الوجيز في الرياضيات

الجزء الاول

اعداد الاستاذ رائد الكرادي

شرح وافي للمادة
ملاحظات وحلول
وامثلة للمواضيع

حلول لتمارين الكتاب
طرق مبسطة في الحل
شرح خطوات الحل

رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بيـن ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشـر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الـى مجموعة قنواتنا التـدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطـرق الدراسـة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كـسر لشـوكة بعض المحسوبيـن علـى الكـادر التدريسي ممن يرفضـون نشـر ملازمهم والتعـاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كـادر الشـبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشـباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعـاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسـمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد

الفصل الأول ((الأعداد المركبة))

الأعداد الحقيقية ؟ هل تكفي ؟؟

درسنا في المراحل السابقة مجموعة الأعداد الحقيقية والعمليات عليها كما درسنا حل المعادلات من الدرجة الثانية مثلا :-

$1)\ x^2 + 10x + 25 = 0 \qquad 2)\ x^2 - 4 = 0 \qquad 3)\ \frac{1}{4}x^2 - 16=0$

$4)\ ax^2 + bx + c =0 \quad , a , b , c \in R , a \neq 0$ **وبصورة عامة**

وغيرها الكثير ودائما ما كنا نتوقف عندما تكون المعادلة عبارة عن مجموع مربعين مثل المعادلات الآتية :

$1)\ x^2 +1=0 \qquad 2)\ 9x^2 +16 = 0$

كذلك عندما تكون المعادلة ثلاثية الحدود لا تتحلل إلا بالدستور لتعطي قيما سالبة تحت الجذر التربيعي كذلك فرق أو مجموع مكعبين غالبا ما كان الحل يتكون من قوسين احدهما يعطي ناتج مباشر والأخر لا يتحلل إلا بالدستور لتعطي قيما سالبة تحت الجذر التربيعي مما يجعل إهمالها هو الحل المتوفر ومن أمثلتها :

$1)\ x^3 - 1 = 0 \qquad 3)\ x^2 +4x + 5 = 0 \qquad 3)\ x^2 + x +1 = 0$

أين المشكلة ؟؟

لنأخذ مثلا المعادلة $x^2 + 1 = 0$ لو أردنا إيجاد مجموعة حل المعادلة سنتبع الخطوات الآتية :

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ **وبجذر الطرفين**

$x = \mp\sqrt{-1} \qquad ????$

لاحظ لو ان الكلام عن الأعداد الحقيقية سنعتبر $\sqrt{-1} \notin R$ ومجموعة الحل خالية .

ما هو الحل ؟؟

سنلجأ إلى اعتبار أن $\sqrt{-1}$ أصغر وحدة لبناء مجموعة أعداد جديدة يكون فيها الجذر التربيعي للعدد السالب مقبول ولتسهيل التعامل مع هذه الجذور سنرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز i وسنسميه (الوحدة التخيلية) وهو ليس من الأعداد التي تقترن بالعد أو القياس لكنه يحقق الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية عدا خاصية الترتيب.

** لذا نستنتج انه يمكن كتابة الجذور التربيعية للعدد الحقيقي السالب بدلالة i لاحظ الأمثلة الآتية :

** أي بصورة عامة كل سالب تحت الجذر التربيعي يرفع ويوضع بدله i خارج الجذر

$1)\ \sqrt{-25} = 5\,i$

$2)\ \sqrt{-2} = \sqrt{2}\ i$

$3)\ \sqrt{\frac{-16}{9}} = \frac{4}{3}\,i$

$4)\ \sqrt{\frac{-7}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4(2)}}\ i = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\ i$

$5)\ \sqrt{-52} = \sqrt{4(13)}\ i = 2\sqrt{13}\ i$

والآن لاحظ المثال الآتي :

مثال **حل المعادلة** $x^2 + x + 1 = 0$

الحل **تحل مثل هذه المعادلة بالدستور حيث** $x^2 + x + 1 = 0$

تقارن مع المعادلة العامة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1\mp\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}\mp\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

** نجزئ البسط

نضع

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,\sqrt{-1}$

نضع $\sqrt{-1} = i$

**** نلاحظ من المثال إن الناتج يتكون من جزء خالي من (i) وهو $\frac{-1}{2}$ وجزء يحتوي (i) وهو $\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$ بينما الأمثلة السابقة كانت عدد يحوي (i) فقط ، كذلك كنا قد درسنا الأعداد الحقيقية وهي كما نعلم لا تحوي (i) لذا فان:**

