Matematik A, STX
24. maj 2019
Gammel reform

www.matematikhfsvar.page.tl
matematikuniverset@hotmail.com

Maj 2019

NB: Løsningerne er ikke garanteret fejlfrie. Løsningerne skal bruges til indlæring, så det handler om ikke at skrive af.

Delprøve 1

Opgave 1
Andengradsligningen løses.
$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25 = 5^2$
Dvs. to løsninger.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} \dfrac{7+5}{6} = \dfrac{12}{2} = 2 \\ \dfrac{7-5}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Dvs.
$x = \frac{1}{3} \vee x = 2$

Opgave 2
$A = \left|det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left|det\left(\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)\right| = |-3 \cdot 2 - 4 \cdot 7| = |-6 - 28| = |-34| = 34$
Dvs. arealet er 34.

Opgave 3
$f(x) = 4x - 6$
$g(x) = -3x + 5$

$h(x) = f(x) - 2 \cdot g(x) = 4x - 6 - 2 \cdot (-3x + 5) = 4x - 6 + 6x - 10 = 10x - 16$

Opgave 4
$\frac{k}{x+3} = 5 \Leftrightarrow k = 5 \cdot (x+3) \Leftrightarrow \frac{k}{5} = x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{k}{5} - 3$

Opgave 5
$f(x) = x^3 + 10 \cdot x$
Da både x^3 og x har positive konstanter, så er funktionen voksende, eftersom x^2 og k ikke er angivet i $f(x)$. Alternativt kan man vise det vha. diff. regning.

$f'(x) = 3x^2 + 10$ så er ligningen $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{10}{3}$ Denne ligning vil give komplekse løsninger $\Rightarrow$ funktionen er voksende eller aftagende. Ved fortegnsvariation i f.eks. $x = 1$ fås $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 3 + 10 = 13 > 0 \Rightarrow$ funktionen f er voksende.

Opgave 6
$f(x) = \frac{1}{4 \cdot x + 12}, x > -3.$
$\int f(x)\ dx = \int \frac{1}{4 \cdot x + 12}\ dx$
Lad $t = 4 \cdot x + 12 \Rightarrow dt = 4\ dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{4}$.
Integralet er

$$\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(t)}{4} + k$$

Heraf er $t = 4x + 12$, så

$\dfrac{\ln(4x+12)}{4} + k$ og $x > -3$ og $k \in \mathbb{R}$.

Delprøve 2

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$:

$Y := [8.2, 8.5, 9.1, 9.3, 9.6, 9.9, 10.8, 11.7, 12.3]$:

a)

$f(t) := ExpReg(X, Y, t)$:

$evalf[5](f(t))$

$$8.0708\ 1.0510^{t} \quad \textbf{(1)}$$

Dvs. $a = 1.051$ og $b = 8.0708$.

b)

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, efter år 2009 vil antallet af besøgende på danske museer, målt i mio. vokse med 5.1% pr. år.

c)

$T_2 = \dfrac{\ln(2.)}{\ln(1.051)}$

$$T_2 = 13.93482168 \quad \textbf{(2)}$$

Dvs. hver ca. 14 år fordobles besøgende på de danske museer ifølge modellen.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

$h(t) := 35.5\cdot\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + 4.5$:

a)

$h(0)$

$$40.0 \quad \textbf{(3)}$$

Væskehøjden er 40cm.

b)

$h'(1.5)$

$$-8.87500000 \quad \textbf{(4)}$$

Efter 1.5 minutter vil væskehøjden aftage med 8.875cm/min.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

a) Opstil en formel for volumen. OBS: $\tan(30) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$V = \left(3\cdot h + \frac{1}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot h\right)\right)\cdot 15$$

$$V = 45\,h + \frac{5\,h^2\,\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$

Indsæt $h = 4$.

