \}$

(4) q^{-1} ليس تطبيقاً لأكثر من سبب:

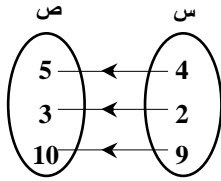
الأول: ب انعكس منها أكثر من سهم.

الثاني: ج ، د لم ينعكس منهم أي سهم.

[3] إذا كان التطبيق ه : س ← ص معرفاً بالقاعدة:

$$\text{ه (س) = س + 1 حيث س = \{4, 2, 9\}, \text{ ص = \{5, 3, 10\}}$$

فاثبت أن معكوس التطبيق ه تطبيقاً.



$$\text{الحل: ه (س) = س + 1}$$

$$\text{ه (4) = 4 + 1 = 5}$$

$$\text{ه (2) = 2 + 1 = 3}$$

$$\text{ه (9) = 9 + 1 = 10}$$

اعكس الاسهم فستجد أن كل عنصر من ص انعكس منه سهماً وحيداً. ∴ ه⁻¹ تطبيقاً.

$$[4] \text{ ليكن ب}^{-1} : \text{ط} / \{0\} \leftarrow \text{ط معرفاً بالقاعدة ب}^{-1} \text{ (س) = 3س - 1}$$

المطلوب:

$$\text{أ) أوجد ب}^{-1} (1), \text{ ب}^{-1} (5), \text{ ب}^{-1} (8)$$

ب) بين أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً.

الحل:

أ) لإيجاد الصورة العكسية أفضل إيجاد العلاقة العكسية.

معنا: ص = 3س - 1 نحاول الحصول على س بدلالة ص (تكون هي العلاقة العكسية).

$$\text{∴ ص = 3س - 1} \Leftrightarrow \boxed{\text{س} = \frac{\text{ص} + 1}{3}}$$

$$\text{لإيجاد ب}^{-1} (1) \text{ ضع ص = 1 في العلاقة} \Leftrightarrow \text{س} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \notin \text{ط} / \{0\}$$

$$\text{∴ ب}^{-1} (1) = \emptyset$$

$$\text{لإيجاد ب}^{-1} (5) \text{ ضع ص = 5 في العلاقة} \Leftrightarrow \text{س} = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in \text{ط} / \{0\}$$

$$\text{∴ ب}^{-1} (5) = \{2\}$$

$$\text{لإيجاد ب}^{-1} (8) \text{ ضع ص = 8} \Leftrightarrow \text{س} = \frac{8+1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ ∴ ب}^{-1} (8) = \{3\}$$

ب: ∴ ب¹⁻ = φ سبب كافٍ لأقوال أن ب¹⁻ ليس تطبيقاً.

[5] ليكن التطبيق ت: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) س + 3

أوجد: أ) ب¹⁻(7)، ب¹⁻(3)، ب¹⁻(2)

ب) ب¹⁻(س: س ∈ ح - 5 ≤ س ≤ 12)

الحل:

أ) افضل إيجاد العلاقة العكسية ص = س + 3 ⇔ س = س - 3

∴ لإيجاد ب¹⁻(7) ضع ص = 7 ⇔ س = 3 - 7 = 4 ∴ ب¹⁻(7) = {4}

لإيجاد ب¹⁻(3) ضع ص = 3 ⇔ س = 3 - 3 = 0 ∴ ب¹⁻(3) = {0}

لإيجاد ب¹⁻(2) ضع ص = 2 ⇔ س = 3 - 2 = 1 ∴ ب¹⁻(2) = {1}

ب) لإيجاد ب¹⁻(س: س ∈ ح - 5 ≤ س ≤ 12) نوجد ب¹⁻(5-)، ب¹⁻(12)

لإيجاد ب¹⁻(5-) ضع ص = 5- ⇔ س = 3 - 5- = 8-

لإيجاد ب¹⁻(12) ضع ص = 12 ⇔ س = 3 - 12 = 9

∴ ب¹⁻(س: س ∈ ح - 5 ≤ س ≤ 12) = {9، 8-} #

[6] ليكن التطبيق د: ح ← ح معرفاً بالقاعدة د (س) = س² + 4س + 7

والمطلوب: (1) د¹⁻(8) (2) اثبت أن معكوس التطبيق د ليس تطبيقاً.

الحل:

(1) ضع ص = 28 وأحصل على س من ص = س² + 4س + 7

$$28 = س^2 + 4س + 7 \text{ صغِّرها } 0 = 28 - 7 + 4س + س^2$$

$$0 = 21 - 4س + س^2$$

$$0 = (7 + س)(3 - س)$$

$$\begin{array}{r} 7 + س \\ 3 - س \end{array}$$

$$\boxed{3} = س \Leftrightarrow 0 = 3 - س$$

$$\boxed{7} = س \Leftrightarrow 0 = 7 + س$$

∴ د¹⁻(28) = {7-، 3}

∴ د¹⁻ ليس تطبيقاً.

(2) ∴ 28 انعكس منه سهمان.

[7] إذا كان التطبيق ه: ط ← ط معرفاً بالقاعدة ه (س) = 2س + 1

أوجد: أ) ه⁻¹(3) ، ه⁻¹(6) ، ه⁻¹(0)

ب) ه⁻¹(ص:ص ∈ ط ، ص ≥ 5)

ج) ه⁻¹(ص:ص ∈ ط ، 3 ≤ ص ≤ 9)

د) اثبت أن معكوس التطبيق ه ليس تطبيقاً.

الحل:

أ) ص = 2س + 1 أفضل إيجاد س بدلالة ص

$$\therefore ص - 1 = 2س \Rightarrow س = \frac{ص - 1}{2}$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(3) \text{ ضع ص} = 3 \Rightarrow س = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\therefore \{1\} = \text{ه}^{-1}(3)$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(6) \text{ ضع ص} = 6 \Rightarrow س = \frac{6 - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \phi = \text{ه}^{-1}(6)$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(0) \text{ ضع ص} = 0 \Rightarrow س = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \phi = \text{ه}^{-1}(0)$$

ب) (ص:ص ∈ ط، ص ≥ 5) = {0، 1، 2، 3، 4، 5}

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(1) \text{ ضع ص} = 1 \Rightarrow س = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

$$\therefore \{0\} = \text{ه}^{-1}(1)$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(2) \text{ ضع ص} = 2 \Rightarrow س = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\phi = (2)^{1-} \text{ هـ} \therefore$$

$$\text{لإيجاد هـ} (4)^{1-} \text{ ضع ص} = 4 \Leftarrow \text{س} = \frac{1-4}{2} = \frac{3}{2} \text{ ط هـ}$$

$$\phi = (4)^{1-} \text{ هـ} \therefore$$

$$\text{لإيجاد هـ} (5)^{1-} \text{ ضع ص} = 5 \Leftarrow \text{س} = \frac{1-5}{2} = \frac{4}{2} \text{ ط هـ}$$

$$\phi = (5)^{1-} \text{ هـ} \therefore$$

بقية العناصر حُسبت من (أ)

$$\{1, 2, 0\} = (5 \geq \text{ص} \in \{\text{ط} \in \text{ص}, \text{ص}\})^{1-} \text{ هـ} \therefore$$

$$\text{ج) } \{\text{ص} : \text{ص} \in \text{ط}, 3 \geq \text{ص} \geq 9\} = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3\}$$

$$\text{عوض عن ص في نفس القاعدة س} = \frac{1-\text{ص}}{2}$$

$$\text{طبعاً وجدنا هـ} (3)^{1-} = \{1\}, \text{ هـ} (4)^{1-} = \phi, \text{ هـ} (5)^{1-} = \{2\} \text{ وهكذا نجد:}$$

$$\{4, 3, 2, 1\} = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3)^{1-} \text{ هـ}$$

$$\text{د) هناك عناصر من ط ليس لها معكوس مثلاً هـ} (4)^{1-} = \phi$$

هـ¹⁻ ليس تطبيقاً.

أنواع التطبيقات

(1) التطبيق الثابت:

تعريف: يسمى التطبيق ت: س ← ص تطبيقاً ثابتاً إذا ارتبطت جميع عناصر مجال هذا التطبيق بعنصر واحد فقط من مجاله المقابل:

$$\forall s \in S \exists t \in T (s = a = \text{ثابت}).$$

مثال: ت: س ← ص موضح بالشكل المقابل.

