ثـابت أويـلر e – e Euler's Constant

د. الهاشمي علي أدراه*

مدخل:

من خلال الدراسة التاريخية نجد أن العدد الطبيعي e ربما كان اكتشافه مجرد صدفة نتيجة ظهوره بشكل واضح في كثير من التطبيقات التي أجريت من قبل بعض المتخصصين، ولكن بعد ذلك لعب هذا العدد دورا أساسيا في كثير من التطبيقات في جل فروع العلوم، ويعتبر العدد الطبيعي e له أهمية خاصة في العلوم الرياضية والتي بدورها تدخل في كثير من التطبيقات في كل فروع العلوم. سنهتم في هذه الورقة بدراسة العدد الطبيعي e من حيث اكتشافه وبعض استخداماته الهامة في كثير من العلوم. ومن خلال هذا العدد نتجت ما يعرف بالدالة الآسية e^x التي أهميتها ليست أقل من أهمية العدد e نفسه، حيث تعتبر هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمة $\ln x$ وهو اللوغاريتم الطبيعي للأساس e. ونبين أقرب دالة أسية للدالة e^x وكذلك مدى انفراج وانحسار هذه الدالة كما سلطنا الضوء على بعض التطبيقات لهذه الدالة.

المقدمة:

e عدد حقيقي كثير الاستخدام رياضيا، حيث يظهر في كثير من المسائل الرياضية المستخدمة في عدة فروع من العلوم المختلفة؛ الفيزياء، الكيمياء، الإحصاء؛ الهندسة وغيرها. فعلى سبيل المثال في المسائل المتعلقة بالنمو والانحلال في الإحصاء والكيمياء وغيرها، وتسمى أحيانا بالمنحنى ألجرسي (*Bell Curve*)، كذلك منحنى الأسلاك المتدلية في بعض المسائل المتعلقة بالاحتمالات، كما أن لها علاقة بالدوال اللوغاريتمية، وتظهر كذلك في الأعداد المركبة (*Euler's Equation*).[1] وقيمتها التقريبية 2.718281828459، وسبق أن حسبت إلى 869,894,101 خانة من قبل

---

* كلية العلوم ـ الجامعة الأسمرية ـ زليتن ـ ليبيا

Sebastian Wedeniwsk. الجدول (1) يبين مجموعة من الخانات، على سبيل المثال، للعدد e والذي أعد من قبل *Xavier Gourdon* و *Pascal Sabah* [(2)].

أول من اكتشف العدد e العالم الرياضي السويسري *Leonhard Euler* في القرن الثامن عشر مع العلم أن وجوده كان قد طبق في أعمال *John Napier* قبل ذلك واستخدم e كمعكوس للوغاريتم في سنة 1614، ولكنه لم يعره أي خصوصية. وأول من استخدم الحرف e بشكل خاص هو العالم *Euler* حيث هو أول حرف من اسمه العائلي ولذلك يطلق عليه في بعض الأحيان برقم أويلر أو ثابت أويلر [(3)].

1. تعرف:

العدد e هو عدد حقيقي له عدة استخدامات في كافة المجالات العلمية، ويعرف رياضيا بعدة طرائق من أهمها النهايتين التاليتين:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}, \qquad (1)$$

$$e = \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}, \qquad (2)$$

والتي تعطينا قيمة e كما هو مبين في الجدولين التاليين:

N	10	100	1000	10000
	2.59374246	2.704813829	2.716923932	2.718145927

جدول (1) يبين قيمة e محسوبة بالنهاية المبينة في المعادلة (1)

N	e	N	e
-0.1	2.867971991	0.1	2.59374746
-0.01	2.731999026	0.01	2.704813891
-0.001	2.719642216	0.001	2.716923932
-0.0001	2.718417755	0.0001	2.718145927
-0.00001	2.71829542	0.00001	2.718268237

جدول (2) يبين قيمة e محسوبة بالنهاية المبينة في المعادلة (2)

والطريقة المثلى لحساب e ليس استخدام التعريف السابق ولكن يتم حسابها من المجموع اللانهائي لمتسلسلة ماكلورين(4):

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

وذلك بوضع $x = 1$:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \qquad (3)$$

وإذا أردنا حساب عدد من الخانات وليكن k فعلينا حساب $k+3$ من الخانات ثم الجمع والبقية تساوي أصفارا. استخدمت عدة طرق لحساب e، إحداها التي استخدمت في المثال السابق.

