Anvendelse af løsningerne læses på hjemmesiden
www.matematikhfsvar.page.tl
Sættet løses med begrænset tekst og konklusion.
Formålet er jo, at man kan se metoden, og ikke skrive af!

Matematik A
August 2011
Delprøve 1

Opgave 1 - Plangeometri

Man har vektorerne
$\vec{a} = \langle 5, 4 \rangle$; $\vec{b} = \langle 3, 6 \rangle$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Arealet bestemmes.

$$det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 30 - 12 = \underline{\underline{18}}$$

Opgave 2 - Differentialregning

Funktionen
$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x \tag{2.1}$$

Funktonen differentieres.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 3x^{1-0} = \underline{\underline{6x^2 - 2x + 3}}$$

Opgave 3 - Lineære modeller

Modellen
$m(t) = 124 \cdot t + 4783$

$$m(t) = 124\,t + 4783 \tag{3.1}$$

Gælder fra 1975-2008.

a =for hvert år der går, stiger den gennemsnitlige mælkeydelse med 124 kg

b = i begyndelsen af 1975 var mælkeydelsen 4783 kg.

Opgave 4 - Differentialligninger

Differentialligningen

$\frac{dy}{dx} = 2\,x + x \cdot y;\ P(1, 3)$

$$\frac{dy}{dx} = x\,y + 2\,x$$
$$P(1, 3) \tag{4.1}$$

Tangenten bestemmes.

$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 5$

Ligningen

$y = 5 \cdot (x - 1) + 3 = 5\,x - 5 + 3 = \underline{\underline{5\,x - 2}}$

Opgave 5 - Integration ved substitution

$\int \frac{2\,x}{x^2 + 3}\,\mathrm{d}x$, der anvendes integration ved substitution

$t = x^2 + 3 \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = 2\,x \Leftrightarrow dt = 2\,xdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2\,x}dt$

$\int \frac{2\,x}{t} \cdot \frac{1}{2\,x}dt = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + k$

Indsæt t, bemærk at x^2 gør, at man forkaster numerisk tegn.

$\underline{\underline{\ln\left(x^2 + 3\right) + k}}$

Opgave 6 - Optimering

$V = l \cdot x \cdot h$

Her er

$x = x$

$l = 2\,x$

$h = 3\,x + h = 3$

h isoleres

$3\,x + h = 3 \Leftrightarrow 3\,x - 3 = -h \Leftrightarrow -3\,x + 3 = h \Leftrightarrow 3 - 3\,x = h$

Man har udtrykket

$V = 2\,x \cdot x \cdot (3\ -3\,x) = 2\,x^2 \cdot (3 - 3\,x) = \underline{\underline{-6\,x^3 + 6\,x^2}}$

Matematik A
August 2011
Delprøve 2

Opgave 7 - Potensmodeller

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Der anvendes poptensregression.

$L1 := [50, 60, 70, 80, 90, 100, 105]$:; $L2 := [1.29, 2.19, 3.47, 5.11, 7.45, 10.36, 12.05]$:

$V(L) := PowReg(L1, L2, L)$:

$V(L)$

$$0.00000954156327653745\ L^{3.01581178365513} \tag{7.1.1}$$

Som er forskriften med tallene a og b, som er hhv.

$b = \underline{\underline{0.00000954156327653745}}$

$a = \underline{\underline{3.01581178365513}}$

Delopgave b

Vægten findes ved indsættelse af 87 på L.

$V(87)$

$$6.74286634659361 \tag{7.2.1}$$

Længden findes ved indsættelse af 2.56 på $V(L)$.

$2.56 = V(L)$

$$2.56 = 0.00000954156327653745\ L^{3.01581178365513} \tag{7.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$63.10340516 \tag{7.2.3}$$

Hermed er længden og vægten fundet.

$Vægt = \underline{\underline{6.74\ kg}}$

$længde = \underline{\underline{63.103\ cm}}$

Delopgave c

Formlen anvendes.