يسمى العدد بالصورة $a + bi$ حيث $a , b \in R$ و $\sqrt{-1} = i$ بالعدد المركب و يسمى a الجزء الحقيقي ، ويسمى b الجزء التخيلي وتسمى الصيغة ($a + bi$) بالصيغة العادية أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

وسنطلق على المجموعة التي تحوي الأعداد من هذا النوع اسم ((مجموعة الأعداد المركبة)) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$

**** يكتب العدد حقيقي كعدد مركب بالصورة العادية حيث $b = 0$ أي ان مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة و يسمى العدد الذي يكتب بالصورة $a = a + 0i$ عدد حقيقي بحت ، أما العدد الذي لا يحتوي على جزء خالي من i يكتب بالصورة $bi = 0 + bi$ يسمى عدد تخيلي بحت .**

**** يكتب العدد المركب $c = a + bi$ كزوج مرتب وحيد بالشكل (a , b) لذا إذا كان العدد حقيقي بحت يكتب على شكل زوج مرتب بالصورة (a , 0) وان كان تخيلي بحت يكتب على شكل زوج مرتب بالصورة (0 , b) .**

مثال **أكتب بالصيغة الجبرية أو العادية كل من الأعداد الآتية :**

1) $-9i = 0 - 9i$

2) $4 = 4 + 0i$

3) $-8 - \sqrt{-13} = -8 - \sqrt{13}\; i$

4) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+\sqrt{4}\; i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,i = 1 + 1i$

مثال اكتب كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد الآتية :

الجزء التخيلي هو 3	الجزء الحقيقي هو -2	$-2 + 3i$	1
الجزء التخيلي هو $\sqrt{3}$	الجزء الحقيقي هو x	$x + \sqrt{3}\, i$	2
الجزء التخيلي هو 1	الجزء الحقيقي هو 0	i	3
الجزء التخيلي هو 0	الجزء الحقيقي هو 7	7	4
الجزء التخيلي هو $\frac{-2}{\sqrt{5}}$	الجزء الحقيقي هو 0	$\frac{-2}{\sqrt{5}}\, i$	5
الجزء التخيلي هو $-3a$	الجزء الحقيقي هو $4x$	$4x - 3ai$	6

** لاحظ أن الجزء الغير موجود من العدد (حقيقي أو تخيلي) يوضع صفر كذلك الإشارة التي يحملها الجزء مهمة جدا يجب وضعها له كما إن الجزء التخيلي يؤخذ بدون i

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

قوى الوحدة التخيلية i

نعلم ان $i^2 = -1$ وذلك لان $i = \sqrt{-1}$ ومن ذلك لاحظ الأمثلة الآتية :

1) $i^2 = -1$

2) $i^3 = i(i^2) = i(-1) = -i$

3) $i^4 = i^2(i^2) = -1(-1) = 1$

من $i^4 = 1$ فعند رفع i لأي قوة أعلى من 4 نجزئ الأس إلى عدد من مضاعفات 4 والباقي هو القوة الجديدة لـ i أو (نقسم الأس على 4 والباقي من القسمة هو الأس الجديد لـ i) تابع الأمثلة أدناه:

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

أمثلة

1) $i^5 = i$ نقسم 5 على 4 والباقي 1 هو أس i الجديد

2) $i^6 = i^2 = -1$ نقسم 6 على 4 والباقي 2 هو أس i الجديد

3) $i^7 = i^3 = -i$ نقسم 7 على 4 والباقي 3 هو أس i الجديد

4) $i^{47} = i^3 = -i$ نقسم 47 على 4 والباقي 3 هو أس i الجديد

5) $i^{80} = i^0 = 1$ نقسم 80 على 4 والباقي 0 هو أس i الجديد

6) $i^{150} = i^2 = -1$ نقسم 50 على 4 والباقي 2 هو أس i الجديد

7) $i^{1193} = i$ نقسم 93 على 4 والباقي 1 هو أس i الجديد

**الأعداد اكبر من 100 نقسم فقط الآحاد والعشرات على 4 والباقي هو الأس الجديد .

8) $i^{-43} = \frac{1}{i^{43}} = \frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i$

9) $i^{4n} = 1 \quad n \in N$

10) $i^{8n+1} = i \quad n \in N$

** الأسس السالبة ننزل العدد i إلى المقام ليصبح اسه موجب ونبسط ثم نعوض في البسط i^4 بدل 1 ونستخدم خاصية عند القسمة تطرح الأسس .