لاحظ: ت (5) = ب

ت (4) = ب ∴ ثبتت الصورة.

ت (6) = 6 ∴ ت تطبيق ثابت.

(2) التطبيق المطابق:

تعريف: يسمى التطبيق ت: س ← ص تطبيقاً مطابقاً (محايداً) إذا ارتبط كل عنصر بنفسه.

$$\forall s \in S \exists t \in T (s = s)$$

مثال: ت: ح ← ح قاعدته ت (س) = س هل ت تطبيقاً مطابقاً.

الحل: ت (1) = 1

ت (2) = 2

ت (3) = 3 لاحظ كل عنصر ارتبط بنفسه. ∴ ت تطبيقاً مطابقاً.

(3) التطبيق الغامر (الشامل):

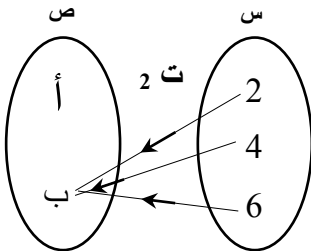
تعريف: يسمى التطبيق ت: س ← ص غامراً (شاملاً) إذا كان كل عنصر من مجاله المقابل صورة لعنصر أو أكثر من مجاله ويعبر عنه رمزياً:

$$\forall v \in V \exists s \in S \text{ بحيث } t(s) = v.$$

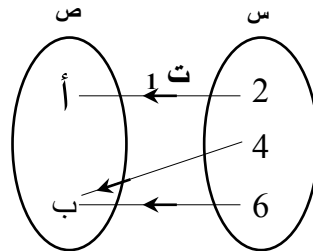
ملاحظة هامة: كيف نثبت أن التطبيق غامر، إذا كان عدد عناصر مجاله أو مجاله المقابل كبير جداً؟

الجواب: نحسب مدى التطبيق ونقارنه مع المجال المقابل فإذا كان المدى = المجال المقابل قلنا التطبيق غامر.

مثال توضيحي: أي من التطبيقين التاليين يُمثل تطبيقاً غامراً ولماذا؟



54



الجواب:

أولاً: مدى $T_1 = \{أ، ب\}$ ، مجاله المقابل ص = $\{أ، ب\}$ لاحظ المدى = المجال المقابل
∴ T_1 غامر.

ثانياً: مدى $T_2 = \{ب\}$ ، مجاله المقابل ص = $\{أ، ب\}$
∴ المدى \neq المجال المقابل.

∴ T_2 ليس غامراً.

(4) التطبيق المتباين (الأحادي):

تعريف: يسمى التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً متبايناً إذا كان كل عنصر من المجال
المقابل صورة لعنصر على الأكثر من المجال.

طرق البرهان: (أ) البرهان المباشر.

(ب) البرهان المعاكس.

(أ) البرهان المباشر: $\forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ إذا كان $s_1 \neq s_2$ فإن: د (س₁) \neq

د (س₂)

(ب) البرهان المعاكس: $\forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ إذا كان ت (س₁) = ت (س₂) \Leftarrow س₁ = س₂

مثال توضيحي: ت: ح ← ح حيث ت (س) = 2س + 1 أثبت أن ت متباين.

طريقة ثانية بالبرهان المعاكس	طريقة أولى بالبرهان المباشر $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{C}$
لنفرض $t = (s_1)$ = $t = (s_2)$	لنفرض $s_1 \neq s_2$ أضرب بـ 2
$\Leftarrow 2s_1 + x = 2s_2 + x$	$\Leftarrow 2s_1 \neq 2s_2$ أضف 1
$\Leftarrow 2s_1 = 2s_2$ اقسام على 2	$\Leftarrow 2s_1 + 1 = 2s_2 + 1$
$\Leftarrow \frac{2s_1}{2} = \frac{2s_2}{2}$	$\Leftarrow t = (s_1) \neq t = (s_2)$
$\Leftarrow 2s_1 = 2s_2$ متباين.	$\Leftarrow t$ متباين.

(5) التطبيق التقابل:

تعريف: يسمى التطبيق $t: s \leftarrow v$ تقابلاً إذا كان متبايناً وغامراً.

مثال توضيحي:

$$s = \{1, 2, 3\} \text{ بفرض}$$

$$v = \{4, 5, 6\}$$

$$e = s \cup v \text{ وأن التطبيق } r: e \leftarrow \{0, 1\}$$

معرف بالقاعدة.

$$r = \left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كان } s \in s \\ 0 \text{ إذا كان } s \in v \end{array} \right\}$$

المطلوب: [أ] مثل التطبيق سهماً.

[ب] هل r تطبيق شامل؟ علل إجابتك.

[ج] هل r تطبيق متباين؟ علل إجابتك.

[د] هل r تقابل؟ هل r^{-1} تطبيق.

الحل:

$$\{أ\} = ع = س لاص = \{1، 2، 3، 4، 5، 6\}$$

[ب] التطبيق غامر لأن كل عنصر من المجال المقابل مرتبط:

(1) صورة لأكثر من عنصر (المهم أنه مرتبط).

(0) صورة لأكثر من عنصر (المهم أنه مرتبط).

أو بصورة أخرى:

$$\text{مدى التطبيق} = \{0، 1\} = \text{المجال المقابل.}$$

∴ التطبيق غامر.

[ج] ر ليس متباين. لأن $2 \neq 1$ مع ذلك $r(1) = r(2)$

تذكر القانون: إذا كان $2 \neq 1$ المفروض $r(1) \neq r(2)$

أو يتناقض مع تعريف المتباين [المفروض كل عنصر من المجال المقابل صورة واحدة على

الأكثر لعنصر من المجال] وهُنا ما شاء الله (1) \in المجال المقابل صورة لـ (3) عناصر من

ع.

[د] بما أن (ر) ليس متباين. ∴ ليس تقابل وليس له تطبيق عكسي.

$$\text{مثال داعم: } r: ص \leftarrow ص \text{ بحيث } r(س) = س^{-3} - 1$$

المطلوب:

[أ] أوجد صورة الأعداد $-1، -2، 1، 2$ في التطبيق (ر).

[ب] هل التطبيق ر شاملاً؟ علل إجابتك.

[ج] اثبت أن التطبيق ر متباين.

الحل:

إجابة تمارين ومسائل (3/2)

[1] بين نوع كل تطبيق من التطبيقات التالية:

الجواب: 1 تطبيق ثابت.

الجواب: 2 متباين وغامر. .: تقابل.

الجواب: 3 (1) مطابق. كل عنصر يرتبط بنفسه.

(2) متباين.

(3) غامر.

(4) تقابل.

الجواب: 4: ليس له نوع معين.

الجواب: 5 متباين.

الجواب 6: (1) (متباين)

(2) غامر.

(3) تقابل.

[2] ليكن ق: س ← ص تطبيقاً معرّف بالقاعدة:

((س رقم من أرقام العدد ص: س ∈ س ، ص (ص))

س = {5 ، 4 ، 6} ، ص = {1،2 ، 456 ، 302} أوجد مدى هذا التطبيق وبين نوعه.
الحل:

∴ مدى ق {456}

∴ ق تطبيق (ثابت).

[3] الجدول التالي يمثل التطبيق ق (س) على س = {2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6}

* المطلوب: ارسم مخططاً سهماً وبين نوع التطبيق؟

س	2	3	4	5	6
ص	6	5	2	4	4

الجواب:

(1) ليس مطابق.

(2) ليس متباين.

(3) ليس غامر.

(4) ليس تقابل.

∴ لا نوع له.

[4] ليكن التطبيق ت: س ← ص معرّفاً بالقاعدة ت (س) = 3س

حيث س = {1 ، 2 ، 3 ، 4} ، ص = {0 ، 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15}

المطلوب: أ) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة. ب) بيّن نوعه.

الحل:

أ) ت (س) = 3س

ت (1) = 1 × 3 = (3 ، 1)

ت (2) = (2 × 3) = 6 = (6 ، 2)

ت (3) = (3 × 3) = 9 = (9 ، 3)

$$12 = (4 \times 3) = (4, 12) \text{ ت}$$

∴ بيان التطبيق ن = $\{(12, 4), (9, 3), (6, 2), (3, 1)\}$

ب) التطبيق متباين كل عنصرين مختلفين صورتهما مختلفتين.

