Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

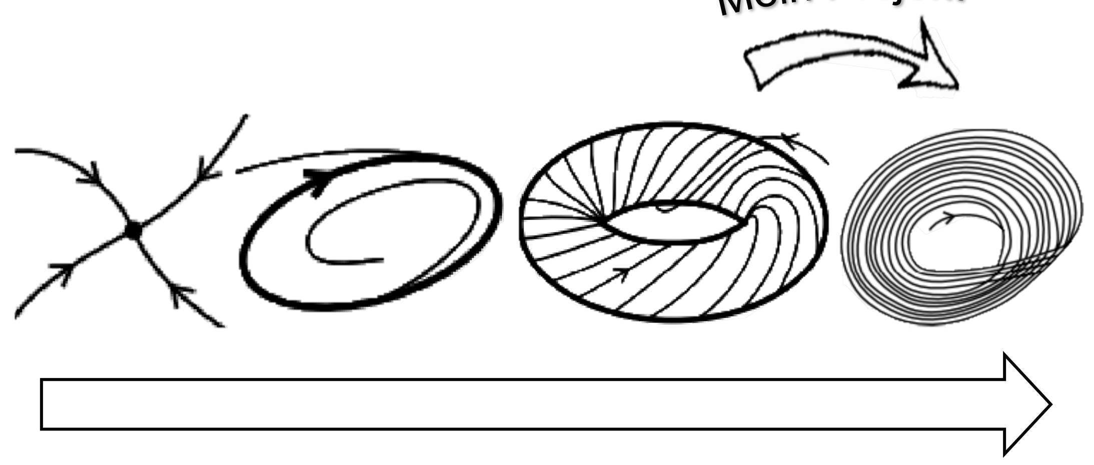
Jason von Juterczenka (16)

Schülerforschungszentrum Nordhessen, Fachbereich Physik

Modell und Methodik

Ziele des Projekts

Der Charakter eines dynamischen Systems wird durch dessen Attraktor im Phasenraum bestimmt.



1) Was zeichnet Systeme mit sensitiver Abhängigkeit von den Anfangswerten aus?
2) Welcher Mechanismus ist ursächlich für sensitive Abhängigkeit?
3) Welche Konsequenzen (Energieerhaltung, Unschärfe, …) ergeben sich daraus?

Die Fragestellungen werden beantwortet…

theoretisch: durch mathematische Analyse der Bewegungsgleichungen und Formulierung in sich schlüssiger und empirisch überprüfbarer Modelle,

experimentell: durch systematische Messungen an selbst entwickelten Messvorrichtungen chaotischer Systeme und Auswertung der Daten durch Phasenraumdiagramme, Schwingungsdiagramme und Spektralräume,

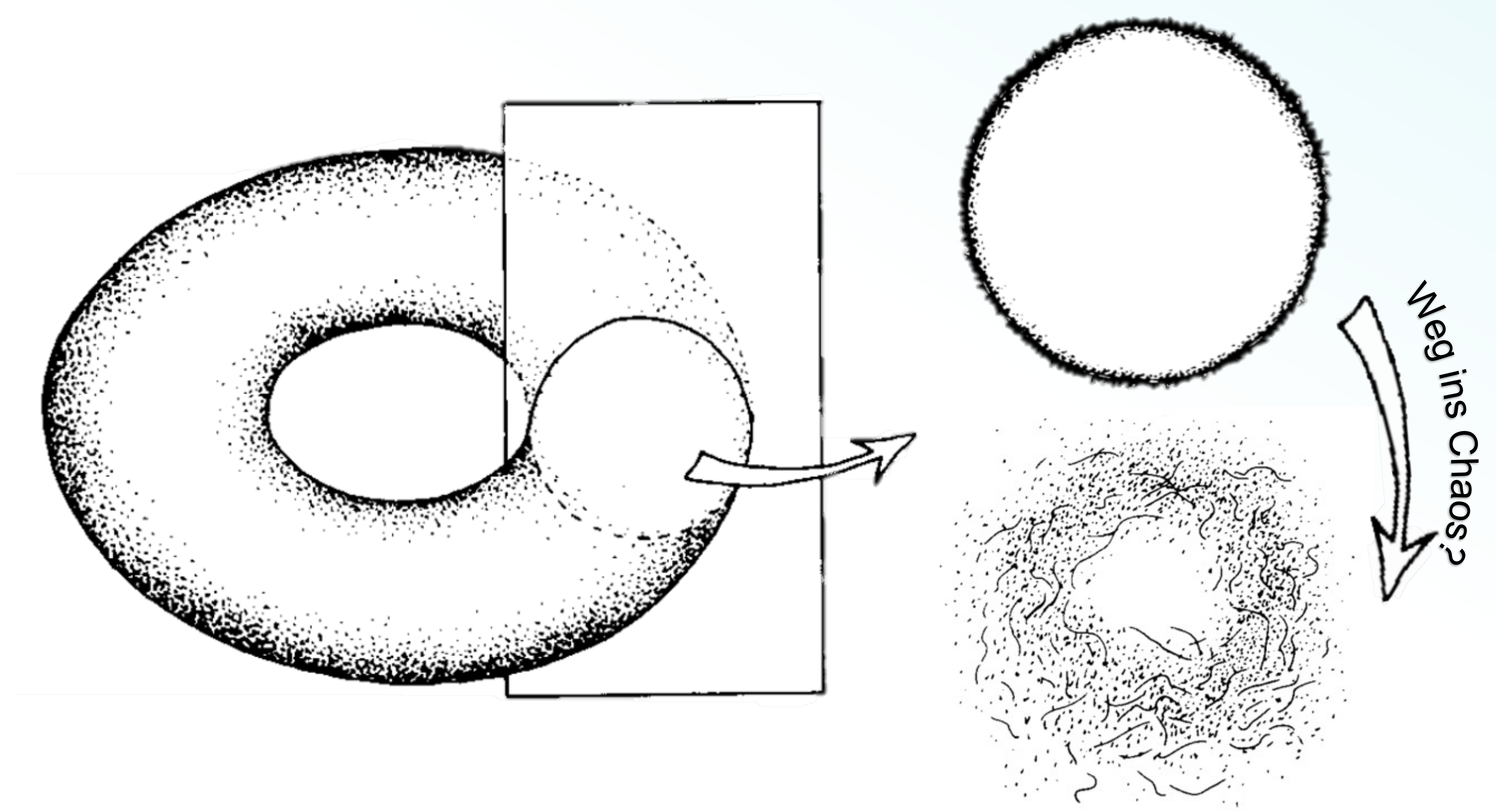
numerisch: durch Computersimulationen und deren Auswertung durch Ljapunow-Exponenten, Poincaré-Schnitte und die Berechnung der Kaplan-Yorke-Dimension:

Nutzung der Kaplan-Yorke-Dimension:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \qquad \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

Mein Modell der Bifurkation

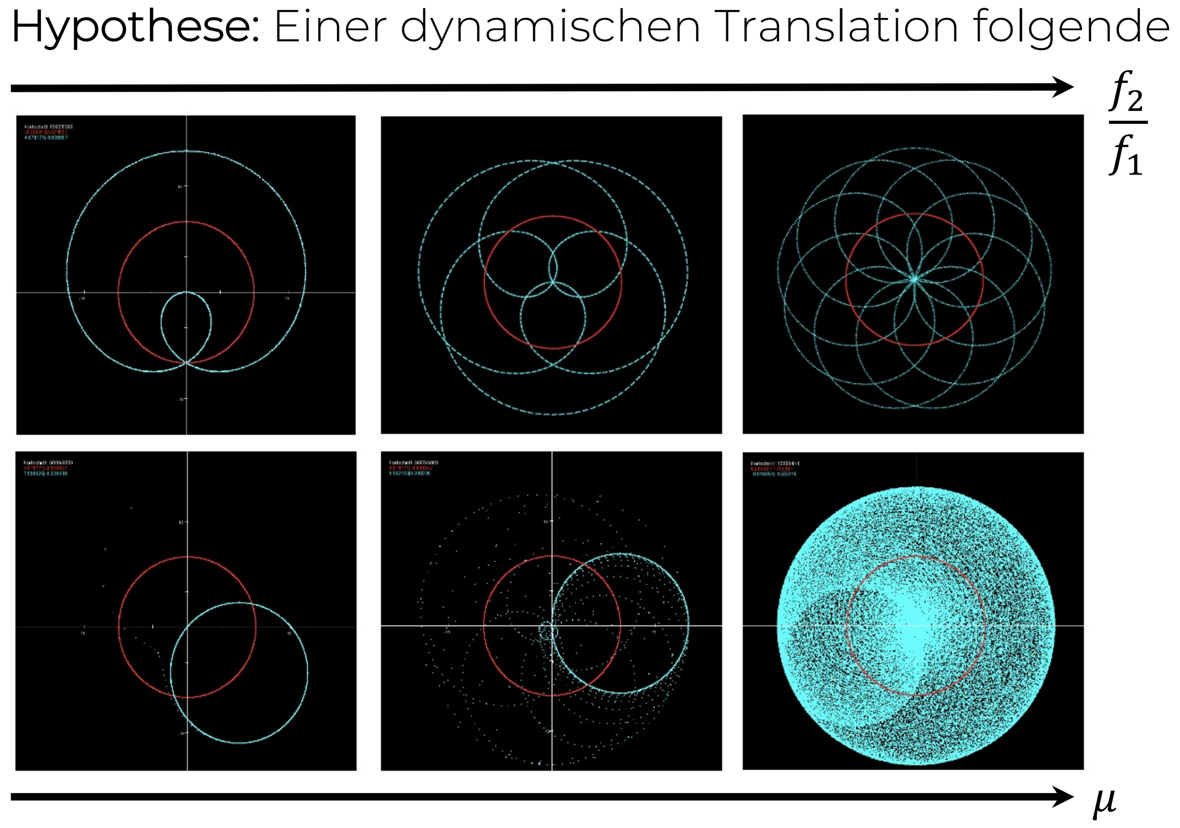
Hypothese: Beschreibung des Weges ins Chaos über die Veränderung der fraktalen Dimension des Attraktors

