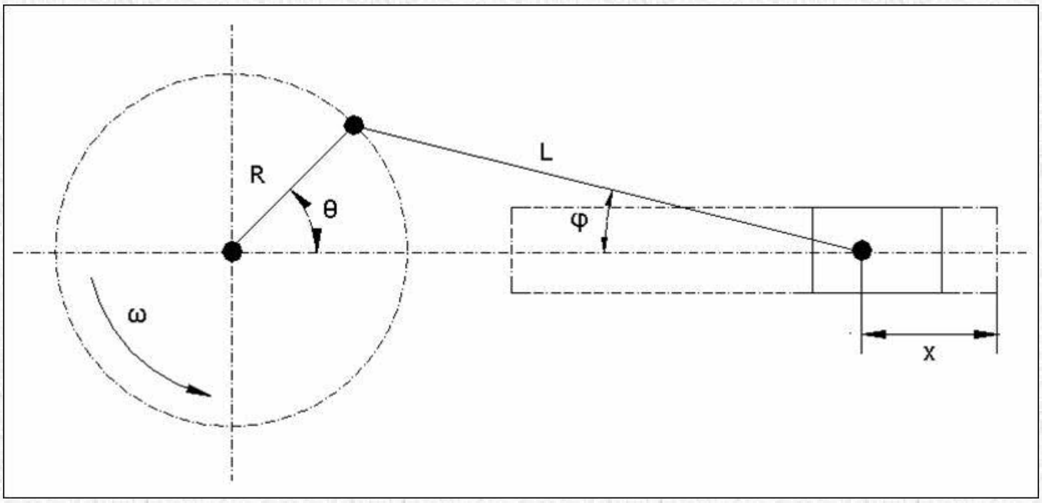
Υδραυλική
Παλινδρομικές Αντλίες – Μαθηματική Ανάλυση

Σκοπός της μαθηματικής ανάλυσης των παλινδρομικών αντλιών είναι να προσδιοριστούν οι μαθηματικές σχέσεις ***μετάδοσης ορμής*** και ***ισχύος*** από την αντλία στο υγρό. Οι σχέσεις αυτές συνδέουν τα ρεολογικά και θερμοδυναμικά χαρακτηριστικά του υγρού με τα χαρακτηριστικά μιας αντλίας.

Η γενική μορφή των σχέσεων αυτών μπορούν να «προβλεφθούν» με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, αλλά εδώ θα εφαρμόσουμε τις αρχές και του νόμους της φυσικής για την εξαγωγή τους.

Θεωρούμε ότι το έμβολο της παλινδρομικής αντλίας είναι συνδεδεμένο με μια ράβδο σύνδεσης – διωστήρας / μπιέλα – μήκους L , μ' έναν έκκεντρο άξονα – στρόφαλο – έκκεντρης ακτίνας R .



Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, καθώς περιστρέφεται ο στρόφαλος, η ***αξονική μετατόπιση*** του εμβόλου x_p είναι:

$$x_p = R\cos\theta + L\cos\varphi - R - L$$

Το πυθαγόρειο θεώρημα δίνει:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\phi}$$

Οπότε:

$$x_p = R\cos\theta + L\sqrt{1-\sin^2\varphi} - R - L$$

Ο νόμος των ημιτόνων δίνει:

$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{L}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{R}{L}\sin\theta$$

και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση παίρνουμε για την ***αξονική μετατόπιση*** του εμβόλου x_p:

$$x_p = R\cos\omega t + L\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t} - R - L$$

Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του στροφάλου, τότε:

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}$$

όπου *N* είναι ο αριθμός στροφών του στροφάλου ανά *min*.