[5] لتكن س = $\{أ, ب, ج, ص\}$ = $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ بين نوع كل من التطبيقين

التاليين من س ← ص.

$$d_1 = \{(ب, 3), (أ, 1), (ج, 5), (د, 7)\}$$

$$d_2 = \{(أ, 5), (ب, 3), (ج, 3), (د, 1)\}$$

الحل:

ثانياً: د₂

أولاً: د₁

شكل

(د₂ ليس له نوع معين)

(واضح أن د₁ متباين)

[6] المخطط السهمي يمثل من س ← س

حيث س = $\{ب, ج, د\}$: أ: اكتب بيان هذا التطبيق كأزواج مرتبة.

ب: بين نوعه.

الحل:

$$\text{بيان التطبيق ن} = \{(ب, ب), (ج, د), (د, ج)\}$$

ب) متباين - غامر ∴ تقابل.

[7] لتكن $ل = \{6, 7, 8, 9\}$ ، $م = \{د, ه, و\}$

(أ) كون تطبيقاً من $ل \leftarrow م$ بحيث يكون غامراً وغير متباين.

(ب) كون تطبيقاً من $م \leftarrow ل$ بحيث يكون متبايناً وغير غامر.

(ج) هل يمكن تكوين تطبيق من $ل \leftarrow م$ تقابلاً؟ ولماذا.

(الجواب: أ)

(ب)

شكل

(ج) لا يمكن لأن عدد عناصر المجال (ل) = 4 وعدد عناصر المجال المقابل (3) أي أن

هناك عنصر من $م$ لا بد أن يكون صورة لعنصرين على الأقل من $ل$.

∴ غير متباين. ∴ لا يكن جعله تقابل.

[8] لتكن $س = \{2, 3, 5, 6\}$ والتطبيق $د: س \leftarrow ص$

حيث $د(س) = 1 - 2$ ما مدى هذا التطبيق؟ وبين نوعه.

(الجواب:

المدى هو مجموعة صور $س$.

∴ $د(س) = 1 - 2$

$$د(2) = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$$

$$د(3) = 1 - 3^2 = 1 - 9 = -8$$

$$د(5) = 1 - 5^2 = 1 - 25 = -24$$

$$د(6) = 1 - 6^2 = 1 - 36 = -35 \quad \therefore \text{المدى} = \{35, 24, 8, 3\}$$

نوعه: متباين كل عنصرين مختلفين صورتيهما مختلفتين.

[9] ق₁، ق₂ تطبيقان معرفان كما يلي:

$$ق_1: ط \leftarrow ط ، ق_1(س) = 2س$$

$$ق_2: ط \leftarrow ط ، ق_2(س) = 3س + 1 \quad \text{ما نوع كلٍ منهما؟}$$

الجواب:

أولاً: ق₁ المتباين:

نفرض ق₁(س₁) = ق₁(س₂) \Leftrightarrow 2س₁ = 2س₂ قسم على 2 \Leftrightarrow س₁ = س₂ \Leftrightarrow ق₁ متباين.

الغامر: ص = 2س لنبحث فيما إذا كان لها حل في المجال ط. كيف نعرف؟

نحصل على س بدلالة ص فيتبين لنا إن كان هناك حل أم لا.

التنفيذ: ص = 2س \Leftrightarrow س = $\frac{ص}{2}$ ليس لها حل دوماً في ط مثلاً لو كانت ص = 5

$$\Leftrightarrow س = \frac{5}{2} \notin ط \therefore \text{ليس غامر.} \therefore \text{ليس تقابل.}$$

ثانياً: ق₂ المتباين: نفرض ق₂(س₁) = ق₂(س₂) \Leftrightarrow 3س₁ + 1 = 3س₂ + 1 الغامر

$$\Leftrightarrow ص = 3س + 1 \text{ لنبحث أن كان لها حلاً في ط: } ص - 1 = 3س \Leftrightarrow س = \frac{ص - 1}{3}$$

ليس لها حل دوماً في ط.

$$\text{توضيح: لو كانت ص = 5} \Leftrightarrow س = \frac{4}{3} \notin ط$$

\therefore ق₂ ليس غامر وبالتالي ليس تقابل.

[10] إذا كانت س = {س: س \in ط ، 3 > س > 8}

$$ص = \{ص: ص \in ط، 0 \geq ص \geq 9\}$$

وكان د: س \leftarrow ص تطبيقاً حيث د(س) = س + 2

هل التطبيق د تقابل.

الجواب: س = {4 ، 5 ، 6 ، 7}

ص = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}

$$د (س) = 2 + س$$

$$د (4) = 4 + 2 = 6$$

$$د (5) = 2 + 5 = 7$$

$$د (6) = 2 + 6 = 8$$

$$د (7) = 2 + 7 = 9 \therefore \text{المدى} = \{6 ، 7 ، 8 ، 9\} \neq \text{ص}$$

∴ ليس غامر

∴ ليس تقابل.

[11] إذا كان ق (س) \neq س² بين نوع هذا التطبيق عندما يكون:

أ) ق: ط ← ط ← ق: ص ← ص

الجواب:	
ب) ليس متباين ولنقض الشيء يكفي مثال: -2 ≠ 2 لكن ق(2-) = ق(2) = 4 المفروض ق(2-) ≠ ق(2) وليس غامر بفرض ص = 1- عوض في القاعدة ص = س ² 1- = س ² مستحيل ∴ هناك قِيم لـ ص ليس لها صور عكسية.	أ) ق(س) = ق(1س) = ق(2س) س ₁ ² = س ₂ ² س ₁ = ± س ₂ ← ق متباين وليس غامر. بفرض ص = 5 عوض في القاعدة ص = س ² ← 50 = س ² س = ± √50 ∉ ط ∴ ليس تقابل.

التطبيق العكسي

تعريف: يكون للتطبيق: $s \leftarrow$ ص تطبيقاً عكسياً إذا كان ت تقابلاً.
 مثال: r تطبيق ممثل بالشكل المقابل هل r تطبيق تقابل وهل له تطبيق عكسي.
 الحل: r متباين، وغامر $\Leftarrow r$ تقابل.
 \therefore له تطبيق عكسي. $r^{-1}: s \leftarrow$ ص

مثال توضيحي دايم:

$r: c \leftarrow$ ح معرف بالقاعدة $r(s) = s + 1$
 هل: r تقابل ... أوجد تطبيقه العكسي أن أمكن.
 الحل:

[1] المتباين: الشرط: $r(s) = (s) \Leftarrow s = 2s$

بفرض $r(s) = (s) \Leftarrow s = 2s + 1$ بحذف (1) من الطرفين.

$$\Leftarrow s = 2s + 1 \Leftarrow r \text{ متباين.}$$

[2] الغامر: نحصل على s بدلالة v ونتأكد مهما كانت $v \in c$ يوجد لها مقابل

$$s \in c$$

$$\text{التنفيذ: } v = s + 1 \Leftarrow s = v - 1 \in c$$

\therefore غامر.

$\therefore r$ تقابل فله دالة عكسية.

القاعدة العكسية ل: r_1 تقول: احصل على s بدلالة v ثم بدل المتغيرات: لاحظ معي من

الغامر أن $s = v - 1$ بدل المتغيرات:

$$\Leftarrow v = s - 1 \Leftarrow v = s - 1$$

$$\therefore r^{-1}(s) = s - 1$$

مثال: اثبت أن التطبيق $r: c \leftarrow$ ح المعرف بالقاعدة $r(s) = 2s + 3$ تقابلاً ثم أوجد معكوسة.

الحل:

المتباين: الشرط $r = (1s) \Leftrightarrow r = (2s) \Leftrightarrow 1s = 2s$

ابعد (3) من الطرفين بفرض $r = (1s) \Leftrightarrow r = (2s) \Leftrightarrow 1s + 3 = 2s + 3$

$$= 1s + 3 = 2s + 3 \text{ (قسيم على 2)}$$

$$= 1s = 2s \Leftrightarrow r \text{ متباين.}$$

الغامر: $v = 3 + 2s$ (احصل على s بدلالة v وتأكد من وجود s دوماً في

$$v \in \mathbb{C}$$

التنفيذ: $v = 3 - 2s \Leftrightarrow s = \frac{3-v}{2}$ بديل المتغيرات:

$$v = \frac{3-s}{2}$$

$\therefore r = (1s)^{-1}$ وهي قاعدة التطبيق العكسي.

