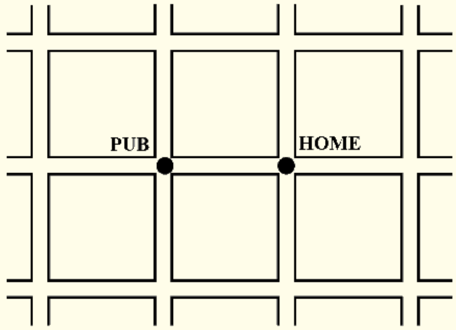
2012/15. Feladat

Főhősünk éppen a kocsma ajtaján lépett ki, mikor szembesült vele, hogy a sok léleknemesítő ital hatására bizony a tájékozódási képességét is elvesztette. Így aztán a részeg tengerész módjára elkezdi bolyongását a négyzet alaprajzú végtelen panelrengetegben (lásd ábra!). Minden kereszteződésben hosszas szédelgés után dönt a négy irány valamelyikéről (egyik irányt sem tünteti ki), majd az ezen irányba vezető úton végig dülöngél a következő útelágazásig, ahol ismételten véletlenszerűen dönt. Amennyiben eljut a kocsmától egy utcasarokra található lakásába, akkor a reggel saját ágyában éri. De ha a bolyongás során visszatalál a kocsmába, akkor inkább betér még egy-két italra, és reggel a kocsma padlóján tér magához.



a) Mennyi a valószínűsége, hogy a főhősünk a saját lakásán ébred, a kocsmában tér magához – esetleg egyik helyre sem talál vissza, és a város körüli kukoricásban éri a reggel?

b) Hogyan módosulnak a valószínűségek, ha a sors fintora miatt a kocsma és a lakás közötti kis utcát lezárják?

(Széchenyi Gábor)

Szerkesztette: Szabó Attila, Gombkötő Ákos
A versenyre beküldött megoldások közül felhasználásra került:
Szabó Attila beküldött megoldása
A megoldást ellenőrizte: -

a) Az akadálytalan panelrengetegben bolyongás leírása:

Első közelítésben hanyagoljuk el azt, hogy hősünk bolyongása véges ideig tart. Ekkor a bolyongás egy egyszerű négyzetrácson történik, ezen annak valószínűsége is könnyen kiszámítható, hogy a bolyongó N lépésben (X, Y) vektorral mozdul el kezdőhelyzetéből. Ha a bolyongást a

$$(x_i, y_i)_{i\geq 0} \tag{1}$$

sorozat írja le, könnyen belátható, hogy:

$$\text{mind } (x_i + y_i)_{i\geq 0} \quad ; \quad \text{mind } (x_i - y_i)_{i\geq 0}$$

egydimenziós véletlen bolyongások, amelyek egymástól függetlenek.

Ha $X+Y$ és N paritása különbözik, a részeg nem kerülhet az N-edik lépésben az (X, Y) pontba, míg ha a paritások megegyeznek, az egyes véletlen bolyongásokban az (X, Y) ponthoz való érkezés valószínűsége rendre

$$\binom{N}{\frac{N+X+Y}{2}}\Big/ 2^N \quad ; \quad \binom{N}{\frac{N+X-Y}{2}}\Big/ 2^N.$$

Mivel a két folyamat egymástól független, a vizsgált pontba érkezés valószínűsége:

$$P_N(X,Y) = \binom{N}{\frac{N+X+Y}{2}}\binom{N}{\frac{N+X-Y}{2}} \Big/ 4^N. \tag{2}$$

A saját lakásig, illetve a kocsmáig való visszataláláshoz csak a $(0,0)$ és a $(1,0)$ vektorral kapcsolatban kell a számításokat elvégezni, ezek írják le a kocsma és az otthon közti mozgásokat. Nyilván csak páros sok lépésben lehet visszaérni a kocsmába, és csak páratlan sokban haza. Emiatt definiálhatjuk a $(k_i)_{i\geq 0}$ sorozatot a következőképpen:
Ha i páros, legyen k_i annak a valószínűsége, hogy i lépésben a bolyongó részeg visszatalál a kiindulási pontba, páratlan i esetén pedig a szomszédba megérkezés valószínűsége lesz. Kihasználva az eddigieket:

$$k_N = \binom{N}{\lceil \frac{N}{2} \rceil}^2 \Big/ 4^N = \begin{cases} \binom{N}{N/2}^2/4^N, & \text{ha } N = 2i \\ \binom{N}{N/2+1/2}^2/4^N, & \text{ha } N = 2i+1 \end{cases}$$

Most figyelembe vesszük az otthon és a kocsma nyelő hatását. Legyen annak a valószínűsége, hogy főhősünk az i. lépésben eljut a két hely valamelyikére, $-d_i$ (a fenti magyarázatból következik, hogy i páros értékeire ez a hely a kocsma, páratlan i-kre pedig az otthon). Ekkor az i. lépésben a megfelelő helyre d_i (azaz negatív, -1 és 0 közti) számú részeget lehelyezve, azok tovabolyongása (illetve az összes részeg helyzetét jellemző valószínűségi sűrűség) pontosan leírja a nyelő hatásokat.