** الأعداد التي ترفع لأس ثابت مضروب بمضاعفات العدد 4 مضاف إليه أو مطروح منه يحذف الثابت والعدد المتبقي (المضاف أو المطروح مع إشارته) يكون الأس الجديد.

** (طريقة أخرى) يمكن تجزئة الأس إلى مضاعفات 4 مضروب بباقي الأس أو مضاعفات زوجية للعدد 2 مضروب بباقي الأس ثم نجد قيمة المتبقية حسب الأس المتبقي (يفضل للسهولة استخدام الطريقة السابقة)

1) $i^{5} = i^{4}\ (i) = 1\ (i) = i$

2) $i^{6} = i^{4}\ (i^{2}) = 1(-1) = -1$

3) $i^{7} = i^{4}\ (i^{3}) = 1(-i) = -i$

4) $i^{47} = i^{44}\ (i^{3}) = 1(-i) = -i$

5) $i^{80} = (i^{2})^{40} = 1$

6) $i^{150} = (i^{2})^{75} = -1$

7) $i^{1193} = i^{1192}\ (i) = (i^{2})^{596}(i) = (-1)^{596}(i) = i$

8) $i^{-43} = \frac{1}{i^{43}} = \frac{1}{(i^{2})^{20}\ (i^{3})} = \frac{i^{4}}{i^{3}} = i$

9) $i^{4n} = (i^{2})^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad n \in N$

10) $i^{8n+1} = (i^{2})^{4n}\ i = (-1)^{2n}\ i = i \quad n \in N$

رحلة التفوق
في
السادس

تساوي عددين مركبين

إذا تساوى عددان مركبان فأن جزءاهما الحقيقيين متساويان و جزآهما التخيليين متساويان والعكس صحيح أي أن :

ليكن $z = a_1 + i b_1$ ، $c = a_2 + i b_2$ فأن : $c = z \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ \text{and} \ b_1 = b_2$

** هذا الموضوع مهم جدا وسنتطرق إليه كثيرا خلال هذا الفصل ولأكثر من مرة .

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد قيم x , y الحقيقية في كل مما يأتي :

1) $y + xi = -7 + i$

$\therefore\ y = -7 \qquad \therefore\ x = 1$

2) $2x + 5yi = 2 + 10i$

$\therefore\ 2x = 2 \Longrightarrow x = \frac{2}{2} = 1 \qquad \therefore\ 5y = 10 \Longrightarrow y = \frac{10}{5} = 2$

3) $3x - 1 + 2yi = 5 - i$

$\therefore\ 3x - 1 = 5 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2 \qquad \therefore\ 2y = -1 \Longrightarrow y = \frac{-1}{2}$

4) $(1 - 8x) + i = 3 - (2y + 5)\ i$

$\therefore\ 1 - 8x = 3 \Longrightarrow -8x = 2 \Longrightarrow x = \frac{-1}{4}$

$\therefore\ -(2y + 5) = 1 \Longrightarrow -2y - 5 = 1 \Longrightarrow -2y = 6 \Longrightarrow y = -3$

5) $(3x - y) + (2x + y)\ i = 6 - i$

$\therefore\ 3x - y = 6$ .... (1)

$\therefore\ 2x + y = -1$ .... (2) بالجمع

$5x \quad = 5 \Longrightarrow x = 1$ نعوض في (1) $\Longrightarrow 3 - y = 6 \Longrightarrow -y = 3 \Longrightarrow y = -3$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولا :جمع الأعداد المركبة

لجمع عددين مركبين يجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي أي بصورة عامة :

إذا كان : $z = x + yi$ ، $c = a + bi$ **فإن :**

$$c + z = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)\,i$$

مثال **أوجد ناتج كل مما يأتي :**

1) $(1 + 2i) + (4 + i) = (1 + 4) + (2 + 1)\,i = 5 + 3i$

2) $(1 - 7i) + (-9 - 2i) = (1 - 9) + (-7 - 2)\,i = -8 - 9\,i$

3) $(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i) + (2\sqrt{3} - 7\sqrt{2}i) = (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + (3\sqrt{2} - 7\sqrt{2})\,i = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\;i$