إجابة تمارين ومسائل (4/2)

[1] بين أي من التطبيقات التالية له تطبيق عكسي:

التطبيق ت ليس متباين وليس غامر.

∴ ليس تقابل.

∴ لا يوجد له تطبيق عكسي.

ي: ليس متباين.

∴ ليس تقابل.

∴ ليس له تطبيق عكسي.

ن: تقابل.

∴ له تطبيق عكسي.

حيث ن¹⁻: ص ← س

[2] د: ص ← س معرفةً بالقاعدة د(س) = س³ ∇ س ∈ س حيث أن:

$$س = \{0, 1-, 2-, 3-\} \quad \text{و} \quad ص = \{0, 1-, 8-, 27-\}$$

(أ) أوجد د¹⁻(0)، د¹⁻(1-)، د¹⁻(80)

(ب) اثبت أن التطبيق د تقابل.

(ج) مثل التطبيق العكسي بمخطط سهمي.

الحل:

$$\text{القاعدة د(س) = س}^3$$

$$\therefore 27- = {}^3(3-) = (3-) \text{ د}$$

$$8- = {}^3(2-) = (2-) \text{ د}$$

$$1- = {}^3(1-) = (1-) \text{ د}$$

$$0 = {}^3(0) = (0) \text{ د}$$

$$\text{أ) د}^1(0) = (0) \text{ ، د}^1(1-) = (1-) \text{ ، د}^1(8-) = (27-)$$

ب) د متباين وغامر

∴ د تقابل.

∴ له دالة عكسية د⁻¹ص ← س.

ج)

[3] ليكن ر: ح ← ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ر (س) = 1 - س

اثبت أن: ر تقابل ثم أوجد قاعدة ر⁻¹:

الحل:

المتباين: نفرض ر(س₁) = ر(س₂)

$$\Leftarrow 1 - س_1 = 1 - س_2 = س_1 = س_2 \Leftarrow ر متباين.$$

* الغامر: لنبحث عن حل المعادلة ص = 1 - س في المجال ح

∴ نحصل على س بدلالة ص $\Leftarrow ص + 4 = س$

لاحظ: $\forall ص \in ح \text{ فإن } ص + 1 \in ح$

∴ لها حل في ح

∴ ر غامر $\Leftarrow ر$ تقابل.

∴ له تطبيق عكسي ر⁻¹. وإيجاد ر⁻¹:

الطريقة: هات س بدلالة ص ثم بدل المتغيرات:

لتنفيذ: وجدنا س = ص + 1.. بدل المتغيرات.

$$\therefore ص = س + 1 \therefore ر^{-1}(س) = س + 1$$

[4] إذا كان م: ح ← ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة م (س) = $\frac{1+س}{2}$ فأوجد:

$$(3^-)^{1^-} م ، \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1^-} م ، \quad (5)^{1^-} م (أ)$$

(ب) قاعدة التطبيق العكسي لهذا التطبيق.

الحل:

لإيجاد الصورة العكسية: أفضل إيجاد س بدلالة ص

$$\text{لدينا: } \frac{ص}{1} = \frac{1+س2}{2} \Leftarrow 2ص = 1+س2 \Leftarrow 1 = 2ص-س2 \Leftarrow 1-ص2 = 2ص-س2$$

$$\Leftarrow \frac{1-ص2}{2} = س$$

$$(أ) \text{ لإيجاد م } (5)^{1^-} \text{ ضع } ص = 5 \Leftarrow س = \frac{1-5 \times 2}{2} = \frac{1-10}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$\therefore م = \left\{\frac{9}{2}\right\} = (5)^{1^-}$$

$$\text{لإيجاد م } \left(\frac{1}{2}\right)^{1^-} \text{ ضع } ص = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{1-\frac{1}{2} \times 2}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = \text{صفر}$$

$$\therefore م = \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1^-}$$

$$\text{لإيجاد م } (3^-)^{1^-} \text{ ضع } ص = 3^- \Leftarrow س = \frac{1-3^- \times 2}{2} = \frac{1-6^-}{2} = \frac{7^-}{2}$$

$$\therefore م = \left\{\frac{7^-}{2}\right\} = (3^-)^{1^-}$$

(ب) لإيجاد قاعدة التطبيق العكسي هات س بدلالة ص ثم بَدِّل المتغيرات بالحقيقة. وجدنا

$$\text{أن } س = \frac{1-ص2}{2}$$

$$\therefore \text{بَدِّل المتغيرات: } ص = \frac{1-س2}{2} \quad \text{أي م } (س)^{1^-} = \frac{1-س2}{2}$$

[5] إذا كان ت: ح ← ح تطبيقاً معرّفياً بالقاعدة ت (س) = س⁻³ 8 فاثبت أن ب: تقابل ثم أوجد قاعدة ب⁻¹.

الحل:

المتباين: نفرض ت (س₁) = ت (س₂)

$$\Leftarrow 1 - \frac{3}{2}س = 1 - \frac{3}{1}س$$

$$\Leftarrow 1س = \frac{3}{2}س \Leftarrow \text{بالجذر التكعيبي } 1س = 2س \Leftarrow \text{ت متباين.}$$

* الغامر: نبحث عن حل المعادلة ص = س⁻³ 8 في المجال ح.

∴ احصل على س بدلالة ص.

$$ص = س^{-3} 8 \Leftarrow ص + 8 = س^3 \Leftarrow س = \sqrt[3]{ص + 8} \in ح$$

∴ دوماً لها حل في ح ∴ ت غامر \Leftarrow ت تقابل ∴ له دالة عكسية .

ولإيجاد ب⁻¹: نعيد الفكرة: هات س بدلالة ص ثم بَدِّل المتغيرات لِحُسن الحظ $س^3 = \sqrt[3]{ص + 8}$ موجودة ∴ بَدِّل المتغيرات.

$$ص = \sqrt[3]{ص + 8} \Leftarrow ب^{-1}(س) = \sqrt[3]{8 + س}$$

[6] أوجد قاعدة التطبيق العكسي لكل من التطبيقين التاليين و المعرفين في ح \leftarrow ح.

$$\text{(أ) } ت_1(س) = \frac{1}{2}س + 8 \quad \text{(ب) } ت_2(س) = 5 - 6س$$

الحل: الفكرة احصل على س بدلالة ص ثم بَدِّل المتغيرات:

$$\text{(أ) } ص = \frac{1}{2}س + 8 \quad \text{أضرب كل حد بـ (2) } \Leftarrow 2ص = س + 16$$

$$\Leftarrow 2ص - 16 = س \quad \text{بَدِّل المتغيرات } ص = 2س - 16$$

$$\Leftarrow ت_1^{-1}(س) = 2س - 16$$

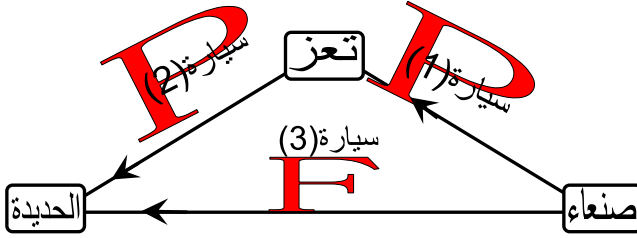
(ب) ص = 5 - 6س \Leftarrow 5س = 5 - 6ص فقط نقلت من طرف إلى طرف.

$$\Leftarrow س = \frac{5 - 6ص}{6} \quad \text{بَدِّل المتغيرات.}$$

$$ص = \frac{5 - 6س}{6} \quad \text{∴ } ت_2^{-1}(س) = \frac{5 - 6س}{6}$$

مفهوم تركيب التطبيقات أو تحصيلها (0)

لو قدر لشخص الانتقال من صنعاء إلى الحديدة سالكاً الطريق التالي:

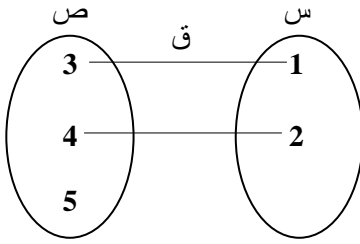


استقل سيارة س₁ من صنعاء إلى تعز وسيارة س₂ من تعز إلى الحديدة كان ممكن له أن يستقل سيارة س₃ تنقله مباشرة من صنعاء إلى الحديدة إن عمل السيارة س₃ هل تحصيل لعمل السيارتين س₁، س₂ ونعبر عنه رياضياً.