لقد برهن *Euler* أن e عدد غير قياسي، وبالتالي قيمة الكسر غير منتهية وغير مكررة، وبالتالي ليس من المهم حساب عدد الخانات لإيجاد قيمة e ولكن يعتمد عدد الخانات التي تعطي الدقة المطلوبة. كما أن e يعرف على أنه عدد غير جبري حيث إنه لا يمثل جذرا لأي معادلة كثيرة حدود وهي مثبتة من قبل العالم الفرنسي *Charles Hermite* سنة 1873.

2. علاقة العدد e باللوغاريتمات:

e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، حيث نعلم أن اللوغاريتم يعرف على النحو التالي:

إذا كانت $a > 0$ عدد حقيقي، فإن a^u تكون معرفة لأي عدد حقيقي u، وبالتالي فإن:

$u = \log_a x$ إذا كان وفقط إذا كان $a^u = x$.

ويسمى هذا اللوغاريتم باللوغاريتم الطبيعي إذا كان الأساس (a) لهذه القيمة هي الثابت e . وبناء على ذلك فإن اللوغاريتم الطبيعي يعرف بالصيغة:

$$\ln(x) = \log_e(x),$$

من خواص اللوغاريتم الطبيعي[5]:

إذا كانت $p > 0, q > 0$ فإن:

1- $\ln pq = \ln p + \ln q$.

2- $\ln \frac{p}{q} = \ln p - \ln q$.

3- $\ln p^r = r \ln p$، لأي عدد حقيقي r.

تعريف:

$\ln e = 1$.

كما أن e هي حل للمعادلة: $\ln x - 1 = 0$.

1/0!	=1/1	= 1.000000000000000000000000
1/1!	=1/1	= 1.000000000000000000000000
1/2!	=1/2	= 0.500000000000000000000000
1/3!	=1/6	= 0.166666666666666666666667
1/3!	=1/24	= 0.041666666666666666666667
1/5!	=1/120	= 0.008333333333333333333333
1/6!	=1/720	= 0.001388888888888888888889
1/7!	=1/5040	= 0.000198412698412698412698
1/8!	=1/40320	= 0.000024801587301587301587
1/9!	=1/362880	= 0.000002755731922398589065
1/10!	=1/3628800	= 0.000000275573192239858907
e		= 2.718281801

جدول (1) يبين e بحساب عشرة حدود من المتسلسلة (3).

ومن ضمن تعريفات اللوغاريتم الطبيعي الصيغة:

$$\ln(x) = lim_{k\to 0}\left(\frac{x^k - 1}{k}\right).$$

3. الدالة الأسية e^x:

الدالـة e^x تعتبـر مـن الـدوال الهامـة المسـتخدمة فـي كثيـر مـن العلـوم المختلفـة حيث تستخدم بصور مختلفة.

عنـد دراسـة الدالـة e^x نجـد أن بيانهـا موضـحا شـكل1 ، وتعتبـر هـي الدالـة العكسية للدالة اللوغاريتمية.

بدراسـة الدالـة $f(x) = \ln x$، حيـث $x > 0$، فإن $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} > 0$ والدالـة $f(x)$ دالة متصلة وأحادية وبالتالي يوجد لها دالة عكسية $f^{-1}(\mathrm{x})$.

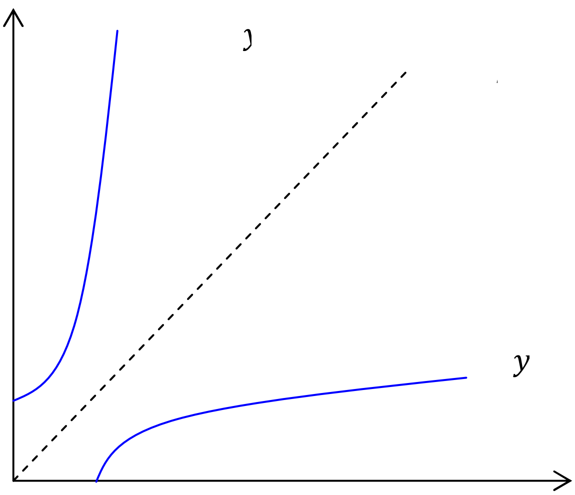
$$\ln(e^x) = x \ln e = x$$

ومن ذلك فإن: $f^{-1}(x) = e^x$

أي أنه إذا كانت $y = e^x$

فإن: $\ln(e^y) = \ln(e^{\ln x}) = \ln x$.