4) $7 + (4 + i) = (7 + 4) + i = 11 + i$

5) $-5\sqrt{2} + (\sqrt{2} + 2i) = (-5\sqrt{2} + \sqrt{2}) + 2\,i = -4\sqrt{2} + 2i$

6) $17i + (4 + 21i) = 4 + (17 + 21)\,i = 4 + 38i$

7) $-18\,i + (51 + i) = 51 + (-18 + 1)\,i = 51 - 17i$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال :عودة لتساوي عددين **أوجد قيم x , y الحقيقية في كل مما يأتي :**

1) $x + yi = (1 - 7i) + (3 + 2i)$ **نجد ناتج الجمع ثم نكمل الحل**

$x + yi = 4 - 5i \quad \Rightarrow \quad \therefore\; x = 4 \quad \therefore\; y = -5$

2) $(3x - 7yi) + (1 + 4i) = (8 - i)$ **نرتب باستخدام التجميع ثم نكمل الحل**

$(3x + 1) + (-7y + 4)\,i = (8 - i)$

$\therefore\; 3x + 1 = 8 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$

$\therefore\; -7y + 4 = -1 \Rightarrow -7\,y = -5 \Rightarrow y = \frac{5}{7}$

رحلة التفوق
في
السادس

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

خواص عملية الجمع

تحقق عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة الخواص الاتية : $\forall\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

1) **الجمع يحقق الخاصية الابدالية أي أن** $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$

2) **الجمع يحقق الخاصية التجميعية أي أن** $(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$

3) **العنصر المحايد لعملية الجمع هو الصفر ونرمز له e حيث :** $e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

4) **النظير الجمعي** $\forall\; c \in \mathbb{C}$ **حيث أن** $c = a + bi$

يوجد عدد $-c = (-a - bi)$ **يسمى النظير الجمعي للعدد c (نفس العدد بتغيير اشارتي جزأيه) حيث أن :**

$c + (-c) = a + bi + (-a - bi) = 0 + 0i$ (**لاحظ الناتج هو المحايد الجمعي**)

** لاحظ في الأمثلة المجاورة أن جمع أي عدد مركب مع نظيره الجمعي فأن الناتج = 0 (العنصر المحايد) .

** كذلك في حالة عددين مركبين مجموعهما (صفر) فإن أحدهما نظير جمعي للآخر.

1) $(5 - 2i) + (-5 + 2i) = 0$

2) $(3\sqrt{2} + 4i) + (-3\sqrt{2} - 4i) = 0$

3) ما قيمة $c \in \mathbb{C}$ حيث :

$c + (-7 + 3i) = 0$

الحل : هي $c = 7 - 3i$

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

ثانيا: طرح الأعداد المركبة

لطرح عدد مركب من عدد مركب نضيف النظير الجمعي للعدد المطروح ونجمع لاحظ الأمثلة الآتية :

** لاحظ انه يمكن الحل بطريقة ابسط وذلك بإدخال الإشارة السالبة على القوس الذي بعدها ونغير الإشارات ثم نجمع مباشرة.

1) $(5 - 2i) - (2 + 3i) = (5 - 2i) + (-2 - 3i)$

$= 3 - 5i$

2) $(3\sqrt{3} + 7i) - (-2\sqrt{3} + i) = (3\sqrt{3} + 7i) + (2\sqrt{3} - i)$

$= 5\sqrt{3} + 6i$

مثال أوجد قيمة $x \in \mathbb{C}$ في المعادلة الآتية :

$(5 - 3i) + x = 2 + 7i$

الحل

** نعزل المتغير x في جهة والأعداد في جهة من المساواة وذلك أما بإضافة النظير الجمعي أو بنقل العدد المركب وتغيير إشارات كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي .

$(5 - 3i) + x = 2 + 7i$

$x = 2 + 7i - (5 - 3i)$

$x = 2 + 7i - 5 + 3i$

$x = -3 + 10i$

مثال : عودة لتساوي عددين أوجد قيم x , y الحقيقية في كل مما يأتي :

1) $x + yi = (3 - i) - (4 + 7i)$ نجد ناتج الطرح ثم نكمل الحل

$x + yi = (3 - i) - 4 - 7i$

$x + yi = -1 - 8i$

$\therefore\ x = -1 \qquad \therefore\ y = -8$

2) $(2x - 5yi) + (2 + 9i) = (6 - i)$ ننقل العدد ونطرح ثم نكمل الحل

$(2x - 5yi) = (6 - i) - (2 + 9i)$

$(2x - 5yi) = (6 - i) - 2 - 9i$

$(2x - 5yi) = 4 - 10i$

$\therefore 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore -5y = -10 \Rightarrow y = \frac{-10}{-5} = 2$

3) $(x - yi) + (3 - i) = (7 - 2i)$ واجب//

4) $(-x + 5yi) + (2 + 3i) = 0$

5) $(x - 2yi) - (6 - 11i) = -i$

رحلة التفوق في السادس @

ثالثا : ضرب الأعداد المركبة

عند ضرب عددين مركبين يمكن ان نستخدم خاصية التوزيع و نرتب مع مراعاة إن : $i^2 = -1$

أمثلة

1) $(3+2i)(5+3i) = 15+9i+10i+6i^2$ خاصية التوزيع
$= 15+19i+6(-1)$ $i^2 = -1$
$= 15+19i-6 = 9+19i$ جمع الأجزاء التخيلية والأجزاء الحقيقية

2) $(5-2i)^2 = 25-20i+4i^2$ نتخلص من القوس كمربع حدانية
$= 25-20i+4(-1)$ $i^2 = -1$
$= 25-20i-4 = 21-20i$ جمع الأجزاء الحقيقية

3) $-2(1-7i) = -2+14i$ ضرب مباشر بالتوزيع

4) $6i(3+2i) = 18i+12i^2$
$= 18i+12(-1) = 18i-12 = -12+18i$

5) $(-2i)(1-3i)^2 = (-2i)(1-6i+9i^2)$
$= (-2i)(1-6i+9(-1))$
$= (-2i)(1-6i-9)$
$= (-2i)(-8-6i) = 16i+12i^2$
$= 16i+12(-1) = -12+16i$

6) $(-3i)(1-2i)^2$ واجب

7) $(1-i)^2(1+i)^2$ واجب

8) $(2-3i)^2(5+i) = (4-12i+9i^2)(5+i)$
$= (4-12i+9(-1))(5+i)$
$= (4-12i-9)(5+i)$
$= (-5-12i)(5+i)$
$= -25-5i-60i-12i^2$
$= -25-65i-12(-1) = -25-65i+12 = -13-65i$

9) $(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{4}i^2$
$= \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

10) $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac+adi+bci-bd$
$= ac-bd+adi+bci = (ac-bd)+(ad+bc)i$

ومن خلال المثال الأخير يمكن التعميم يمكن إيجاد حاصل الضرب من خلال العلاقة الآتية كطريقة أخرى :

إذا كان : $z_1 = a+bi$ ، $z_2 = c+di$ فأن :

$$z_1 . z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

خواص عملية الضرب

تحقق عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة الخواص الاتية :

$$\forall\, c_1 , c_2 , c_3 \in \mathbb{C}$$

1) الضرب يحقق الخاصية الابدالية أي أن $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$

2) الضرب يحقق الخاصية التجميعية أي أن $(c_1 \times c_2) \times c_3 = c_1 \times (c_2 \times c_3)$

3) العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1 حيث : $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$

4) النظير الضربي :

$$\forall\, c \in \mathbb{C} , c \neq 0 + 0i \;\exists\, z \neq 0 + 0i : c\,z = z\,c = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{c}$$

أي أن لكل عدد مركب عدا الصفر نظير ضربي لا يساوي الصفر وهو مقلوب العدد المركب (وهو عدد مركب جديد) عند ضربهما ببعض ينتج العنصر المحايد لعملية الضرب .

ولإيجاد النظير الضربي للعدد المركب بالصورة الاعتيادية (الجبرية) نحتاج إلى مفهوم جديد وهو مرافق العدد المركب والذي يستخدم أيضا في تعريف قسمة الأعداد المركبة .