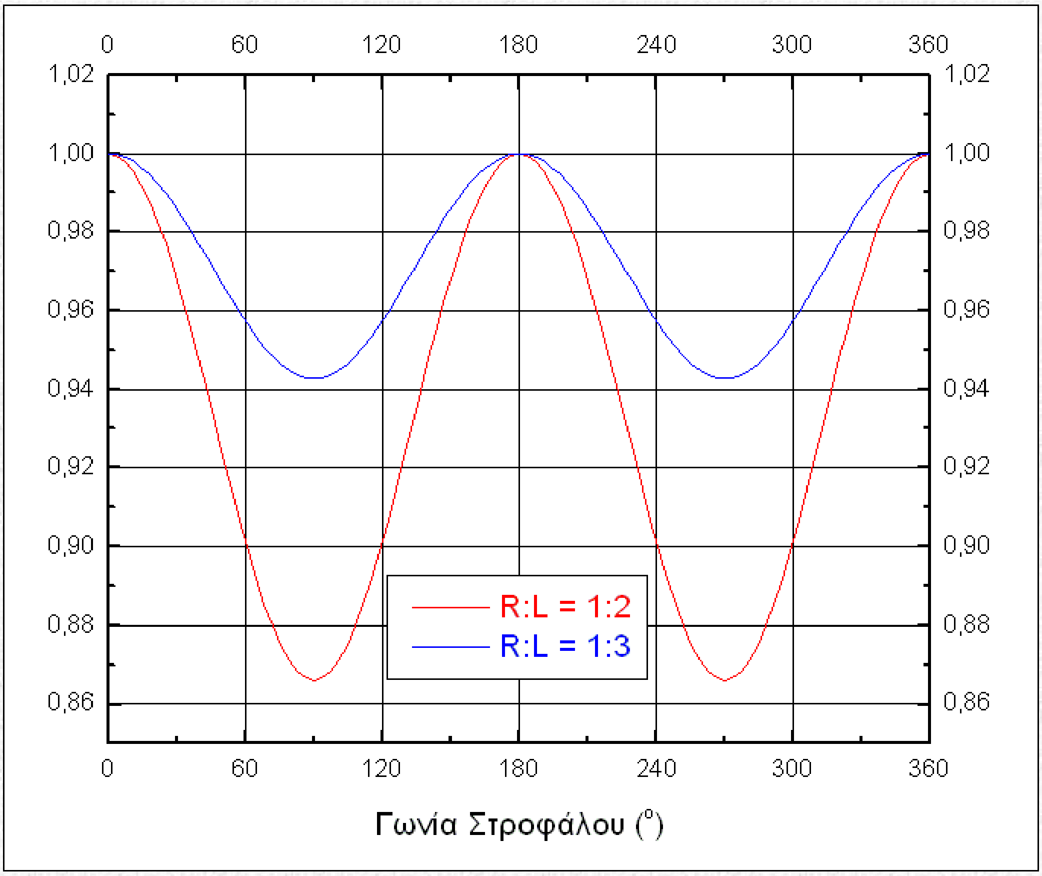
Η ***αξονική ταχύτητα*** του εμβόλου u_pείναι:

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = -R\omega \sin \omega t - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L}\omega\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t}} = -R\omega\left(\sin \omega t + \frac{R}{2L}\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t}}\right)$$

Τυπικές τιμές του λόγου *R /L* είναι 1:2 ή 1:3 και οι τιμές του παρονομαστή:

$$\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t} \approx 1 \qquad \frac{R}{L} << 1$$

είναι «κοντά» στη μονάδα, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα.



Δηλαδή

$$\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t} \approx 1 \qquad \frac{R}{L} << 1$$

Συνεπώς η προσεγγιστική ***αξονική ταχύτητα*** του εμβόλου u_p γίνεται:

$$u_{p,approx} = \frac{dx_p}{dt} = -R\omega\left(\sin \omega t + \frac{R}{2L}\sin 2\omega t\right)$$

ή

$$u_{p,approx} = \frac{dx_p}{dt} = -\frac{\pi N R}{30}\left(\sin\left(\frac{\pi N}{30}t\right) + \left(\frac{R}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi N}{15}t\right)\right)$$