شكل1 يوضح الدالة e^x كمعكوس للدالة $\ln x$ وعلاقتهما بالدالة $y = x$ التي تعتبر المحور العاكس لهما.



شكل 1 بيان الدوال: $y = \mathrm{e}^x$، $y = \ln x$، $y = x$، لقيم $x \geq 0$.

إن انفراج الدالة e^{x} يتوقف على قيمة x كما هو موضح شكل 2.

إذا قورنت الدالـة e^{x} مـع بعض الـدوال الآسية فنجد أن أقرب دالـة آسية لهذه الدالة، على الأقل لقيم x القريبة من الصفر هي الدالـة $y \cong 2^{1.44x}$، شكل 3 يوضح ذلك، ويمكن استنتاج ذلك من أساسيات الرياضيات، حيث نعلم أن:

صحيحة لسبع خانات بعد الفاصلة، بوضع هذا الرقم على صورة 2 مرفوعة لقوة a ، أي أن:

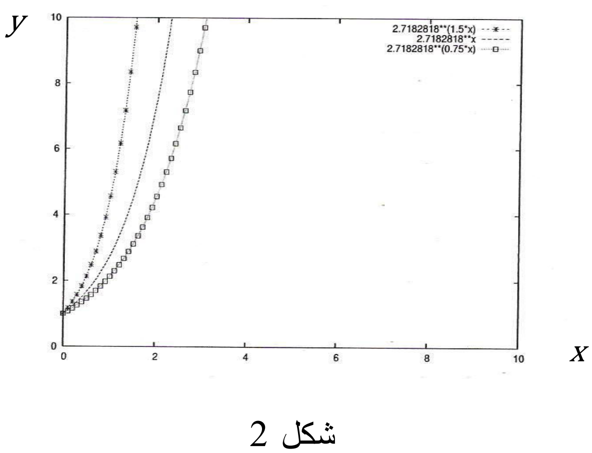
$$2.7182818 = 2^{a}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، وإيجاد قيمة a نحصل على:

$$\ln(2.7182818) = a \ln 2,$$

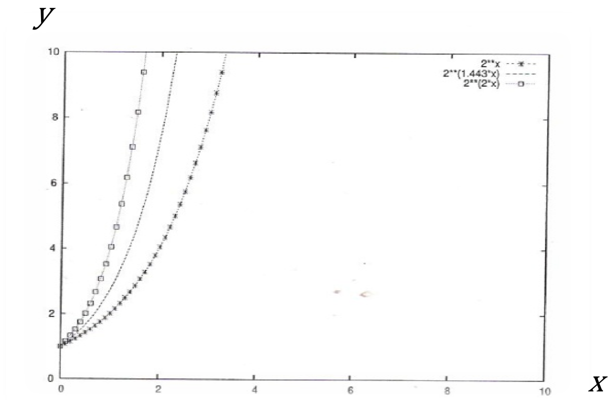
ومن ذلك نحصل على: $a \cong 1.44$

أي أن: $e^{x} = (2.7182818)^{x} \cong 2^{1.44x}$.



شكل 2

انفراج وانحسار المنحنيات $e^{1.5x}$ (منحنى النجمة)، e^{x} (المنحنى المتقطع)، $e^{0.75x}$ (منحنى المربعات).



شكل 3

انفراج وانحسار المنحنيات 2^x (منحنى النجمة)، $2^{1.443x}$ (المنحنى المتقطع)، 2^{2x} (منحنى المربعات).

3.1 مشتقة الدالة الأسية e^x:

إن عمليـة اشـتقاق الدالـة e^x تعتبـر مـن أبسـط الإشـتقاقات حيـث إذا كانـت: $y = e^x$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

حيث إذا كانت $y = e^x$، فإن:

$$\ln y = x \ln e = x,$$

بالاشتقاق بالنسبة للمتغير x، فإن:

$$\frac{dy}{y} = dx = e^x.$$

$$\frac{dy}{e^x} = dx \ln e,$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

وعملية التكامل، كما نعلم، هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق، أي أن:

$$\int e^x \, dx = e^x + c.$$

حيث c ثابت التكامل.