$r_y = \left(\left(1 + r_x\right)^a - 1\right) \cdot 100\ \%.$

$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{25}{100}\right)\right)^{3.01581178365513} - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = 96.00283780 \tag{7.3.1}$$

Når længden øges med 25 %, $\underline{\underline{\text{så øges vægten med 96 \%.}}}$

Opgave 8 - Geometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne

$$\angle A = invCos\left(\frac{16^2+8^2-12^2}{2\cdot 16\cdot 8}\right)$$

$$\angle(A) = 46.56746344 \tag{8.1.1}$$

Vinklen er $\underline{\underline{\angle A = 46.56746344^o}}$

Delopgave b

$|BH| = 8\cdot Sin(46.56746344)$

$$|BH| = 5.809475021 \tag{8.2.1}$$

Så højden er 5.809
Pythagoras anvendes, så kan man finde grundlinjen.

$5.81^2 + AH^2 = 8^2$

$$33.7561 + AH^2 = 64 \tag{8.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for AH}}$

$$[[AH = 5.499445427], [AH = -5.499445427]] \tag{8.2.3}$$

Grundlinjen er $|AH| = 5.499445427$. Arealet bestemmes.

$T = \frac{1}{2}\cdot 5.809\cdot 5.499445427$

$$T = 15.97313924 \tag{8.2.4}$$

Hermed fandt man arealet til $\underline{\underline{T = 15.973}}$

Delopgave c

Man anvender ½appelsinformlen.

$20 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AG\cdot Sin(46.56746344)$

$$20 = 2.904737510\, AG \tag{8.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for AG}}$

$$[[AG = 6.885303726]] \tag{8.3.2}$$

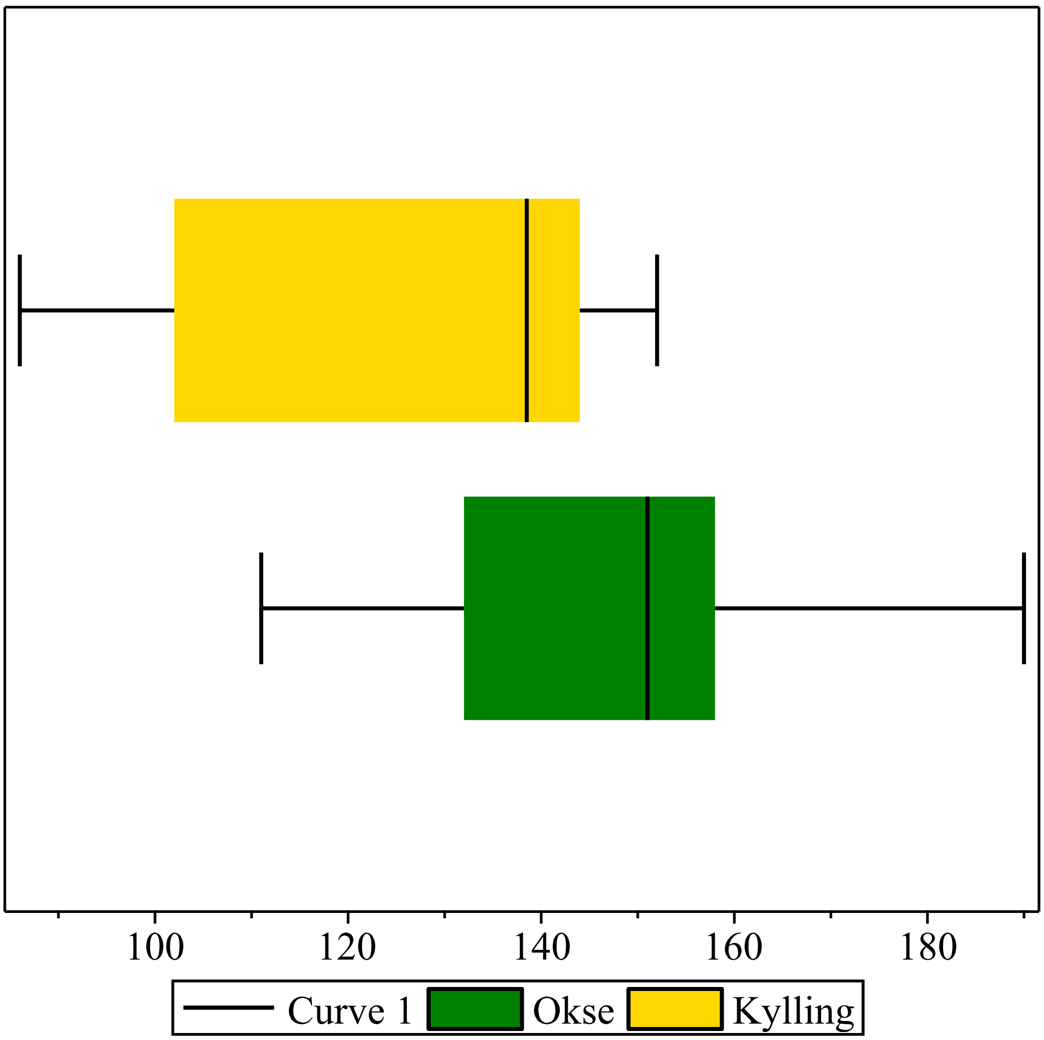
Længden $\underline{\underline{\text{|AG| er altså 6.88}}}$