Az egyszerű jelölés kedvéért legyen $d_0 = 1$. Az n. lépésben annak a valószínűsége, hogy nyelőbe érkezünk, a k_i és d_i sorozat elemeivel kifejezhető (az egyes lépésekben kihelyezett részegek hatása szuperponálódik):

$$-d_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i k_{n-i}. \tag{3}$$

Most áttérünk a sorozatokról azok generátor-függvényeire. Legyen:

$$k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i x^i \quad ; \quad d(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i. \tag{4}$$

A $d(x)$-ben a konstansnál magasabb rendű tagok mindegyike származtatható a fenti összegzéssel. Figyelembe véve, hogy a konstans d_0 és k_0 tagok értéke 1, a generátorfüggvényekre a következő reláció teljesül:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} d_i k_{n-i} \quad \Longrightarrow \quad -(d(x)-1) = d(x)(k(x)-1), \tag{5}$$

melyből következik, hogy:

$$d(x) = 1/k(x).$$

A kocsmában, otthon, és a kukoricásban alvás valószínűsége

Fejtsük ki $d(1)$-et és $d(-1)$-et:

$$d(1) = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots \quad ; \quad d(-1) = d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \ldots.$$

A kocsmába megérkezés valószínűsége az eddigiek szerint megadható mint:

$$P_{\text{pub}} = -(d_2 + d_4 + \ldots) = -(d(1) + d(-1))/2 + d_0, \tag{6}$$

míg a hazaérkezésé:

$$P_{\text{home}} = -(d_1 + d_3 + \dots) = (d(-1) - d(1))/2. \tag{7}$$

Következő lépésben használjuk fel, hogy:

$$\binom{2i}{i} = \frac{2i!}{i!i!} = \frac{2-1i!}{i-1!i!}\frac{2i}{i} = 2\binom{2i-1}{i},$$

–mely összefüggést a Pascal-háromszög alapján is be lehet látni– és következik belőle, hogy :

$$k_{2i} = k_{2i-1}. \tag{8}$$

Emiatt $k(-1) = k_0 - k_1 + k_2 - k_3 + k_4 - \dots$ összegben az első kivételével a tagok páronként kiejtik egymást, vagyis

$$k(-1) = k_0 = 1.$$

Másrészt, $N \to \infty$ határértékben a $\binom{2N}{N}$ binomiális együtthatóra a Stirling-formulát használva, aszimptotikusan:

$$n! \to \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{2N}{N} \to \frac{4^N}{\sqrt{\pi N}}. \tag{9}$$

Ebből látható, hogy $k_{2N} = k_{2N-1} \sim 1/N$: mivel a harmonikus sor összege divergens, ezért $k(1) = k_0 + k_1 + k_2 + \dots = \infty$. A k és d függvények közti kapcsolat miatt ekkor $d(-1) = 1$ és $d(1) = 0$. A fentiek szerint a releváns valószínűségek

$$P_{\text{pub}} = 1/2 \quad ; \quad P_{\text{home}} = 1/2, \tag{10}$$

ebből az következik, hogy biztosan visszatér valamelyik helyre, nem jut el a „kukoricásba”.

b) Az útlezárás hatása

Most is ki fogjuk fejezni az egyik kitüntetett pontból a másikba való eljutás illetve visszaérkezés $(k'_i)_{i\geq 0}$ valószínűségeinek sorozatát, illetve e sorozat $k'(x)$ generátorfüggvényét:
Ehhez most is eltekintünk a két nyelő jelenlététől. A lezárt utca hatását úgy vesszük figyelembe, hogy ha valamely végpontjába k'_i valószínűséggel érkezik meg a részeg, akkor a következő $(i+1.)$ lépésben az utca másik végében $-\frac{1}{4}k'_i$, a három másik szomszédban $\frac{1}{12}k'_i$ részeget helyezünk le: ezzel az egyenletes eloszlást a három lehetséges kijáratnak megfelelően módosítjuk.

Most vizsgáljuk meg ezeknek az újonnan kihelyezett részegeknek a hatását a rendszer fejlődésére. Nyilvánvaló, hogy egy A pont négy szomszédjából adott számú lépésben ugyanakkora valószínűséggel érkezik az onnan induló részeg A-ba: ezt és azt a tényt, hogy az egy lépésben induló részegek számának összege 0, arra jutunk, hogy az egyik végpont miatt kihelyezett részegeknek erre a pontra nincs eredő visszahatása.