رياضياً.

س³ = س₂ 0 س₁ وضعت س₁ على سيارة (0) لأنها هي التي تتحرك أولاً.

* ليكن لدينا التطبيقين.



لنعيد رسمهم بشكل تمثيلي:

(0 ق هو تحصيل (تركيب) التطبيقين ق، ر حيث ر 0 ق: س ← ع).

لمعرفة قاعدة هذا التطبيق سأقوم بالمناقشة التالية:

أولاً: (ر 0 ق) (1) = 7 من الشكل (1)

ثانياً: ر (3) = 7 وبما أن 3 هي صورة (1) وفق ق أي ق (1) = 3

بدل عنها في ر (3): أصبح ر (ق(1)) = 7 ← (2) من (1) ، (2)

نجد (ر 0 ق) (1) = ر (ق(1)) ماذا حصل؟ حصل أنه مسحنا دائرة وأثرنا بالمجاور

(ق يجاور (1)) أما (ر بعيد)

∴ بشكل عام (ر 0 ق) (س) = ر (ر(س))

تركيب التطبيقات

تعريف: إذا كان ت: س ← ص ، ق: ص ← ع فإن (ق 0 ت) يُدعى تركيب التطبيقين ومعرف كما يلي: ق 0 ت: س ← ع.

قاعدة: (ق 0 ت)(س) = ق (ت(س)) ∨ س ∈ س

تحذير: التركيب غير ممكن إلا إذا كان مدى ت ⊂ مجال ق.

مثال توضيحي: ت: ح ← ح قاعدته ت (س) = س

ر: ص ← ص قاعدته ر (س) = س

المطلوب:

(1) هل التركيب ر 0 ت ممكن؟ أوجد قاعدته إن كان ممكناً.

(2) هل التركيب (ت 0 ر) ممكناً؟ أوجد قاعدته إن أمكن.

الحل:

(1) المفروض مدى ت ⊂ مجال ر هل هذا محقق هنا؟

بالحقيقة مدى ت = خ لأن ت تطبيق مطابق ... مجال ر = ص

∴ بسهولة: مدى ت ≠ مجال ر

∴ لا يمكن التركيب.

(2) ت 0 ر ممكناً إذا كان مدى ر ⊂ مجال ت. هل هذا محقق؟

بالحقيقة مدى ر = ص لأن ر تطبيق مطابق.

مجال ت = ح

∴ ص ⊂ ح

∴ مدى ر ⊂ مجال ت

∴ الحمد لله التركيب ممكن.

قاعدته: (ت 0 ر) (س) = ت(ر(س)) = ت (س) = س

أيضاً هو الآخر ت 0 ر تطبيق مطابق. مثال

$$7 = (7) (0 \text{ ر}) \quad , \quad 5 = (5) (0 \text{ ر})$$

مثال توضيحي: ليكن $1 \text{ ر} : \leftarrow \text{ح} \leftarrow \text{ح}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة.

$$1 \text{ ر} = (س) 2^{-2}$$

$2 \text{ ر} : \leftarrow \text{ح} \leftarrow \text{ح}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة.

$$2 \text{ ر} = (س) 2 +$$

- (أ) أوجد تعريفاً لكل من التطبيقين $1 \text{ ر} O_1$ ، $2 \text{ ر} O_1$ ،
 (ب) أوجد $(3) (2 \text{ ر} O_1)$ ، $(3) (1 \text{ ر} O_2)$... ماذا تستنتج؟
 (ج) أوجد $(1-) (2 \text{ ر} O_1)$ ، $(1-) (1 \text{ ر} O_2)$.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{(أ) قاعدة } (2 \text{ ر} O_1) (س) &= (س) 2 \text{ ر} = ((س) 1 \text{ ر}) 2 \text{ ر} = (س) 2^{-2} \\ &= 2 + 2^{-2} س^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{قاعدة: } (2 \text{ ر} O_1) (س) &= ((س) 2 \text{ ر}) 1 \text{ ر} = (س) 2 + \\ 2 + (س) 4 + 2 س^2 &= 2 - 4 + 4 س + 2 س^2 = 2^{-2} (2 + س) = \\ \text{(ب) وجدنا } (1 \text{ ر} O_2) (س) &= 2 س^2 \leftarrow (3) (1 \text{ ر} O_2) = 9 = 2^2 (3) \\ \text{وجدنا } (2 \text{ ر} O_1) (س) &= 2 س^2 + 4 س + 2 \\ \therefore (3) (2 \text{ ر} O_1) &= 2 + 12 + 9 = 23 \end{aligned}$$

نستنتج أن:

$$\text{تركيب التطبيقين غير إبدالي.} \quad 1 \text{ ر} O_2 \neq 2 \text{ ر} O_1$$

$$\text{(ج) } (1-) (2 \text{ ر} O_1) = (1-) 4 + 2(1-) = 2 + (1-) 4 + 2(1-) =$$

$$1- = 2 + 4 - 1 =$$

$$1 = 2(1-) = (1-) (1 \text{ ر} O_2)$$

مثال: $ر : \leftarrow \text{ح} \leftarrow \text{ح}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $ر (س) = 1 +$

(أ) هل هذا التطبيق متباين؟ هل شامل؟ هل تقابل؟

(ب) هل 1^- موجود وإذا كان موجوداً فعرف 0 ر 1^- ، ر 0^{1^-} وماذا تستنتج؟
الحل:

$$\text{أ) المتباين: الشرط } (1) \text{ ر} = (2) \text{ ر} \Leftrightarrow 1 \text{ س} = 2 \text{ س}$$

$$\text{نفرض } (1) \text{ ر} = (2) \text{ ر}$$

$$\text{ر متباين. } \Leftrightarrow 1 \text{ س} = 2 \text{ س} \Leftrightarrow 1 + 1 \text{ س} = 1 + 2 \text{ س}$$

$$\text{الغامر: } \forall \text{ ص} \in \text{ح} \exists \text{ س} \in \text{ح بحيث } (1) \text{ ر} = \text{ص}$$

$$\therefore \text{ص} = 1 + \text{س} \Leftrightarrow \text{س} = 1 - \text{ص} \in \text{ح}$$

\therefore ر غامر (شامل).

\therefore ر تقابل.

(ب) بما أن ر تقابل.

\therefore لهُ تطبيق عكسي 1^- .

لنوجد قاعدته: لقد وجدنا $\text{س} = 1 - \text{ص}$ بَدَل المتغيرات.

$$\text{ص} = 1 - \text{س} \quad \text{أي} \quad (1) \text{ ر} = (1 - \text{س})$$

$$\therefore (0 \text{ ر}^{1^-}) = (1 - \text{س}) \text{ ر} = ((1 - \text{س})^{1^-}) \text{ ر} = (1 - \text{س})$$

$$\text{س} = 1 + 1 - \text{س} =$$

\therefore تطبيق مطابق.

$$(0 \text{ ر}^{1^-}) = (1 - \text{س}) \text{ ر} = ((1 - \text{س})^{1^-}) \text{ ر} = (1 + \text{س})^{1^-} = 1 - 1 + \text{س} = \text{س}$$

\therefore تطبيق مطابق (المحايد بالتطبيقات)

إجابة تمارين ومسائل (5/2)

$$[1] \text{ لتكن } S = \{2, 4, 6\}$$

$$S = \{1, 8, 10\} \text{ ص}$$

$$S = \{11, 13\} \text{ ع}$$

ق₁، ق₂ تطبيقين معرفين على النحو التالي:

$$ق_1: S \leftarrow \text{ص بحيث } ق_1(2) = 8, \quad ق_1(4) = 10, \quad ق_1(6) = 1$$

$$ق_2: \text{ص} \leftarrow \text{ع بحيث } ق_2(1) = 11, \quad ق_2(8) = 13, \quad ق_2(10) = 11$$

المطلوب:

(أ) هل ممكن تركيب ق₂ O ق₁ أم ق₁ O ق₂ ؟

(ب) اكتب مجال ق₂ O ق₁ ثم أوجد مداه ثم ارسم مخطط سهمي.

الحل:

(أ) ق₂ O ق₁ هذا التركيب ممكن لَمَّا مدى ق₁ \supset مجال ق₂

لاحظ مدى ق₂ = $\{1, 8, 10\}$ \supset ص = مجال ق₂

∴ التركيب ممكن.