$V = \left(3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 4\right)\right)\cdot 15$

$$V = 180 + 40\,\sqrt{3} \tag{6}$$

evalf[5](%)

$$V = 249.28 \tag{7}$$

Dvs. $V = 249.28\ dm^3$.

b)

$100 = \left(3\cdot h + \frac{1}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot h\right)\right)\cdot 15 \xrightarrow{\text{solve for h}}$

$\left[\left[h = -\frac{\left(9 + \sqrt{81 + 40\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{3}\right], \left[h = \frac{\left(-9 + \sqrt{81 + 40\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{3}\right]\right]$

evalf[5](%)

$$[[h = -12.274], [h = 1.8816]] \tag{8}$$

Dvs. vandhøjden skal være 1.8816dm.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

a)

$f(x) := 4\cdot x^3 + 8\cdot x^2 + 10\cdot x + 3$:

$\int f(x)\ \mathrm{d}x + C$

$$x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 5\,x^2 + 3\,x + C \tag{9}$$

$100 = 2^4 + \frac{8}{3}\cdot 2^3 + 5\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + C \xrightarrow{\text{solve for C}} \left[\left[C = \frac{110}{3}\right]\right]$

Så

$F(x) := x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 5\,x^2 + 3\,x + \frac{110}{3}$:

b)

$f(2)$

$$87 \tag{10}$$

Så

$y = 87\cdot(x - 2) + 100$

$$y = 87\,x - 74 \tag{11}$$

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

a)

$A := [10, 20, 0]$:; $B := [10, 0, 15]$:; $C := [0, 20, 15]$:

b)

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A\rangle$:; $\overrightarrow{AC} := \langle C - A\rangle$:;

Krydsprodukt giver

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} -300 \\ -150 \\ -200 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dvs.

$-300 \cdot (x-10) - 150 \cdot (y-20) - 200 \cdot (z-0) = 0$

$$-300\,x + 6000 - 150\,y - 200\,z = 0 \quad (13)$$

c)

Vinkel BAC svarer til at regne vinklen ud fra A.

$v = invCos\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{len(\overrightarrow{AB}) \cdot len(\overrightarrow{AC})}\right)$

$$v = 60.05091805 \quad (14)$$

Dvs. vinkel $BAC = v = 60.05^o$.

Arealet af trekanten ABC er

$T = \frac{1}{2} \cdot len(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$

$$T = 25\sqrt{61} \quad (15)$$

$evalf[5](\%)$

$$T = 195.26 \quad (16)$$

Opgave 12

$restart :; with(Gym) :$

a)

$y'(0) = 360000 - 0.004 \cdot 10^7$

$$D(y)(0) = 320000.000 \quad (17)$$

Hastigheden stiger med $320000 m^3$/time ved $t = 0$.

b)

$dsolve(\{y'(t) = 360000 - 0.004 \cdot y(t), y(0) = 10^7\}, y(t))$

$$y(t) = 90000000 - 80000000\,e^{-\frac{t}{250}} \quad (18)$$

$y(t) := 90000000 - 80000000\,e^{-\frac{t}{250}} :$

$y(48)$

$$90000000 - 80000000\,e^{-\frac{24}{125}} \quad (19)$$

$evalf[5](\%)$

$$2.3975\ 10^7 \quad (20)$$

Vandmængden efter 48 timer er $2.3975 \cdot 10^7 m^3$.

Opgave 13

$restart :; with(Gym) :$

a) H0: Lungebetændelsen er uafhængigt af vaccinationen.

$$OBS := \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 10 & 8 \\ 77 & 61 \end{bmatrix}:$$

