Definition 1. Nous considérons, dans ce document, les deux axiomes suivants, portant sur une relation ternaire $\rightsquigarrow$; que nous exposons tel que suit, dans un format réminiscent de la notion de règle d'inférence:

$$\frac{\begin{array}{c} xy \rightsquigarrow u \\ yz \rightsquigarrow v \end{array}}{\begin{array}{c} xv \rightsquigarrow w \\ uz \rightsquigarrow w \end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{c} xv \rightsquigarrow w \\ uz \rightsquigarrow w \end{array}}{\begin{array}{c} xy \rightsquigarrow u \\ yz \rightsquigarrow v \end{array}}$$

Remark 2. Ces succédanés de règles d'inférence sont censés s'interpréter de la manière suivante: toutes les variables apparaissant dans les prémisses (ea sunt les assertions au-dessus de la ligne centrale, dite ligne d'inférence) sont considérées être implicitement universellement quantifiées ; celles apparaissant dans les conclusions (ea sunt les assertions au-dessous de la ligne d'inférence) et n'apparaissant pas dans les prémisses sont considérées implicitement existentiellement quantifiées de manière analogue, la portée de ces quantifications existentielles se limitant toutefois auxdites conclusions ; ce qui signifie que ces axiomes peuvent être réécrits, en langage logique plus conventionnel, de la manière qui suit:

$$\forall x, y, u, z, v, \;\; xy \rightsquigarrow u \wedge yz \rightsquigarrow v \quad \Longrightarrow \quad \exists w, \;\; xv \rightsquigarrow w \wedge uz \rightsquigarrow w$$
$$\forall x, u, z, v, w, \;\; xv \rightsquigarrow w \wedge uz \rightsquigarrow w \quad \Longrightarrow \quad \exists y, \;\; xy \rightsquigarrow u \wedge yz \rightsquigarrow v$$

Definition 3. Nous dirons que la relation ternaire $\rightsquigarrow$ interprète la loi de composition $\circ$ dès que les assertions $ab \rightsquigarrow c$ soient universellement synonymes des expressions respectives $a \circ b = c$, et, ce, pour tous les choix possibles de triplets d'items a, b et c vivant dans la structure commune à ladite relation ternaire $\rightsquigarrow$ et à la ladite loi de composition $\circ$.

Nous dirons aussi qu'une loi de composition admette une unité lorsqu'il existe un item e tel que les assertions $x \circ e = x$ et $e \circ x = x$ soient universellement satisfaites pour tous les items x vivant dans la structure où la loi de composition $\circ$ y est interprétée.

Theorem 4. *Sous l'hypothèse que la relation ternaire $\rightsquigarrow$ interprète une loi de composition admettant une unité, ces axiomes axiomatisent les groupes.*

Remark 5. Compte tenu que nos deux axiomes peuvent, dans la notation réminiscente de règles d'inférence que nous avons esquissée au début du présent document, s'obtenir l'un à partir de l'autre en y transposant, formellement, leurs prémisses et conclusions, ce théorème, ainsi que sa preuve, qui suit, légitiment la suggestion, ou accréditent l'idée, de l'existence d'une dualité portant, d'un côté, sur l'axiomatique de l'associativité, et, de l'autre, sur une axiomatique étroitement liée à la propriété d'inversibilité ; et, ce, en un sens qui reste à détailler dans, par exemple et hypothétiquement, d'ultérieurs travaux.

Proof. Nous vérifions ici, dans un premier temps, qu'une structure $\mathcal{S}$ équipée d'une relation ternaire $\rightsquigarrow$ qui y satisfasse ces deux axiomes et y interprète une loi de composition $\circ$ admettant une unité est, de fait, un groupe. Dans un deuxième temps, nous vérifierons la réciproque de cette affirmation.

Rappelons, à toutes fins utiles, que l'axiomatisation usuelle, et conventionnelle, des groupes se résume à une loi de composition admettant une unité et qui soit associative et inversible. Nous n'avons, par conséquent, qu'à vérifier ce qui n'est pas de butte en blanc couvert par nos présuppositions, à savoir l'associativité et l'inversibilité, pour nous permettre d'affirmer que la structure $\mathcal{S}$ soit bel et bien un groupe.

Considérons donc, à la fin de vérifier l'associativité de la loi de composition $\circ$, trois items arbitraires x, y et z vivant dans notre structure $\mathcal{S}$. Puisqu'il est postulé que la relation ternaire $\rightsquigarrow$ y interprète la loi de composition $\circ$, nous pouvons composer x et y ainsi que y et z et ainsi respectivement obtenir les items $u \coloneqq x \circ y$ et $v \coloneqq y \circ z$.

Nous pouvons alors réécrire notre premier axiome dans notre format inférentiel tel que suit:

$$\frac{\begin{array}{c} x \circ y = u \\ y \circ z = v \end{array}}{\begin{array}{c} x \circ v = w \\ u \circ z = w \end{array}}$$

Les prémisses étant par construction vérifiées, nous sommes donc assurés de l'existence d'un item w vivant dans notre structure $\mathcal{S}$ tel que les assertions $x \circ v = w$ et $u \circ z = w$ y soient satisfaites ; ce qui permet de conclure à l'associativité de la loi de composition $\circ$.