Η (ακριβής) ***αξονική επιτάχυνση*** του εμβόλου a_p είναι:

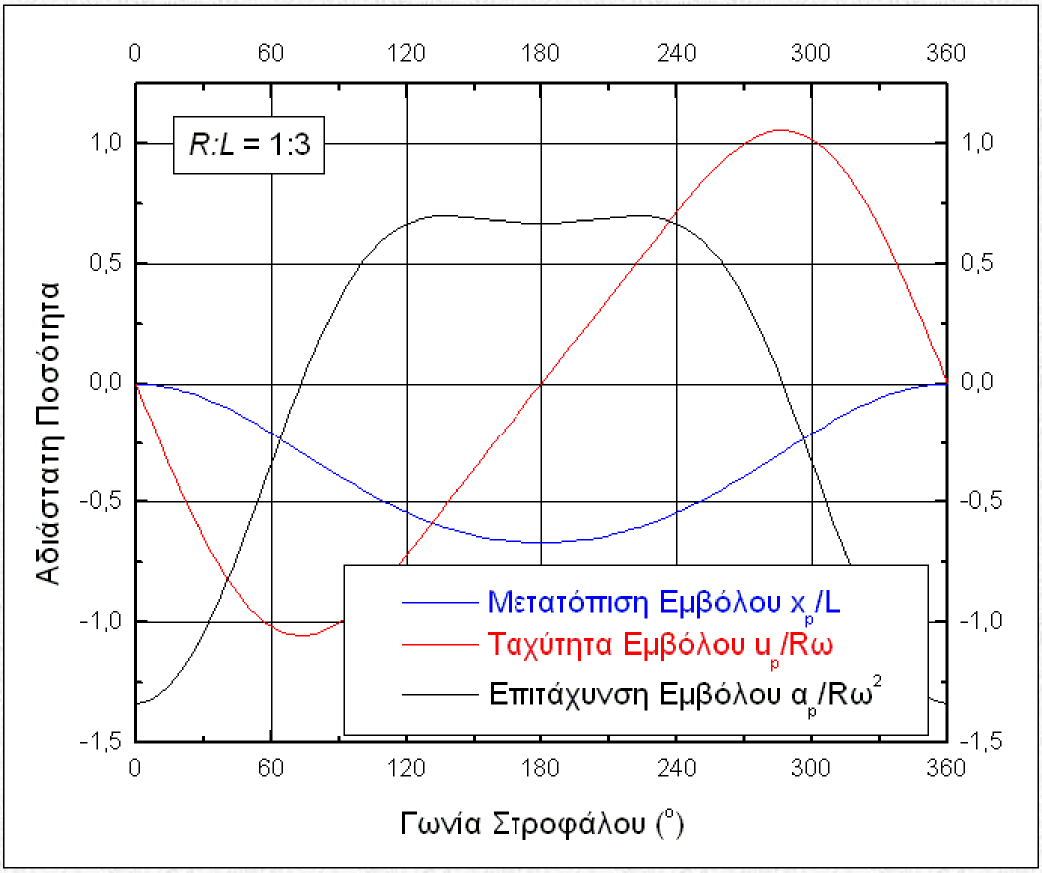
$$\alpha_p = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = -R\omega^2 \cos \omega t - \frac{R^2}{2L}\omega^2\left[\frac{2\cos 2\omega t}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 2\omega t}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t}\right)^3}\right]$$

Παρόμοια, αμελούμε τους παρονομαστές καθόσον είναι πολύ κοντά στη μονάδα, όπως και τη συμβολή του τελευταίου όρου της παραπάνω εξίσωσης.