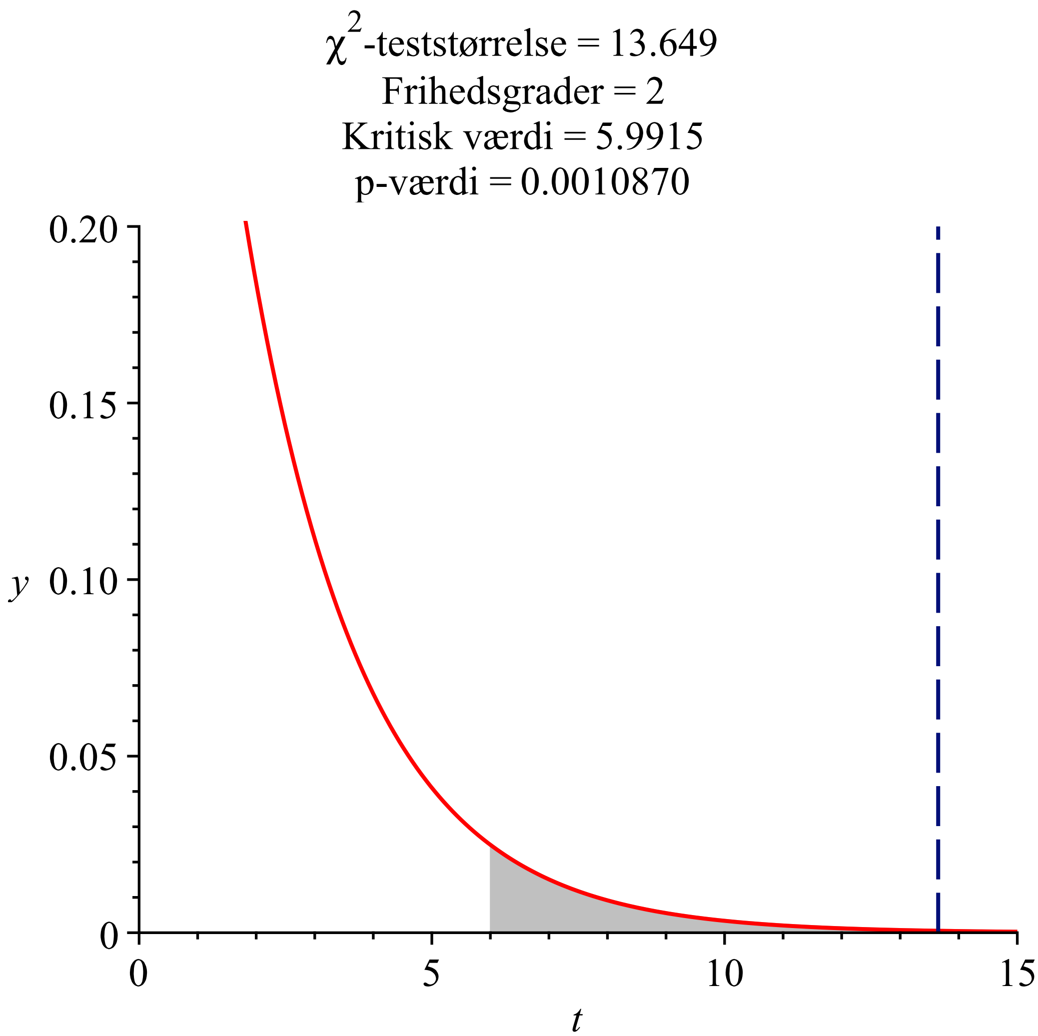
forventet(*OBS*)

$$\begin{bmatrix} 14. & 14. \\ 9. & 9. \\ 69. & 69. \end{bmatrix} \quad \textbf{(21)}$$

b)

En *U*-test.

ChiKvadratUtest(*OBS*)