Considérons maintenant, à la fin de vérifier l'inversibilité de la loi de composition $\circ$, un item arbitraire γ vivant dans notre structure $\mathcal{S}$. L'existence d'une unité, que nous appellerons e, nous permet alors de considérer les assignements suivants dans le contexte de notre second axiome: $x \to \gamma$, $z \to \gamma$, $u \to e$, $v \to e$ et $w \to \gamma$; second axiome qui se spécialise alors de ce chef tel que suit:

$$\frac{\begin{array}{c} \gamma \circ e = \gamma \\ e \circ \gamma = \gamma \end{array}}{\begin{array}{c} \gamma \circ y = e \\ y \circ \gamma = e \end{array}}$$

Puisque l'item e est postulé être une unité, les prémisses de cette spécialisation en sont alors conséquemment satisfaites. Nous pouvons donc en conclure à l'existence d'un item y vivant dans la structure $\mathcal{S}$ tel que les conclusions de cette inférence tiennent ; conclusions qui garantissent que y soit alors un inverse de γ. Le caractère arbitraire du choix de γ, dans ce qui précède, permet alors de conclure à l'inversibilité de la loi de composition $\circ$.

La loi de composition $\circ$ ayant ainsi été prouvée associative et inversible, il s'ensuit que la structure $\mathcal{S}$ se trouve bien être un groupe ; et, conséquemment, que toute structure satisfaisant aux deux axiomes précités telle que la relation ternaire $\rightsquigarrow$ y interprète une loi de composition admettant une unité constitue bel et bien un groupe.

Il nous reste donc à vérifier la réciproque de ce qui vient d'être démontré. Considérons, à cette fin, un groupe G arbitraire ; la loi de composition duquel sera dénotée par le symbole compositionnel $\circ$; et l'unité duquel, communément appelé l'item neutre, sera dénotée par la lettre e. Nous y interprétons alors la relation ternaire $\rightsquigarrow$ de telle manière que toute assertion $ab \rightsquigarrow c$ y soit universellement synonyme de l'expression $a \circ b = c$ pour tous les choix possibles de triplets d'items a, b et c vivant dans le groupe G. Il convient alors de montrer que les deux axiomes précités soient vérifiés pour conclure à la validité du présent théorème.

Vérifions alors, de ce pas, le premier axiome ; et présupposons, à cette fin, que les assertions $xy \rightsquigarrow u$ et $yz \rightsquigarrow v$ tiennent pour des items x, y, u, z et v donnés du groupe G ; ce qui implique que les identités $x \circ y = u$ et $y \circ z = v$ soient valides. Définissons alors w_0 et w_1 comme étant les résultats respectifs des compositions $w_0 \coloneqq x \circ v$ et $w_1 \coloneqq u \circ z$. Mais alors, G étant un groupe, la loi de composition $\circ$ y est associative, et nous pouvons en conclure à l'identité de w_0 et de w_1 ; items ainsi identifiés en un unique item que nous nommerons w dans ce qui suit. Nous savons alors, par construction de w_0 et de w_1, que les assertions $xv \rightsquigarrow w$ et $uz \rightsquigarrow w$ tiennent ; constat qui nous permet de conclure à la validité du premier axiome.

Vérifions maintenant le second axiome ; et présupposons, à cette fin, que les assertions $xv \rightsquigarrow w$ et $uz \rightsquigarrow w$ tiennent pour des items x, u, z, v et w donnés du groupe G ; ce qui implique que l'identité $x \circ v = w = u \circ z$ y soit valide. Puisque G est postulé être un groupe, tout item y admet un inverse ; propriété qui nous permet de réécrire l'identité précédente sous les formes $x \circ v \circ z^{-1} = u$ et $v = x^{-1} \circ u \circ z$. Définissant alors les items y_0 et y_1 comme étant les résultats respectifs des compositions $y_0 \coloneqq v \circ z^{-1}$ et $y_1 \coloneqq x^{-1} \circ u$, les identités précédentes se réécrivent alors respectivement sous les formes $x \circ y_0 = u$ et $y_1 \circ z = v$. En d'autres termes, les assertions $xy_0 \rightsquigarrow u$ et $y_1 z \rightsquigarrow v$ sont ainsi respectivement satisfaites.

Cela étant, nous savons aussi, G étant un groupe, que les identités suivantes sont valides ; et qu'elles prouvent l'identité de y_0 et y_1:

$$y_0 = v \circ z^{-1} = x^{-1} \circ x \circ v \circ z^{-1} = x^{-1} \circ w \circ z^{-1}$$
$$y_1 = x^{-1} \circ u = x^{-1} \circ u \circ z \circ z^{-1} = x^{-1} \circ w \circ z^{-1}$$

Identifiant ainsi les items y_0 et y_1 en un unique item, que nous nommerons y, plutôt que $x^{-1} \circ w \circ z^{-1}$, dans ce qui suit, nous pouvons alors affirmer que les assertions $xy \rightsquigarrow u$ et $yz \rightsquigarrow v$ soient satisfaites ; constat qui nous permet de conclure à la validité du second axiome.

La réciproque de la première partie de la présente preuve est donc ainsi vérifiée ; ce qui en constitue la deuxième et finale partie: tout groupe satisfait les deux axiomes ; ce qui démontre que les groupes soient, de fait, axiomatisés par nos deux axiomes, sous l'hypothèse contextualisante que la relation ternaire $\rightsquigarrow$ sur laquelle portent ces deux axiomes interprète une loi de composition admettant une unité. Cette dernière assertion constitue bien l'énoncé du théorème que nous nous proposions de prouver ; ce qui est ainsi accompli. $\square$