(ب) ق₁ O ق₂: فتش عن مدى ق₂ وتأكد إذا كان \supset مجال ق₁

التنفيذ: مدى ق₂ = $\{1, 13\} \not\supset$ س = مجال ق₁ التركيب غير ممكن.

مجاله المقابل ع = $\{1, 13\}$

∴ حصل كل سهمين متتالين فستجد

$$[2] \text{ لتكن } S = \{3, 5, 7, 9\}$$

ق ، ه تطبيقين من س ← س معرفين بالمخططين السهميين.

(أ) أوجد (ق₂ O ق₁) (3) ، (ه O ق) (7)

ب) ارسم مخططاً سهماً للتطبيق (ق 0 هـ)
ج) هل (هـ 0 ق) = (9) = (هـ 0 ق) (9)؟ بين رأيك.

الحل:

$$\text{أ) (هـ 0 ق) (3) = ق (هـ 3) = ق (3) = 5}$$

$$\text{هـ (0 ق) (7) = هـ (ق 7) = هـ (9) = 9}$$

ب)

1) التركيب ممكن.

2) حصل كل سهمين متتاليين لتجد قاعدة التركيب كالتالي:

$$\text{ج) (هـ 0 ق) (9) = ق (هـ 9) = ق (9) = 9}$$

$$\text{هـ (0 ق) (9) = هـ (ق 9) = هـ (9) = 9}$$

$$\text{نعم: (هـ 0 ق) (9) = (9) (ق 0 هـ)}$$

لأنه أصلاً: هـ تطبيق مطابق.

أي المحايد بالنسبة للتطبيقات.

[3] ر ، ق ، ت ثلاث تطبيقات من ح ← ح معرفة على النحو التالي:

$$\text{ر(س) = 3س ، ق (س) = س + 1 ، ت(س) = 3 + 1}$$

أوجد:

$$\text{أ) (ر 0 ق) (5)}$$

$$(ب) (ق \text{ O } ر) (3-)$$

$$(ج) (ر \text{ O } ر) (6)$$

$$(د) (ت \text{ O } ق) (2س)$$

$$(هـ) (ر \text{ O } ت) (1 + م)$$

$$(و) [ر \text{ O } ق \text{ O } ت] (2)$$

الحل:

$$18 = 6 \times 3 = (6) ر = (5+1) ر = ((5) ق) ر = (5) (ق \text{ O } ر) (أ)$$

$$8 - = 1 + 9 - = (9-) ق = (3- \times 3) ق = (3-) (ق \text{ O } ر) (ب)$$

$$54 = 18 \times 3 = (18) ر = (6 \times 3) ر = ((6) ر) ر = (6) (ر \text{ O } ر) (ج)$$

$$(د) (ت \text{ O } ق) (2س) = ت (1+س)$$

$$4 + 6س = 1 + 3 + 6س = 1 + (1+س) 3 =$$

$$(هـ) (ر \text{ O } ت) (1+ م) = (1+ م) ر = (1+ م) ر (1+ (1+ م) 3)$$

$$12 + 9م = (4+3م) 3 = (4+3م) ر = (1+3 + 3م) ر =$$

$$(و) [ر \text{ O } ق \text{ O } ت] (2) = (2) (ق \text{ O } ر) = ت (2)$$

$$(1+ 7) ر = ((7) ق) ر = (7 \times ق) ر =$$

$$24 = 8 \times 3 = (8) ر =$$

[4] إذا كان $ت_1: ط \leftarrow$ ط حيث $ت_1(س) = 2س$

$ت_2: ص \leftarrow$ ص حيث $ت_2(س) = 2س$ والمطلوب:

(أ) أوجد صورة العناصر 2، 5، س + 3 في التطبيق $ت_1 \text{ O } ت_2$ ، $ت_2 \text{ O } ت_1$.

(ب) هل تركيب $ت_1$ ، $ت_2$ غير تبديلي؟ بين رأيك.

الحل:

(أ) أولاً: $(ت_1 \text{ O } ت_2)$

$$8 = 4 \times 2 = (4) ت_1 = (2^2) ت_1 = ((2) ت_2) ت_1 = (2) (ت_1 \text{ O } ت_2) ت_1$$

$$50 = 25 \times 2 = (25)_1 \text{ ت} = ({}^2 5)_1 \text{ ت} = ((5)_2)_1 \text{ ت} = (5) \text{ (ت } O_1 \text{ ت}_2) \circ$$

$${}^2(3+س)2 = ({}^2(3+س) 2)_1 \text{ ت} = ((3+س)_2)_1 \text{ ت} = (3+س) \text{ (ت } O_1 \text{ ت}_2) \circ$$

ثانياً:

$$16 = {}^2(4) = (4)_2 \text{ ت} = (2 \times 2)_2 \text{ ت} = ((2)_1)_2 \text{ ت} = (2) \text{ (ت } O_2 \text{ ت}_1) \circ$$

$$100 = {}^2(10) = (10)_2 \text{ ت} = (5 \times 2)_2 \text{ ت} = ((5)_1)_2 \text{ ت} = (5) \text{ (ت } O_2 \text{ ت}_1) \circ$$

$${}^2(3+س)4 = ((3+س)2)_1 \text{ ت} = ((3+س)_1)_2 \text{ ت} = (3 + س) \text{ (ت } O_2 \text{ ت}_1) \circ$$

(ب) لنقض الشيء يكفي مثال. وجدنا (ت O_1 ت $_2$) = (2) = 8

$$16 = (2) \text{ (ت } O_2 \text{ ت}_1) \quad \therefore \text{ت } O_1 \text{ ت}_2 \neq \text{ت } O_2 \text{ ت}_1$$

∴ التركيب غير إبدالي.

[5] إذا كان ق: ح ← ح حيث ق (س) = 5س + 1

$$\text{ه: ح ← ح حيث ه (س) = س}^2$$

استنتج قواعد: (1) (ق ه) (س) (2) (ه ه) (ق) (س)

الحل:

$$(1) \text{ (ق } O \text{ (ق) (س) = (ق ه) (س) = ((س) ه) = (ق ه) (س) = 5(س) + 1}$$

$$5س^2 + 1 =$$

$$\# \quad (2) \text{ (ه } O \text{ (ق) (س) = (س) ه = (ق ه) (س) = ((س) ه) = (1 + 5س) = 5س + 1$$

[6] لتكن د: ح ← ح حيث د (س) = 2س + 1

$$\text{ه: ح ← ح حيث ه (س) = 5س + 7}$$

المطلوب: (أ) أوجد (ه $^{-1}$ د $^{-1}$). (ب) (ه ه) (د $^{-1}$)

الحل:

(أ) لاحظ لحساب قاعدة ه $^{-1}$ عليك حساب د $^{-1}$ ، ه $^{-1}$ أولاً.

∴ لحساب د $^{-1}$ نتبع الخطوات التالية:

نحسب س بدلالة ص ثم نبذل المتغيرات.

$$\frac{1-ص}{2} = ص \Leftrightarrow 2س = 1 - ص \Leftrightarrow 1 + 2س = ص$$

$$\frac{1-ص}{2} = (س)^{1-} \Leftrightarrow \frac{1-ص}{2} = ص$$

وبالمثل:

$$\frac{7-ص}{5} = ص \Leftrightarrow 5س = 7 - ص \Leftrightarrow 7 + 5س = ص$$

$$\frac{7-ص}{5} = (س)^{1-} \Leftrightarrow \frac{7-ص}{5} = ص$$

$$\left(\frac{1-ص}{2}\right)^{1-} = ((س)^{1-})^{1-} = (س) \quad \left(7 - \frac{1-ص}{2}\right)^{1-} = (س)$$

$$\frac{15-ص}{10} = \frac{15-ص}{2 \times 5} = \frac{14-1-ص}{5} = \frac{7 - \frac{1-ص}{2}}{5} =$$

(ب) لحساب (هـ 0 د)¹⁻

لنحسب (1) هـ 0 د. (2) نحصل على س بدلالة ص.

(3) نبذل المتغيرات.