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z \in \mathbb{C}$ حيث $z = a + b\,i$ هو : $\bar{z} = a - b\,i$

** (أي نغير اشارة الجزء التخيلي فقط)هذا الموضوع مهم جدا وسنتطرق إليه كثيرا خلال هذا الفصل ولأكثر من مرة .

ومن أهم استخدامات المرافق استخدامه في إيجاد النظير الضربي للعدد المركب وذلك بضرب البسط والمقام بمرافق المقام ، ويستخدم للتخلص من الأعداد المركبة في المقام (قسمة الأعداد المركبة) بنفس الطريقة .

أمثلة لاحظ الأمثلة الآتية لإيجاد المرافق :

** العدد الحقيقي مرافق نفسه (من التعريف)
** يجب مراعاة الترتيب للعدد المركب أي تقدم وتأخر الجزء التخيلي كون إشارته هي التي تتغير.

1) $\overline{3 - 2\,i} = 3 + 2\,i$

2) $\overline{5\,i + 3} = -5i + 3$

3) $\overline{\frac{2}{\sqrt{5}}\,i} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,i = 0 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,i$

4) $\overline{-1} = -1 = -1 + 0i$

5) $\overline{8} = 8 = 8 + 0\,i$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

خواص المرافق

ليكن $c , c_1 , c_2 \in \mathbb{C}$ حيث $c = a + b\,i$ فأن :

1) $\overline{c_1 \mp c_2} = \overline{c_1} \mp \overline{c_2}$ المرافق يتوزع على الجمع والطرح

2) $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$ المرافق يتوزع على الضرب

3) $\overline{\overline{c}} = c$ مرافق المرافق هو العدد نفسه

4) $c . \overline{c} = a^2 + b^2$ ضرب العدد في مرافقة = مربع الحقيقي + مربع التخيلي

5) $c + \overline{c} = 2a$ جمع العدد مع مرافقة = ضعف الحقيقي

6) $c - \overline{c} = 2b\,i$ طرح المرافق من العدد = ضعف التخيلي

7) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} \;, c_2 \neq 0$ المرافق يتوزع على القسمة

مثال إذا كان $c_1 = 4 + 3i , c_2 = 2 - i$ فتحقق من أن :

1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ 2) $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$ 3) $\overline{\overline{c_1}} = c_1$ 4) $c_1 . \overline{c_1} = a^2 + b^2$

الحل

1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ نتحقق من الجمع أولا ويترك الطرح كواجب بنفس الطريقة

نجد ناتج الطرف الأيسر : $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(4 + 3i + 2 - i)} = \overline{6 + 2i} = 6 - 2i$

نجد ناتج الطرف الأيمن: $\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(4 + 3i)} + \overline{(2 - i)} = 4 - 3i + 2 + i = 6 - 2i$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

2) $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$

نجد ناتج الطرف الأيسر : $\overline{c_1 . c_2} = \overline{(4 + 3i)(2 - i)} = \overline{(8 - 4i + 6i - 3i^2)}$

$= \overline{(8 + 2i + 3)} = \overline{(11 + 2i)} = 11 - 2i$

نجد ناتج الطرف الأيمن: $\overline{c_1} . \overline{c_2} = \overline{(4 + 3i)}\ \overline{(2 - i)} = (4 - 3i)(2 + i)$

$= (8 + 4i - 6i - 3i^2)$

$= (8 - 2i + 3) = 11 - 2i$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

3) $\overline{\overline{c_1}} = c_1$

نأخذ الطرف الأيسر وبعد التبسيط ينتج الطرف الأيمن : $\overline{\overline{c_1}} = \overline{\overline{(4 + 3i)}} = \overline{(4 - 3i)} = (4 + 3i)$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

4) $c_1 . \overline{c_1} = a^2 + b^2$

نجد ناتج الطرف الأيسر : $c_1 . \overline{c_1} = (4 + 3i)\overline{(4 + 3i)} = (4 + 3i)(4 - 3i)$

$= (16 - 12i + 12i - 9i^2) = (16 + 9) = 25$

نجد ناتج الطرف الأيمن: $a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

مثال إذا كان $c_1 = 2 + 3i , c_2 = 1 - 2i$ فتحقق من أن : ((واجب))

1) $c_1 - \overline{c_1} = 2b\,i$ 2) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$ 3) $c_1 + \overline{c_1} = 2a$