4. بعض التطبيقات المستخدمة للدالة e^x:

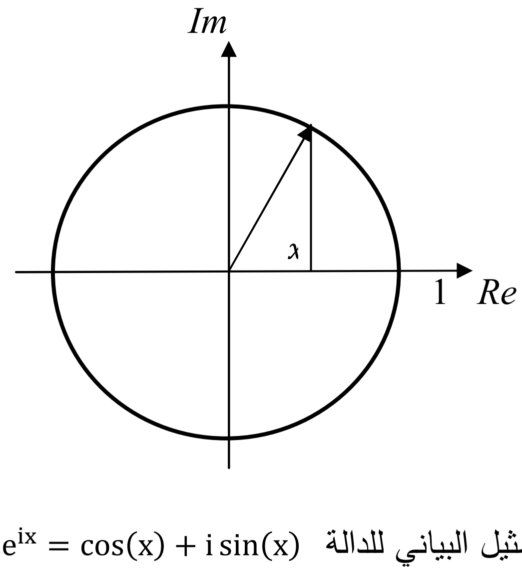
تستخدم الدالـة e^x فـي كثيـر مـن التطبيقـات العلميـة وفـي تعريـف الكثيـر مـن الدوال المختلفة فمثلا تستخدم الدالة e^x في حلول بعض المعادلات التفاضلية وخاصة المعـادلات التفاضـلية مـن الرتبـة الثانيـة أو أكبـر [6]. وتسـتخدم فـي تعريـف الـدوال الزائديـة[7]؛ حيث دالتي الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي تعرفان على النحو:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

4.1 صيغة أويلر:

مـن ضـمن اسـتخدام الثابـت e هـو مـا اكتشـفه العـالم السويسـري *Euler* عـام 1748 حيث صاغ التركيبة التالية:

وتسـمى بمعادلـة *Euler*، حيـث x عـدد حقيقـي وهـي مقاسـة بالتقـدير الـدائري، حيث $i = \sqrt{-1}$.([8])



التمثيل البياني للدالة $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

برهـان هـذه النظريـة يمكـن تناولـه علـى أكثـر مـن نمـط؛ سنسـتخدم متسلسـلة ماكلورين على سبيل المثال:

$$(1)\ e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{4}}{4!}\ldots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\frac{z^{6}}{6!}+\cdots,\qquad (2)$$

$$\sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\frac{z^{7}}{7!}+\cdots,\qquad (3)$$

وهـذه المتسلسـلات متحققـة لكـل قـيم z الحقيقيـة. وباسـتبدال $z=ix$، حيـث $i=\sqrt{-1}$، مع ملاحظة حقيقة أن:

$$i^{2}=-1,\ i^{3}=-i,\ i^{4}=1,$$

$$e^{ix}=1+(ix)+\frac{(ix)^{2}}{2!}+\frac{(ix)^{3}}{3!}+\frac{(ix)^{4}}{4!}\ldots,$$

$$e^{ix}=1+(ix)-\frac{x^{2}}{2!}-i\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}\ldots,$$

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots\right)+i(x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots),$$

بالمقارنة بالمتسلسلتين (2) و (3) نجد أن:

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x).$$

ومن نتائج معادلة أويلر العلاقة التالية التي تربط بين خمس قيم حقيقية التي تعتبر من الأهمية بمكان في علم الرياضيات؛ وهي:

$$e,\ \pi,\ i,\ 0,\ 1,$$

حيث:

$$e^{\pi i}=-1,\ \Rightarrow\ e^{\pi i}+1=0$$

4.2 قانون التغير الأسي:

يعرف هذا القانون بالمعادلة:

$$\frac{dy}{dx}=ky,\qquad (1)$$

حيث y المتغير المراد حساب تغيره عبر فترة من الزمن t، k ثابت[9].ومن المعادلة (1) فإن:

$$\frac{dy}{y}=kdt,$$

$$\ln y=kt+c,$$

$$y = Ae^{kt}.$$

ويستخدم هذا القانون في حساب النمو والانحلال في كثير من التطبيقات الكيميائية والحيوية وغيرها المتضمنة القيمة e، حيث إذا كانت y موجبة وتزايدية فإن k موجبة، فنعبر بالمعادلة (1) عن نسبة النمو. وإذا كانت y موجبة ولكن تناقصية فإن k سالبة، فتكون المعادلة (1) تصف الانحلال، ويسمى k بثابت النسبة للمعادلة (1). كما يستخدم هذا القانون المتضمن الدالة e^x في حساب الفائدة حيث k ترمز إلى عدد مرات إضافة الفائدة إلى المبلغ البدائي، t تشير إلى الزمن، ويكون هذا القانون على الصورة :

كذلك تدخل الدالة e^x في صياغة قانون التبريد لنيوتن على النحو:

أو $$T - T_s = (T_0 - T_s)e^{-kt},$$

حيث T_0 هي قيمة T عند الزمن صفر، T حرارة الجسم، T_s درجة حرارة المحيط ، وk ثابت([10]).