Most azt számítjuk ki, hogy az utca egyik végpontja körül kihelyezett részegek milyen hatással vannak a másik végpontban tapasztalható valószínűségek alakulására: az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kocsma körül helyeztük ki a részegeket a $2N+1$. lépésben. Ez a $2N+2j+1$. lépésben az otthon körül

$$\left[-\frac{1}{4}\binom{2j}{j}^2 + \frac{1}{12}\binom{2j}{j+1}^2 + \frac{2}{12}\binom{2j}{j}\binom{2j}{j+1}\right]\frac{k'_{2N}}{4^{2j}} \tag{11}$$

járulékot adnak $k'_{2N+2j+1}$-hez. Szimmetriaokokból a páratlan indexű k' együtthatók is ugyanilyen járulékot adnak a páros indexűekhez. Legyen

$$e_j = \frac{1}{4^{2j}}\left[-\frac{1}{4}\binom{2j}{j}^2 + \frac{1}{12}\binom{2j}{j+1}^2 + \frac{2}{12}\binom{2j}{j}\binom{2j}{j+1}\right], \tag{12}$$

ezzel a jelöléssel

$$k'_n = k_n + \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} e_i k'_{n-2i-1}. \tag{13}$$

Az e_i sorozat generátorfüggvénye legyen $e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^{2i+1}$, ekkor a fenti összefüggést a következő egyenlet írja le:

$$k'(x) = k(x) + k'(x)e(x) \to k'(x) = \frac{k(x)}{1-e(x)} \to d'(x) = \frac{1}{k'(x)} = \frac{1-e(x)}{k(x)}. \tag{14}$$

(Az utolsó lépésben felhasználtuk az **a)** részből változtatás nélkül átemelt gondolatmenetet, amelyből $d'(x)k'(x) = 1$ következik.) Ugyancsak az **a)** rész megoldásából következik, hogy a kocsmába visszaérkezés, illetve hazaérés valószínűsége

$$P'_{\text{pub}} = 1 - (d'(-1) + d'(1))/2 \tag{15}$$

$$P'_{\text{home}} = (d'(-1) - d'(1))/2. \tag{16}$$

Numerikus számítás szerint $e(1) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i = -1/3$, s mivel e páratlan függvény, $e(-1) = 1/3$. Ezt és k ismert értékeit behelyettesítve,

$$P'_{\text{pub}} = 2/3 \tag{17}$$

$$P'_{\text{home}} = 1/3 \tag{18}$$

adódik: láthatjuk, hogy most is 0 a „kukoricásba jutás” valószínűsége.

A bolyongási idő

Az elinduló részeg előbb-utóbb visszatér a két nyelő valamelyikébe: ez Pólya György tételének következménye, amely szerint az egy és két dimenziós véletlen bolyongások 1 valószínűséggel visszatérnek a kiindulási helyükre. Meg lehet azonban vizsgálni, hogy ez a visszatérés mennyi idő alatt zajlik le.

A $d(x)$ és $d'(x)$ függvények tényleges sorbafejtését nem végeztük el, viszont könnyen megtehetjük matematikai programcsomagok (pl. a Maple) segítségével. Ily módon kiszámítottuk a $-d_i$ és $-d'_i$ megérkezési valószínűségeket $i \leq 1000$-re, ezek mellékelt fájlokban találhatóak meg. Meghatároztuk továbbá a $D_i = \sum_{i=1}^{n} -d_i$ összegzett valószínűségeket: Ábrázolva a $-d_i$ és az $1 - D_i$ (ez annak a valószínűsége, hogy az i. lépésig nem érkezünk vissza) sorozatokat, azt vehetjük észre, hogy mindkét sorozat exponenciálisan cseng le i-vel.

Egy másik érdekesség, hogy d_i páros és páratlan i-kre szigorúan monoton csökken, a közvetlen szomszédok között viszont oszcillál: ez a sorozat definíciójából adódó páros-páratlan aszimmetriára vezethető vissza.

Numerikusan kiszámíthatjuk a megérkezéshez szükséges N lépésszám várható értékét és szórását. Definíció szerint a várható érték

$$\langle N \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} i(-d_i),$$

a szórás pedig

$$\sigma_N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2. \tag{19}$$

Analitikusan is kiszámíthatjuk a megérkezés lépésszámának várható értékét és szórását. Ehhez deriváljuk a d függvényt kétszer:

$$\partial_x d(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i d_i x^{i-1} \quad ; \quad \partial_{xx} d(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1) d_i x^{i-2}. \tag{20}$$

Ha ezekbe a függvényekbe 1-et helyettesítünk, könnyen láthatjuk, hogy $d'(1) = -\langle N \rangle$ és $d'(1)+d''(1) = -\langle N^2 \rangle$, ahol N a megérkezéshez szükséges lépésszám.