التنفيذ:

$$(1) (هـ 0 د) (س) = هـ (د س) = هـ (1 + 2س)$$

$$12 + 10س = 7 + 5 + 10س = 7 + (1 + 2س) 5 =$$

$$(2) \frac{12-ص}{10} = ص = 10س = 12 - ص \Leftrightarrow 12 + 10س = ص$$

(3) بديل المتغيرات:

$$\# \frac{12-ص}{10} = (س)^{1-} (هـ 0 د) \Leftrightarrow \frac{12-ص}{10} = ص$$

تمارين عامة على التطبيقات

[1] أيّ المخططات السهمية الآتية تمثل تطبيقاً وبين نوعه:

الجواب: (أ) ليس تطبيق.

(ب) تطبيق متباين.

(ج) تطبيق تقابل.

[2] صل كل تطبيق من العمود (أ) بنوعه من العمود (ب) فيما يلي:

[3] الجدول التالي يمثل التطبيق ت: س ← ص

حيث س = {3، 5، 7، 9، 11}

ص = {6، 8، 10، 12، 14}

س	3	5	7	9	11
د(س)	6	8	10	12	14

(أ) أكمل:

ت (3) = 3 + الجواب: أضف 3 لتصبح ت (3) = 6

ت (5) = 5 + الجواب 3

ت (7) = 7 + الجواب 3

(ب) أوجد قاعدة هذا التطبيق:

الجواب:

من (أ) فهمت القاعدة كل عنصر يذهب إلى نفسه + 3

∴ ت(س) = س + 3

(ج) بين نوعه:

الجواب:

متباين وغامر. ∴ تقابل.

(د) أوجد ب¹(8) ، ب¹(12) ، ب¹(14)

الجواب: ب¹(8) = {5} ، ب¹(12) = {9} ، ب¹(14) = {11}

(هـ) هل معكوس التطبيق ت تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد:

الجواب: قلنا ت تقابل ∴ له تطبيق عكسي ب¹

يمكن إيجاد قاعدته بالملاحظة:

في التطبيق ت لاحظ: أضفنا 3 إلى العنصر والآن نطرح (3)

في العكس .: ب⁻¹(س) = س - 3

التحقيق: ب⁻¹(14) = 14 - 3 = 11 وهذا صحيح #

[4] ليكن التطبيق ت: س ← ص معرفاً بالقاعدة ت(س) = س + 1

حيث س = {3 ، 5 ، 7}

ص = {10 ، 12 ، 14 ، 15}

أ) عبّر عن التطبيق كأزواج مرتبة.

د) أوجد ب⁻¹(15) ، ب⁻¹(12).

ب) أوجد مدى هذا التطبيق.

هـ) هل معكوس التطبيق ت تطبيق.

ج) هل هذا التطبيق تقابل.

الحل:

أ) ت(س) = س + 7

ت(3) = 3 + 7 = 10 (3 ، 10)

ت(5) = 5 + 7 = 12 (5 ، 12)

ت(7) = 7 + 7 = 14 (7 ، 14)

.: بيان التطبيق ن = {(3 ، 10) ، (5 ، 12) ، (7 ، 14)}

ب) مدى التطبيق {10 ، 12 ، 14}

ج) كلاً: لأنه ليس غامر. لاحظ 15 ∈ ص ليست من المدى.

د) ت⁻¹(15) = φ ، ت⁻¹(12) = {5}

هـ) كلاً: لأنه 15 غير مرتبط.. لا ينعكس منه سهم.

[5] ليكن التطبيقات ت، ق معرفين كالآتي:

ت: ط ← س ، ت(س) = س + 2

ق: ط ← ط ، ق (س) = 2س
المطلوب:

(أ) ما نوع كلاً منهما. (ب) أوجد قاعدته ب⁻¹، ق⁻¹
(ج) أوجد ق (ت 0 ق) (س) ، (ق 0 ت) (س)
الحل:

(أ) بالنسبة لـ: ت
* التباين: ت(س₁) = ت(س₂) ⇔ س₁ = 2 + س₂ ⇔ س₁ - 2 = س₂ ⇔ ت متباين
* الغامر: القاعدة ص = س + 2 ⇔ س = ص - 2 ليس لها دوماً حل في ط.
بدليل: خذ ص = 1 ∈ ط ⇔ س = 1 - 2 = -1 ∉ ط ∴ ليس غامر.
بالنسبة لـ: ق

* المتباين ق(س₁) = ق(س₂) ⇔ 2س₁ = 2س₂ ⇔ س₁ = س₂ ⇔ ق متباين.
⇔ ق متباين.

* الغامر: ص = 2س ⇔ س = $\frac{ص}{2}$ ليس لها حل دوماً في ط.

بدليل لو كان ص = 1 ⇔ ط = س = $\frac{1}{2}$ ∉ ط ∴ ليس غامر.

(ب) قاعدة معكوس ت هي: س = ص - 2 ⇔ انتبه: ت⁻¹ ليس تطبيق.
قاعدة معكوس ق هي: س = $\frac{ص}{2}$ ⇔ انتبه: ق⁻¹ ليس تطبيقاً.

(ج) * (ت 0 ق) (س) = ت (ق(س)) = ت (2س)

* (ق 0 ت) (س) = ق (ت(س)) = ق (2 + س) = 2(2 + س) = 4 + 2س

[6] إذا كانت ل = {أ ، ب ، ج ، م ، 1 ، 3 ، 5} كَوْن في كل مرة تطبيقاً مجاله ل

ومجاله المقابل م بحيث يكون:

(أ) ثابتاً. (ب) متبايناً. (ج) غامراً.
(د) تقابلاً. (هـ) غير متباين. (و) غير غامر.

[7] ليكن التطبيق ت: س ← ص معرفاً بالقاعدة ت (س) = س + 2

حيث: س = {س: س ∈ ط ، 5 ≤ س ≤ 9}

ص = {ص: ص ∈ ط ، 7 ≤ ص ≤ 11}

اثبت أن ب¹⁻ تطبيق:

الجواب: س = {5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}

ص = {7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11}

$$ت (5) = 2 + 5 = 7$$

$$ت (6) = 2 + 6 = 8$$

$$ت (7) = 2 + 7 = 9$$

$$ت (8) = 2 + 8 = 10$$

$$ت (9) = 2 + 9 = 11$$

∴ ت تقابل فله تطبيق عكسي.

لإيجاد قاعدته ص = س + 2 ⇐ ص = س - 2 بديل المتغيرات.

$$ص = س - 2 ⇐ ب¹⁻(س) = س - 2$$

[8] إذا كان التطبيق ت₁: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت₁(س) = س + 1

والتطبيق ت₂: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت₂(س) = س + 2

(أ) أوجد قاعدة (ت₁ ∘ ت₂) (س) ، (ت₂ ∘ ت₁) (س) وقارن بينهما.

(ب) أوجد (ت₁ ∘ ت₂) (س) = (ت₂ ∘ ت₁) (س) = (ت₁ ∘ ت₂) (س)

الحل:

$$(أ) * (ت₁ ∘ ت₂) (س) = (ت₁ ∘ ت₂) (س) = ((ت₂ ∘ ت₁) (س)) = (ت₁ ∘ ت₂) (س)$$

$$* (ت₂ ∘ ت₁) (س) = (ت₂ ∘ ت₁) (س) = ((ت₁ ∘ ت₂) (س)) = (ت₂ ∘ ت₁) (س)$$

∴ (ت₁ ∘ ت₂) (س) ≠ (ت₂ ∘ ت₁) (س)

$$(ب) (ت₁ ∘ ت₂) (3) = (ت₂ ∘ ت₁) (3) = ((ت₂ ∘ ت₁) (3)) = (ت₁ ∘ ت₂) (3)$$

$$\# \quad 26 = 1 + {}^2(5) =$$

[9] ما نوع التطبيق ق: ط ← ط المعرف بالقاعدة ق (س) = 7

الحل:

$$7 = (1) \text{ ق} \quad , \quad 7 = (0) \text{ ق} \quad , \quad 7 = (2) \text{ ق}$$

∴ ق تطبيق ثابت.

[10] ما نوع التطبيق ت: س ← ص المعرف بالقاعدة ت (س) = س²

الحل: ∴ مجاله س ومجاله المقابل ص مجهولين لا تستطيع معرفة نوعه.

[11] ليكن التطبيق ت: ط ← ط معرّفًا بالقاعدة ت (س) = س اثبت أن التطبيق تقابل.

الحل:

المتباين: ت (س) ، ت (س) ≤ س₁ = س₂ ≤ ت متباين

الغامر: ص = س ∨ ص ∈ ط فإن س = ص ∈ ط ∴ لها حل دوماً.