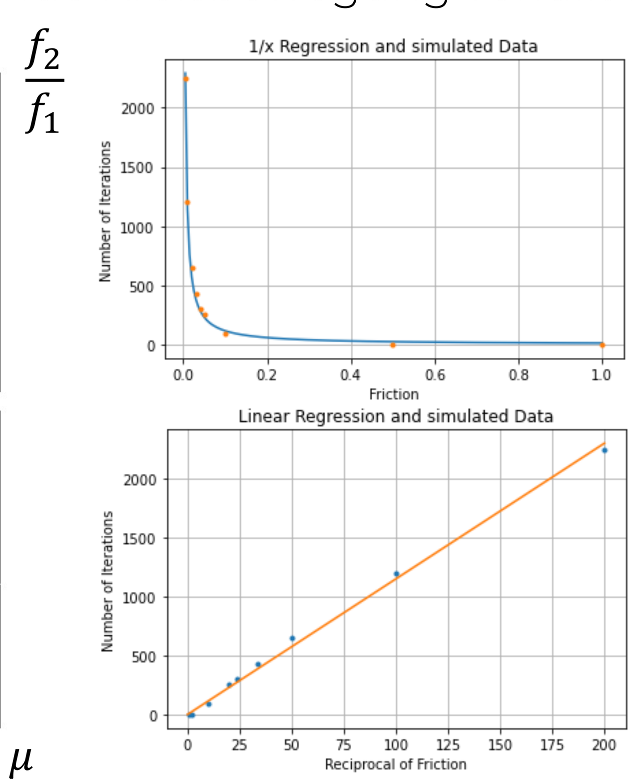


Überprüfung durch Simulation chaotischen Verhaltens mit variablem Bifurkationsparameter und Vergleich des Systemverhaltens bei Parameterwerten mit ganzzahligen und gebrochenen Dimensionen

Entwicklung einer sensitiv abhängigen Simulation

Hypothese: Einer dynamischen Translation folgende Kreisbewegung verfällt ins Chaos





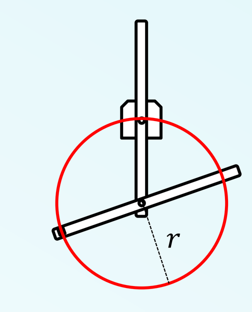
Translation Position

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 0 \end{pmatrix}$$

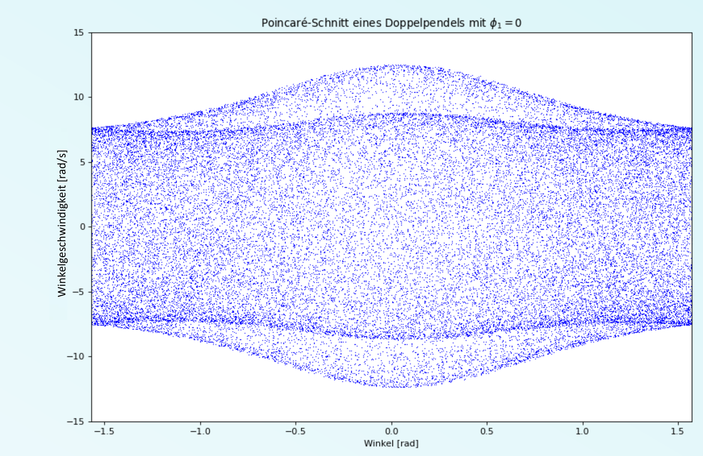
→ Keine Rückkopplungen!

Neue Idee:
Bewegungsgleichungen mit Lagrange-Formalismus nutzen

Nachweis sensitiver Abhängigkeit



6D → 4D



$$V = mgl(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

$$T = ml^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \tfrac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}_2{}^2 + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

→ Sensitive Abhängigkeit benötigt Kräfte!

Experimentelles Setup

(A) Farbpunkt (B) Erreger mit Spiralfeder (C) Wirbelstrombremse
(D) Netzteil der Wirbelstrombremse (DC 0~30 V/0~5 A) (E) Videokamera (F) Antrieb
(G) Netzteil des Schrittmotors (DC 1~32 V/0~20 A)

$$M_R = \underbrace{\mathrm{D} \cdot \varphi}_{\text{ohne Unwucht}} + \underbrace{m \cdot g \cdot r_0 \cdot \sin(\varphi)}_{\text{mit Unwucht}}$$

Vorteile des Pohlschen Resonators:

- Nur drei Ljapunow-Exponenten
- Zweidimensionale Zustandsebene
- Einfach variabler Bifurkationsparameter μ