ومن التطبيقات التي تدخل فيها الدالة e^x حساب الدالة التي تصف جسم متذبذب (معلق بسلك زنبركي) حيث الدالة التي تصف هذه الحالة هي:

حيث A, B, α, ω ثوابت. وإذا أردنا حساب السرعة لذلك الجسم، فنحصل علية بالإشتقاق بالنسبة للمتغير t لنحصل على:

$$\frac{du}{dt} = A[\alpha e^{\alpha t}\cos(\omega t) - \omega e^{\alpha t}\sin(\omega t)]$$
$$+B[\alpha e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega e^{\alpha t}\cos(\omega t)].$$

4.3 متسلسلة فورييه:

عند استخدام متسلسلات فورييه، تعتبر الدالة e^x من أهم الدوال المستخدمة لتعريفها، حيث تسهل عملية بناء هذا النوع من المتسلسلات التي لها إستخدامات واسعة في التطبيقات الهندسية، والتي تصاغ على النحو:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2n\pi xi},$$

حيث نعلم أن متسلسلة فورييه تصاغ على النحو:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{N}(a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)),$$

والصورة المركبة لدالة الجيب و جيب التمام تكون على الصورة:

وهي أيضا صور لدوال مركبة تظهر فيها الدالة e^x، وباستخدام الصورة السابقة في تعريف متسلسلة فورييه، نحصل على:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2n\pi xi}.$$

وتعرف بمتسلسلة فورير المركبة (11).

4.4 الإحصاء:

تظهر الدالة e^x في كثير من التطبيقات الإحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر توزيع بواسون المعرف بالعلاقة:

حيث λ هي معدل عدد النجاحات في الفترة الزمنية المعينة أو المنطقة المحددة. كذلك دالة التوزيع الطبيعي:

$$\emptyset(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

القيمة $(1/\sqrt{2})$ في هذه العلاقة تؤكد أن المساحة تحت منحنى الدالة $\emptyset(x)$ يساوي الواحد الصحيح.

5. نتائج وتوصيات:

لاحظنا ومن خلال هذه الورقة أن الثابت e، رغم أن اكتشافه كان ربما صدفة و لكنه لعب دورا مفصليا في مواضيع مهمة في كثير من فروع العلوم، حيث بسط الكثير من المسائل، وقدَم نماذج من التركيبات الميسرة للاستخدام.

كمـا يوجـد الكثيـر مـن الثوابـت الرياضـية والفيزيائيـة وغيرهـا، التـي لا يمكـن الاستغناء عنها في دراسة المواضيع البحثية والتطبيقية ومن هذه الثوابت الثابت e الذي سلطنا عليه الضوء من خلال هذه الدراسة المتواضعة، كذلك يوجد الثابت π، وكذلك بعض الثوابت الأخرى مثل معامل الانتشار الحراري، ومعامل التمدد في المعادن وغيرها، سنعمل على دراسة بعضا منها في دراسات قادمة، ودراسة العلاقة بينها إن وجدت.

هوامش

[1] Kenneth S. Miller, Partial Differential Equations In Engineering Problems, Prentice-Hall, Inc., USA.

[2] Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber &Schmidt, Boston, Massachusetts.

[3] Ian N. Sneddon, 1957, Elements of Partial Differential Equations, McGraw-Hill Inc. USA.

[4] Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber &Schmidt, Boston, Massachusetts.

[5] George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir, 1996, Calculus and Analytic Geometry, Addison Wesley Inc. USA.

[6] Robert L. Borrelli, Courtney S. Coleman, 1996, Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc, Canada.

[7] Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber &Schmidt, Boston, Massachusetts.

[8] Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber &Schmidt, Boston, Massachusetts.

[9] George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir, 1996, *Calculus and Analytic Geometry,* Addison Wesley Inc. USA.

[10] Kenneth S. Miller, Partial Differential Equations In Engineering Problems, Prentice-Hall, Inc., USA.

[11] Ralph P. Grimaldi, 1998, Discrete and combinatorial Mathematics, Addison Wesley Longman, Inc.