Opgave 9 - Statistik

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

$okse := [111, 131, 132, 149, 149, 153, 157, 158, 184, 190]$:; $kylling := [86, 94, 102, 132, 135, 142, 143, 144, 146, 152]$:
boksplot(*okse*, *kylling*)



Det ses, at 25 % af kyllingepølserne har et ret lavere kcal indhold end oksen har. Det er så lavt, at oksen ikke er 'med'. Man har medianen for kyllingen, dvs. 50 % har ca. 140kcal, hvor medianen for en okse har 145, så en anelse højere. Endelig er 75 % af kyllingepølserne med 143 *kcal*, som stadig er lavere end medianen for oksen.
Generelt set, har kyllingepølserne mindre indhold af kcal end oksepølserne.

Opgave 10 - Eksponentielle funktioner

restart
with(Gym) :

Delopgave a

Tallene a bestemmes

$$a = \sqrt[30-10]{\frac{160}{110}}$$

$$a = \frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20} \qquad \textbf{(10.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$a = 1.0189 \qquad \textbf{(10.1.2)}$$

Tallet b bestemmes

$$b = \frac{110}{\left(\frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20}\right)^{10}};\ b = \frac{160}{\left(\frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20}\right)^{30}}$$

$$b = \frac{55}{8}\sqrt{16}\,\sqrt{11}$$

$$b = \frac{55}{8}\sqrt{16}\,\sqrt{11} \qquad \textbf{(10.1.3)}$$

Det er lige meget med hvilken metode man bruger! Man kunne også lave eksponentiel regression, men her har man chancen for at vise censor sine skills. Forskriften er

$$N(t) := \left(\frac{55}{8}\sqrt{16}\,\sqrt{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20}\right)^t$$

$$t \rightarrow \frac{55}{8}\sqrt{16}\,\sqrt{11}\left(\frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20}\right)^t \qquad \textbf{(10.1.4)}$$

Delopgave b

Man indsætter 5, så har man

$N(5) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 100.17$

Så efter 5 sekunder er der inficeret 100 pc'er

Fordoblingstiden bestemmes

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{11}\,16^{1/20}\,11^{19/20}\right)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T_2 = 37.019$$

Dvs. efter 37 sekunder er antallet af pc'er med infektion fordoblet!

Opgave 11 - Integralregning

restart
with(*Gym*) :
Funktionerne defineres
$g(x) := 4\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$:; $h(x) := \mathrm{e}^{x}-1$:

Delopgave a

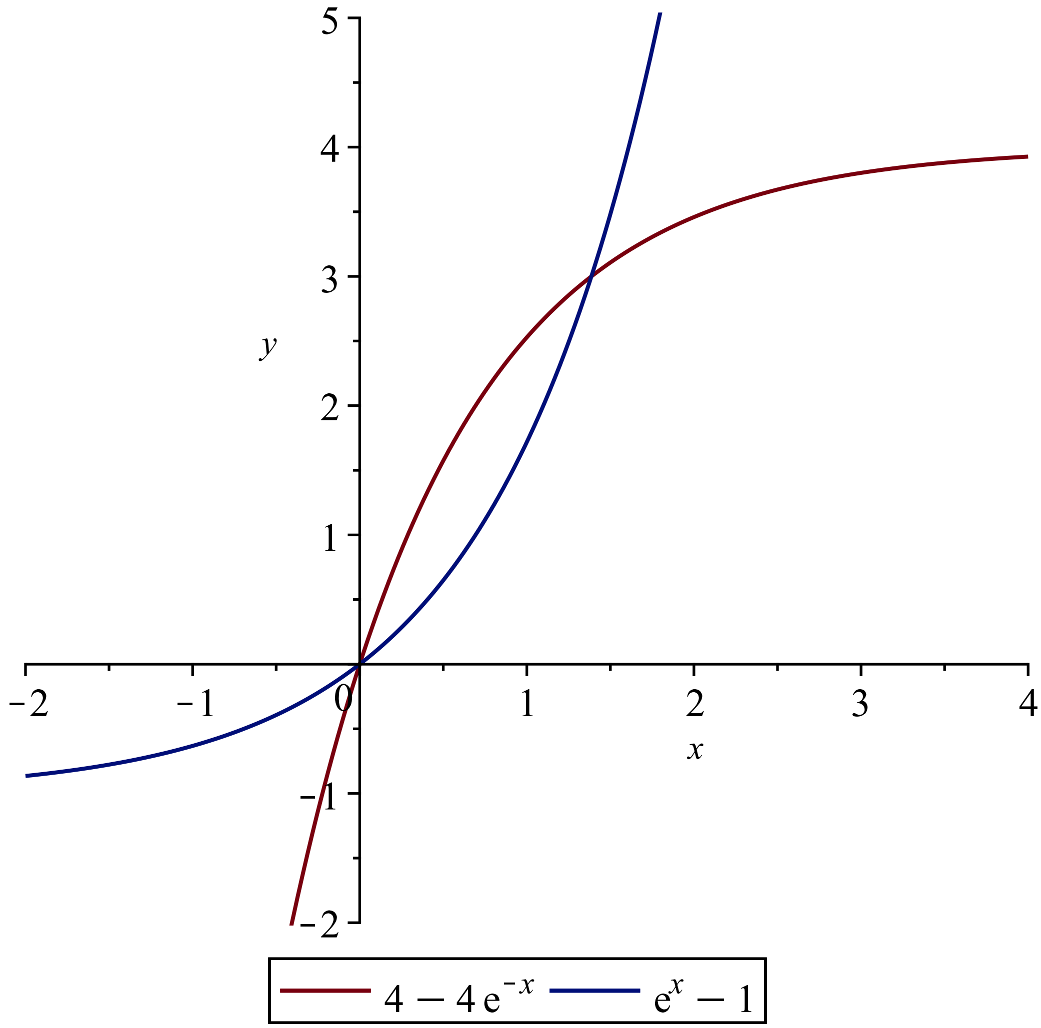
Første koordinaterne bestemmes og der tegnes plot.
$g(x) = h(x)$

$$4-4\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}-1 \tag{11.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0],\ [x=2\ln(2)]] \tag{11.1.2}$$

plot$([g(x), h(x)], x=-2..4, y=-2..5, legend=[g(x), h(x)])$



Delopgave b

Arealet af M bestemmes. Det ses, at $g(x)$ er den øvre.

$$A = \int_0^{2\ln(2)} g(x) - h(x)\, \mathrm{d}x$$

$$A = -6 + 10\ln(2) \quad \textbf{(11.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$A = 0.9315 \quad \textbf{(11.2.2)}$$

Arealet er $\underline{\underline{A = 0.9315}}$

Delopgave c

$g'(x)$

$$4\,\mathrm{e}^{-x} \quad \textbf{(11.3.1)}$$

Her har man den afledede. Hvis man sætter den lig med 0, så får man

$g'(x) = 0$

$$4\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \textbf{(11.3.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[\;] \quad \textbf{(11.3.3)}$$

Ingen ting, derved er den afledede en aftagende model (for at den oprindelige kan vokse). Dog kommer den afledede aldrig under førsteaksen, derved aftager den oprindelige

Med andre ord, den oprindelige funktion er voksende pga. eksponentialfunktionen e, men også at den afle

Opgave 12 - Rumgeometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Ligningen for kuglen bestemmes

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, punktet og centrum indsættes

$(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (3-5)^2 = r^2$

$$9 = r^2 \quad \textbf{(12.1.1)}$$

Kuglens ligning er hermed

$\underline{\underline{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-5)^2 = 9}}$

Tangentplanen kan findes ved hjælp af centrum og kuglens P, men først opstilles en normalvektor.

$$n_\beta := \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-(-1) \\ 5-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (12.1.2)$$

Planens ligning med indhold er
$-2(x-2)+1(y-(-1))+2(z-3)=0$, dermed er planens ligning som tangerer kuglen i P
$\underline{\underline{\beta = -2x - 1 + y + 2z = 0}}$

Delopgave b

For bestemmelsen af koordinatsættet opstiller man en parameterfremstilling på baggrund af normalvektoren til α og punktet C.