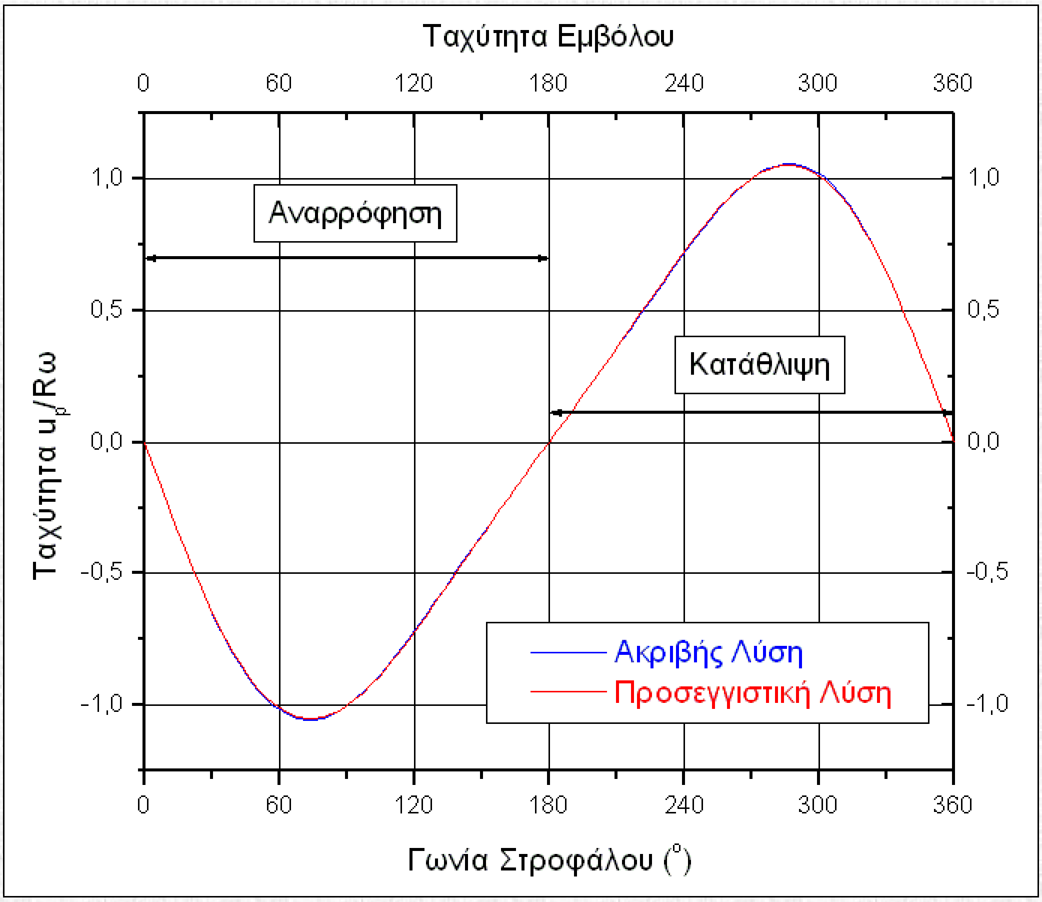
Συνεπώς η προσεγγιστική ***αξονική επιτάχυνση*** του εμβόλου a_p γίνεται:

$$a_{p,approx} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = -R\omega^2 \cos\omega t - \frac{R^2}{L}\omega^2 \cos 2\omega t = -R\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{R}{L}\cos 2\omega t\right)$$