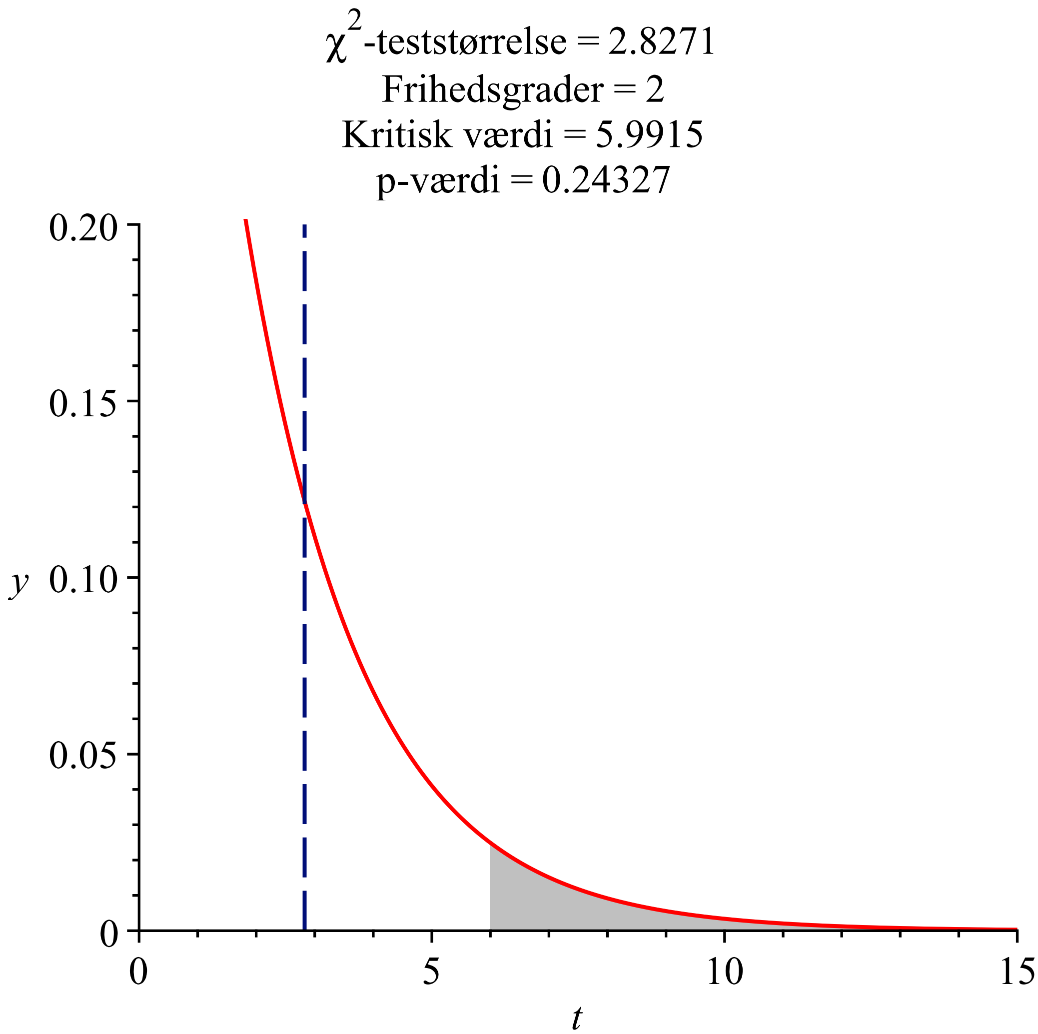
Da p-værdien er 0.001087<0.05 forkastes nulhypotesen. Sygdommen er afhængigt af, om man er vaccineret eller ej.

c)

De tomme felter bestemmes.

$$OBS2 := \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 11 \\ 88 & 82 \end{bmatrix}:$$

$ChiKvadratUtest(OBS2)$



Her er p-værdien større end 5% signifikansniveau, så nulhypotesen accepteres.
NB: 15 og 88 var tal der blot blev tilfældigt udvalgt og testet. Opgaven bad om et muligt eksempel.

Opgave 14
restart :; *with*(*Gym*) :
a)
Cirklens ligning er
$(x-6)^2+(y-k)^2=k^2$

$$(x-6)^2+(y-k)^2=k^2 \tag{22}$$

Hvis førsteaksen er tangent til cirklen, skal $y=0$ i cirklens ligning give en værdi af x.
$(x-6)^2+(0-k)^2=k^2$

$$(x-6)^2+k^2=k^2 \tag{23}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=6],[x=6]] \tag{24}$$

$\Rightarrow$ førsteaksen er tangent til cirklen. Tallet k forsvinder for hvilken som helst værdi.

b)

Dist-formlen anvendes og sættes lig k.

$\frac{|1\cdot 6+1\cdot k+(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=k$

$$\frac{|4+k|\sqrt{2}}{2}=k \tag{25}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$\left[\left[k=-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\right]\right] \tag{26}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[k=9.6564]] \tag{27}$$

Så for $k=9.6564$ er l tangent til cirklen.