$l := \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 5\rangle + t \cdot \langle 3, 6, -6\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 6t \\ 5-6t \end{bmatrix} \qquad (12.2.1)$$

Dette indsættes i planens ligning og man får sin t-værdi.
$3(3t)+6(6t)-6(5-6t)+3=0$

$$81t - 27 = 0 \qquad (12.2.2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = \frac{1}{3}\right]\right] \qquad (12.2.3)$$

Indsættes tilbage i parameterfremstillingen.
$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 5\rangle + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \langle 3, 6, -6\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (12.2.4)$$

Hermed har man koordinatsættet til punktet Q. Det er: $\underline{\underline{Q = (1, 2, 3)}}$

Opgave 13 - Differentialligninger

restart
with(Gym) :

Delopgave a

$\frac{dN}{dt} = 0.82 \cdot 0.88^{t} \cdot N$

Man indsætter $t = 10$ i t
$N'(t) = 0.82 \cdot 0.88^{10} \cdot 266$

$$D(N)(t) = 60.74663288 \qquad (13.1.1)$$

Så efter 10 døgn er der $\underline{\underline{60.746 \text{ mio kræftceller}}}$

Delopgave b

Forskriften bestemmes

$evalf(dsolve(\{N'(t) = 0.82 \cdot 0.88^t \cdot N(t), N(10) = 266\}, N(t)))$

$$N(t) = 1587.584244\ e^{-6.414600457\ 22.^t\ 25.^{-1.t}} \qquad \textbf{(13.2.1)}$$

Så forskriften for differentialligningen er $\underline{\underline{N(t) = 1587.584244\ e^{-6.414600457\ 22.^t\ 25.^{-1.t}}}}$

Opgave 14 - Optimering

restart
with(Gym) :

Delopgave a

Omkredsen bestemmes. Man har

$O = 2 \cdot x + 2 \cdot y + \frac{\pi \cdot 2 \cdot x}{2}$

Delopgave b

Arealet bestemmes på baggrund af omkredsen. Arealet af en firkant er som bekendt $A = l \cdot b$. I dette tilfælde $A = 2\ x \cdot y$. Arealet af en cirkel er $A = \pi \cdot r^2$, som i dette tilfælde er $A = \pi \cdot x^2$, man har arealet;

$A = 2 \cdot x \cdot y - \frac{\pi \cdot x^2}{2}$, men man mangler y.

$100 = 2 \cdot x + 2 \cdot y + \frac{\pi \cdot 2 \cdot x}{2}$

$$100 = \pi\, x + 2\, x + 2\, y \qquad \textbf{(14.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for y}}$

$$y = -\frac{1}{2}\, \pi\, x - x + 50 \qquad \textbf{(14.2.2)}$$

Indsættes i arealformlen.

$A = 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\, \pi\, x - x + 50\right) - \frac{\pi \cdot x^2}{2} = -\frac{3}{2}\, \pi\, x^2 - 2\, x^2 + 100\, x$

Så arealformlen udtrykt ved x er $\underline{\underline{A = -\frac{3}{2}\, \pi\, x^2 - 2\, x^2 + 100\, x}}$

Delopgave c

Man har arealfunktionen. Den defineres.

$A(x) := -\frac{3}{2}\, \pi\, x^2 - 2\, x^2 + 100\, x$

$$x \rightarrow -\frac{3}{2}\pi x^2 - 2x^2 + 100x \quad \textbf{(14.3.1)}$$

$A'(x) = 0$

$$-3\pi x - 4x + 100 = 0 \quad \textbf{(14.3.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$7.448912771 \quad \textbf{(14.3.3)}$$

Den dobbelte afledede fortæller, om det er det maksimale man har.

$A''(7.448912771) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -13.425$

Her er $-13.425 < 0$, så er det her, det maksimale areal fås.

Det største areal er $\underline{\underline{x = 7.4489}}$