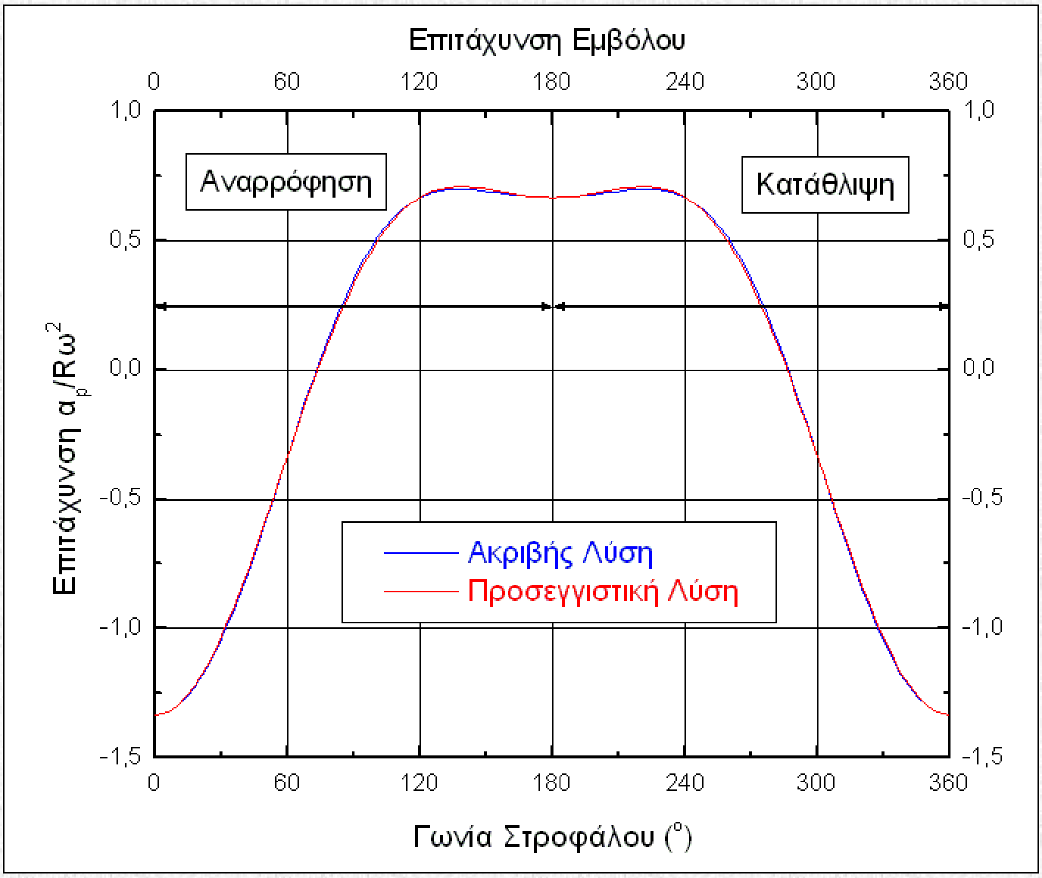
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του εμβόλου για λόγο *R:L = 1:3*.



Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ***ακριβής*** και η ***προσεγγιστική*** λύση της ***αξονικής ταχύτητας*** του εμβόλου για *R:L = 1:3*.



Ενώ το παρακάτω σχήμα φαίνεται η ***ακριβής*** και η ***προσεγγιστική*** λύση της ***αξονικής επιτάχυνσης*** του εμβόλου για *R:L = 1:3* .



Είναι προφανές ότι οι προσεγγιστικές λύσεις αποτελούν πολύ ικανοποιητικές λύσεις τόσο για την αξονική ταχύτητα, όσο και για την επιτάχυνση του εμβόλου, εφόσον ο λόγος *R:L* είναι «μικρός».

Μέγιστη αξονική ταχύτητα του εμβόλου

Η ***μέγιστη*** αξονική ταχύτητα του εμβόλου γίνεται σε χρόνους *t**:

$$\frac{du_p}{dt} = \alpha_p = 0$$

ή

$$\alpha_p = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = -R\omega^2 \cos\omega t^* - \frac{R^2}{2L}\omega^2 \left[\frac{2\cos 2\omega t^*}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t^*}} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 2\omega t^*}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t^*}\right)^3} \right] = 0$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται με αριθμητική μέθοδο όπως και η επίλυση της προσεγγιστικής σχέσης για την επιτάχυνση και συγκρίνεται με τους χρόνους *t**:

$$\cos\omega t^* = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

ή

$$\sin\omega t^* = \frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

Ο παραπάνω χρόνος *t** αντιστοιχεί στη θέση της διάταξης «στρόφαλος – μπιέλα», όπου στρόφαλος και μπιέλα σχηματίζουν ορθή γωνία (90^{o}) μεταξύ τους.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι χρόνοι ή οι γωνίες στροφάλου όπου η επιτάχυνση του εμβόλου είναι **μηδενική** και κατά συνέπεια η ταχύτητά του **μέγιστη**.