∴ غامر. ∴ تقابل.

[12] إذا كان ت : س ← ح [حيث س مجموعة الأعداد الزوجية] معرّفًا بالقاعدة

$$ت (س) = س^2$$

فأوجد: (أ) ت (2) ، ت (18) ، ت (112)

(ب) ت⁻¹(25) ، ت⁻¹(34)

(ج) هل ت⁻¹ تطبيق... أوجد قاعدته إن وجد.

الحل:

$$(أ) ت (س) = س^2 \Leftarrow ت (2) = 2^2 = 4$$

$$* ت (18) = 18^2 = 324 ، * ت (112) = 112^2 = 12544$$

(ب) لنوجد س بدلالة ص.

$$التنفيذ: ص = س^2 \Leftarrow س = \pm \sqrt{ص}$$

$$\text{لإيجاد ت}^{-1}(25) \text{ ضع } \sqrt{25} = \pm 5 \Leftarrow س = \pm \sqrt{25}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow \text{س} = 5 \pm \# \text{س} \text{ : ت }^{-1} (25) = \phi \\ \text{لإيجاد ت }^{-1} (34) \text{ ضع ص} = 34 \Leftarrow \text{س} = \pm \sqrt{34} \# \text{س} \\ \text{ : ت }^{-1} (34) = \phi \\ \text{ج) لقد وجدنا ت }^{-1} (25) = \phi \\ \text{ : لا يوجد معكوس لـ} (25) \end{aligned}$$

: ت⁻¹ ليس تطبيق ولا توجد له قاعدة.

[13] ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفةً بالقاعدة ت(س) = 3س
 (أ) بيّن نوع هذا التطبيق. (ب) أوجد التطبيق العكسي له.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{(أ) المتباين: ت (س}_1) = \text{ت (س}_2) \\ \Leftarrow 3\text{س}_1 = 3\text{س}_2 \Leftarrow \text{س}_1 = \text{س}_2 \Leftarrow \text{ت متباين.} \\ * \text{ الغامر: حل المعادلة ص} = 3\text{س في ح.} \\ \text{التنفيذ: س} = \frac{\text{ص}}{3} \in \text{ح} \text{ : . ت غامر.} \\ \text{ : ت تقابل وله تطبيق عكسي.} \end{aligned}$$

(ب) أذكرك بالخطأ: هات س بدلالة ص ثمّ بَدِّل المتغيرات لحسن الحظ معنا $\frac{\text{ص}}{3}$ بَدِّل المتغيرات:

$$\text{ص} = \frac{\text{س}}{3} \Leftarrow \text{ت}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{3} \#$$

[14] هل من الممكن أن يكون التطبيق الثابت غامراً؟

الجواب: نعم ممكن عندما يكون المجال المقابل عنصر واحد.

[15] ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفةً بالقاعدة ت(س) = 3س - 3

* اثبت أن ت تقابل وأوجد قاعدة التطبيق العكسي.

$$\begin{aligned} \text{الحل: المتباين: نفرض ت (س}_1) = \text{ت (س}_2) \\ \Leftarrow 3\text{س}_1 - 3 = 3\text{س}_2 - 3 \Leftarrow 3\text{س}_1 = 3\text{س}_2 \Leftarrow \text{س}_1 = \text{س}_2 \\ \Leftarrow \text{ت متباين.} \end{aligned}$$

الغامر: هات س بدلالة ص ثمّ حاول حل المعادلة في المجال:

$$ح \in \frac{3+ص}{3} = س \Leftarrow 3س = 3+ص \Leftarrow 3-3س = 3-3س$$

∴ ت غامر ∴ ت تقابل ∴ له تطبيق عكسي.

لإيجاد قاعدة ت⁻¹: لدينا س = $\frac{3+ص}{3}$ بديل المتغيرات

$$\frac{3+س}{3} = (س)^{-1} \text{ ∴ ت } \quad \frac{3+س}{3} = ص$$

[16] ليكن ه: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ه (س) = 3س + 5

اثبت أن التطبيق ه تقابل ثم أوجد قاعدة التطبيق العكسي.

الحل:

المتباين: نفرض ه (س₁) = ه (س₂)

$$3س_1 + 5 = 3س_2 + 5 \Leftarrow 3س_1 = 3س_2 \Leftarrow س_1 = س_2$$

∴ ت متباين.

$$ح \in \frac{5-ص}{3} = س \Leftarrow 3س = 5-ص \Leftarrow 3س+ص = 5$$

للحصول على قاعدة نحصل على س بدلالة ص ثمّ نبذل المتغيرات.

$$\frac{5-ص}{3} = س \text{ انتبه: لحسن الحظ معنا س = } \frac{5-ص}{3}$$

$$\frac{5-ص}{3} = س \text{ ∴ بدل المتغيرات ص = } \frac{5-ص}{3}$$

$$\# \frac{5-ص}{3} = (س)^{-1} \text{ ∴ ه }^{-1}$$

حل اختبار الوحدة (الثانية)

[1] بيّن نوع التطبيق ت: ح ← ح والمعرفة بالقاعدة ت (س) = 2س + 5
الحل:

* المتباين: ت(س₁) = ت(س₂)

$$2س_1 + 5 = 2س_2 + 5 \Leftrightarrow 2س_1 = 2س_2 \Leftrightarrow س_1 = س_2$$

$$\Leftrightarrow س_1 = س_2 \text{ متباين.}$$

* الغامر: ص = 2س + 5 ⇔ ص - 5 = 2س ⇔ س = $\frac{ص-5}{2} \in ح$.

∴ ت غامر. ∴ ت تقابل. ∴ له تطبيق عكسي.

[2] ليكن التطبيق ه: ص ← ص معرفةً بالقاعدة:

$$ه(س) = 4س + 3$$

(أ) أوجد ه⁻¹(5) ، ه⁻¹(3-) ، ه⁻¹(-ص)

(ب) هل معكوس التطبيق ه تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد:

الحل:

$$ص = 4س + 3 \Leftrightarrow 4س = 3 - ص \Leftrightarrow س = \frac{3 - ص}{4}$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(5) \text{ ضع } ص = 5 \Leftrightarrow س = \frac{3 - 5}{4} = \frac{1}{2} \notin ص$$

$$\therefore \phi = ه^{-1}(5)$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(3-) \text{ ضع } ص = 3- \Leftrightarrow س = \frac{3 - 3-}{4} = \frac{6-}{4}$$

$$\therefore \phi = ه^{-1}(3-)$$

$$\text{لإيجاد ه}^{-1}(-ص) \text{ ضع } ص = -ص \Leftrightarrow س = \frac{3 - (-ص)}{4} = \frac{3 + ص}{4}$$

∴ ه⁻¹(-ص) غير معرف أكانت موجودة أم لا. لأن ص مجهول ولا نستطيع أن نقرر.

(ب) ∴ ه⁻¹(5) = ϕ ∴ ليس له تطبيق عكسي.

[3] إذا كان التطبيق ق: ح ← ح والمعرف بالقاعدة: ق (س) = س + 1

والتطبيق ت: ح ← ح والمعرف بالقاعدة ت: (س) = 3س + 4

أ) هل (ق 0 ت) (س) = (ت 0 ق) (س) ؟

ب) أوجد (ت 0 ق) (3)

الحل:

أ) (ق 0 ت) (س) = (س) ق (ت (س)) = ق (3س + 4)

$$3س + 4 = 1 + 4 + 3س = 5$$

* (ت 0 ق) (س) = (س) ت (ق (س)) = ت (س + 1)

$$3 = 4 + (س + 1) 3 = 7 + 3س$$

∴ (ق 0 ت) (س) ≠ (ت 0 ق) (س)

ب) (ت 0 ق) (3) = (3) ت (ق (3)) = ت (3 + 1) = ت (4)

$$3 = 4 + 4 \times 3 = 16$$

[4] ليكن ت: س ← ص تطبيقاً موضحاً بالمخطط السهمي:

أوجد:

أ) ت⁻¹(4) ، ت⁻¹(64)

ب) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة.

ج) هل معكوس التطبيق تطبيق؟ ولماذا؟

الحل:

أ) ت⁻¹(4) = {2 ، 4}

ب) ت⁻¹(64) = { } = φ

∴ ليس له تطبيق عكسي.

ج) ∴ ت⁻¹(64) = φ