Πίνακας
Θέση Στροφάλου για Μέγιστη Ταχύτητα Εμβόλου

	Ορθή Γωνία Στροφάλου-Μπιέλας, $\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}$	Ακριβής Λύση	Προσεγγιστική Λύση

R:L = 1:3

Γωνία Στροφάλου (^{o})	71,57	73,17	73,69

R:L = 1:2

Γωνία Στροφάλου (^{o})	63,44	67,7	68,53

R:L = 1:6

Γωνία Στροφάλου (^{o})	80,54	80,78	80,89

Είναι προφανές ότι όσο ελαττώνεται ο λόγος *R:L*, η προσεγγιστική λύση τείνει στην ακριβή λύση όπως αναμένεται. Ταυτόχρονα και ο χρόνος ορθής γωνίας στροφάλου – μπιέλας t^*δίνει μια ικανοποιητική θέση **μέγιστης** αξονικής *ταχύτητας* εμβόλου. Η διασπορά των τιμών οφείλεται στη σημαντικότητα των αρμονικών συχνοτήτων ανωτέρας τάξης, καθώς ο λόγος *R:L* αυξάνεται.

Εδώ, θα δεχτούμε ότι η θέση της μέγιστης ταχύτητας του εμβόλου μπορεί να αποδοθεί από τον χρόνο ορθής γωνίας στροφάλου – μπιέλας t^*.

Τότε, η ***μέγιστη*** – κατ' απόλυτο – τιμή της αξονικής ταχύτητας είναι:

$$u_{p,\max} = \left(\frac{dx_p}{dt}\right)_{\max} = R\omega\left(\sin\omega t^* + \frac{R}{2L}\frac{\sin 2\omega t^*}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2\omega t^*}}\right) = R\omega\left(\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}} + \frac{R}{L}\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}\right)$$

ή

$$\boxed{u_{p,\max} = \left(\frac{dx_p}{dt}\right)_{\max} = R\omega\sqrt{1+\left(\frac{R}{L}\right)^2} = R\left(\frac{\pi N}{30}\right)\sqrt{1+\left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

Μέγιστη αξονική επιτάχυνση του εμβόλου

Η ***μέγιστη*** αξονική επιτάχυνση του εμβόλου γίνεται σε χρόνους t_*:

$$\omega t_* = 0$$

και η ***μέγιστη*** – κατ' απόλυτο – τιμή της επιτάχυνσης είναι:

$$\boxed{a_{p,\max} = \left(\frac{d^2x_p}{dt^2}\right)_{\max} = R\omega^2\left(1+\frac{R}{L}\right) = R\left(\frac{\pi N}{30}\right)^2\left(1+\frac{R}{L}\right)}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το έμβολο έχει μια μέγιστη αρνητική επιτάχυνση στην αρχή του κύκλου αναρρόφησης και μια μέγιστη θετική επιτάχυνση προς στο τέλος του κύκλου αναρρόφησης της αντλίας πριν ξεκινήσει ο κύκλος της κατάθλιψης. Το απόλυτο ακρότατο της επιτάχυνσης του εμβόλου είναι αυτό που δεχθήκαμε παραπάνω.

Δύναμη που εξασκείται το έμβολο

Η ***μέγιστη*** δύναμη που απαιτείται για να επιταχυνθεί η μάζα του υγρού στη *γραμμή αναρρόφησης*, εφόσον το υγρό παρακολουθεί τη κίνηση του εμβόλου, από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα, είναι:

$$F_{max} = M\left(\frac{d^2 x_f}{dt^2}\right)_{max} = \left(P_1 - P_2\right)_{max} S_p$$

όπου M η μάζα του υγρού στο σωλήνα αναρρόφησης, P_1 η πίεση στην είσοδο του σωλήνα αναρρόφησης, P_2 η πίεση στη βαλβίδα αναρρόφησης της αντλίας, S_p η διατομή του σωλήνα αναρρόφησης και x_f η μετατόπιση του υγρού στο σωλήνα αναρρόφησης.

Είναι όμως:

$$M = S_p L_p \rho$$

όπου L_p το συνολικό μήκος του σωλήνα αναρρόφησης και ρ η πυκνότητα του υγρού.

Η κίνηση του υγρού στην αντλία ακολουθεί την κίνηση του εμβόλου και για ***ασυμπίεστο*** υγρό η *ταχύτητά* του $\boldsymbol{u_f}$ είναι:

$$u_f = u_p \frac{S_c}{S_p} = u_p \left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2 = \frac{dx_p}{dt}\left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2 \qquad \text{Εξίσωση Συνέχειας}$$

όπου D_c διάμετρος του κυλίνδρου του εμβόλου και D_p η διάμετρος του αγωγού αναρρόφησης.

ομοίως για την *επιτάχυνση του υγρού* $\boldsymbol{\alpha_f}$ στον αγωγό αναρρόφησης:

$$\alpha_f = \alpha_p \frac{S_c}{S_p} = \alpha_p \left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2 = \frac{d^2 x_p}{dt^2}\left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2$$

Συνεπώς:

$$(P_1 - P_2)_{\max} = \frac{M}{S_p}\left(\frac{d^2 x_f}{dt^2}\right)_{\max} = \rho L_p \left(\frac{d^2 x_f}{dt^2}\right)_{\max} = \rho L_p \left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2 \left(\frac{d^2 x_p}{dt^2}\right)_{\max}$$

ή

$$\Delta P_{inertia,\max} = (P_1 - P_2)_{\max} = \rho L_p \left(\frac{D_c}{D_p}\right)^2 \left(\frac{d^2 x_p}{dt^2}\right)_{\max} = \rho L_p \left(\frac{u_f}{u_p}\right)_{\max} \left(\frac{d^2 x_p}{dt^2}\right)_{\max} =$$

$$= \rho L_p (u_f)_{\max} \frac{1}{\left(\frac{dx_p}{dt}\right)_{\max}} \left(\frac{d^2 x_p}{dt^2}\right)_{\max}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τη μέγιστη ταχύτητα και επιτάχυνση του εμβόλου και κατά συνέπεια του υγρού, είναι:

$$\Delta P_{inertia,\max} = (P_1 - P_2)_{\max} = \rho L_p (u_f)_{\max} \frac{R\omega^2\left(1 + \frac{R}{L}\right)}{R\omega\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

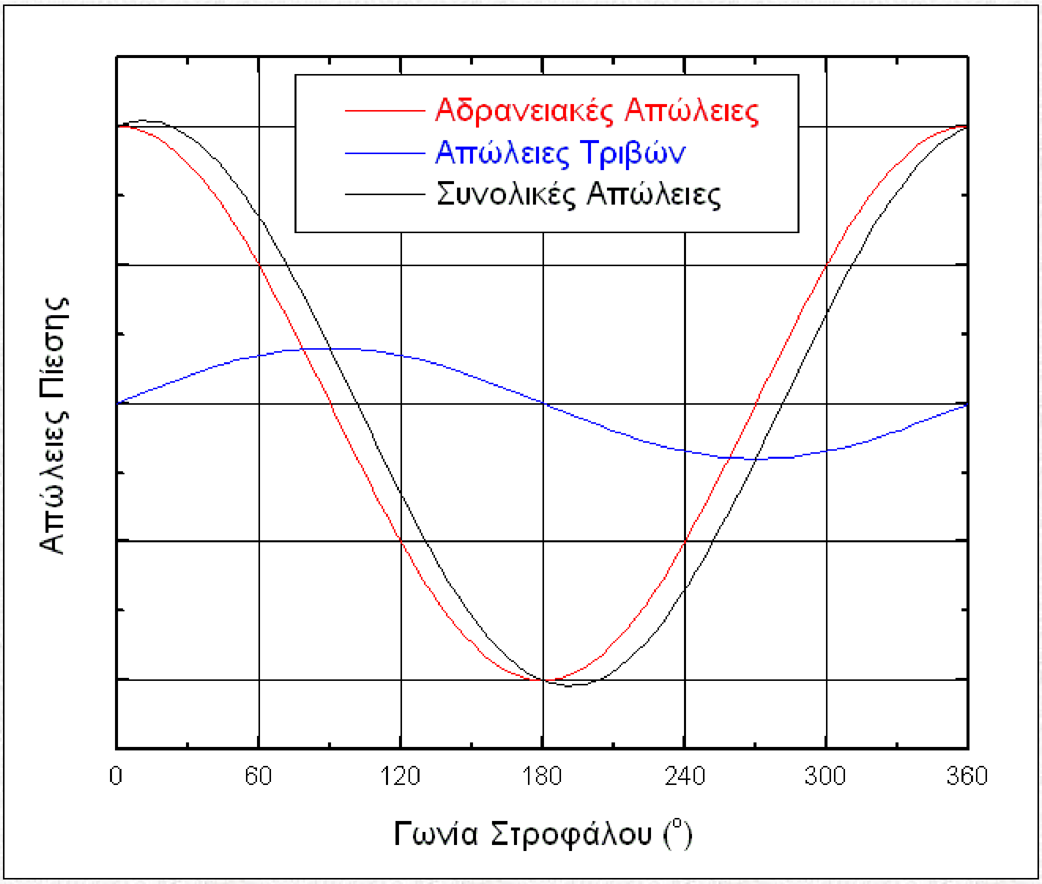
ή

$$\Delta P_{inertia,\max} = (P_1 - P_2)_{\max} = \rho L_p (u_f)_{\max} \left(\frac{\pi N}{30}\right) \frac{\left(1 + \frac{R}{L}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

Μέγιστη συνολική απώλεια πίεσης

Οι συνολικές απώλειες πίεσης P_t είναι:

$$P_t = P_{inertial} \cos \omega t + P_{frictional} \sin \omega t$$



Για μέγιστη συνολική απώλεια πίεσης, πρέπει:

$$\frac{dP_t}{dt} = 0$$

ή

$$0 = -P_{inertial}\,\omega \sin \omega t^* + P_{frictional}\,\omega \cos \omega t^*$$

ή

$$0 = -P_{inertial}\sqrt{1 - \cos^2 \omega t^*} + P_{frictional} \cos \omega t^*$$

ή

$$\cos \omega t^* = \frac{P_{inertial}}{\sqrt{P_{inertial}^2 + P_{frictional}^2}}$$

Και από την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\sin \omega t^* = \frac{P_{frictional}}{\sqrt{P_{inertial}^2 + P_{frictional}^2}}$$

Άρα η συνολική απώλεια πίεσης P_t έχει μέγιστη τιμή:

$$P_{t,\max} = P_{inertial}\cos\omega t^* + P_{frictional}\sin\omega t^*$$

ή

$$P_{t,\max} = P_{inertial}\frac{P_{inertial}}{\sqrt{P_{inertial}^2 + P_{frictional}^2}} + P_{frictional}\frac{P_{frictional}}{\sqrt{P_{inertial}^2 + P_{frictional}^2}}$$

ή

$$\boxed{P_{t,\max} = \sqrt{P_{inertial}^2 + P_{frictional}^2}}$$

Σόλων Ζαρκανίτης
Σπάτα 16/2/2010

Ερρέτω ες κόρακας