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

** الآن لنستخدم المرافق لإيجاد النظير الضربي للعدد المركب وذلك بضرب البسط والمقام بمرافق المقام .

مثال أوجد النظير الضربي للعدد $c = a + bi$

الحل النظير الضربي :

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a + b\,i}\right)\left(\frac{a - b\,i}{a - b\,i}\right) = \frac{a - b\,i}{a^2 - abi + abi - b^2i^2} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

*** أي يمكن إيجاد النظير الضربي للعدد المركب c بضرب البسط والمقام بمرافق المقام أو باستخدام القاعدة الآتية بصورة مباشرة:**

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a + b\,i} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i$$

مثال

أوجد النظير الضربي للعدد $c = 3 - 7\,i$

الحل

لاحظ إن ضرب العدد المركب بمرافقه يعطي مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{1}{3 - 7\,i}\right)\left(\frac{3 + 7\,i}{3 + 7\,i}\right)$$

$$= \frac{3 + 7\,i}{9 + 49} = \frac{3 + 7\,i}{58} = \frac{3}{58} + \frac{7\,i}{58}$$

http://raeed.mathsboard.com

مثال

إذا كان $c = 2 - i$ ، $z = 3 + 2\,i$ فأوجد قيمة $\overline{c^2 - 2\,z^2}$

الحل

نجد أولا قيمة المقدار ثم نجد مرافقه

$$c^2 - 2z^2 = (2 - i)^2 - 2(3 + 2i)^2$$

$$= (4 - 4i + i^2) - 2(9 + 12\,i + 4i^2)$$

$$= (4 - 4i - 1) - 2(9 + 12\,i - 4)$$

$$= (3 - 4i) - 2(5 + 12\,i)$$

$$= 3 - 4i - 10 - 24i = -7 - 28i \Longrightarrow \overline{c^2 - 2\,z^2} = \overline{-7 - 28i} = -7 + 28i$$

http://raeed.mathsboard.com

مثال : عودة لتساوي عددين

أوجد قيم x , y الحقيقية في كل مما يأتي :

1) $x + yi = (1 - i)(1 + 2i)$ نجد ناتج الضرب ونبسط ثم نكمل الحل

$x + yi = 1 + 2i - i - 2i^2$

$x + yi = 1 + 2i - i + 2$

$x + yi = 3 + i$

$\therefore\ x = 3 \qquad \therefore\ y = 1$

2) $\dfrac{3x - 2yi}{(1 + 4i)} = 2 - i$ يفضل أن نستخدم خاصية ضرب الطرفين = ضرب الوسطين ثم نكمل الحل

$3x - 2yi = (2 - i)(1 + 4i)$

$3x - 2yi = 2 + 8i - i - 4i^2$

$3x - 2yi = 2 + 7i + 4$

$3x - 2yi = 6 + 7i$

$\therefore 3x = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{3} = 2$

$\therefore -2y = 7 \Longrightarrow y = \dfrac{-7}{2}$

3) $\dfrac{x + 3yi}{(1 + 2i)} = 2 - 3i$ واجب

4) $\frac{(1+2i)}{x+3yi} = \frac{-2}{(1+i)}$ يفضل أن نستخدم خاصية ضرب الطرفين = ضرب الوسطين ثم نكمل الحل

$-2x-6yi = 1+i+2i+2i^2$

$-2x-6yi = 1+3i-2$

$-2x-6yi = -1+3i$

$\therefore -2x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ $\therefore -6y=3 \Rightarrow y=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

* إذا كان العددان المركبان مترافقان فإن احدهما = مرافق الآخر ((أي نجد المرافق مثلا للعدد الأول ونساويه مباشرة للعدد الثانى)) كما فى الأمثلة الآتية :

مثال إذا كان $\frac{2-i}{i}$ ، $\frac{x+y\,i}{1+3i}$ مترافقان فأوجد قيم $x, y \in R$

الحل أي نجد مرافق احدهما = العدد الآخر

$$\frac{x+y\,i}{1+3i} = \overline{\left(\frac{2-i}{i}\right)}$$

$\frac{2-i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-2i+i^2}{-i^2} = \frac{-2i-1}{-(-1)} = -1-2i$ نبسط العدد للصورة الاعتيادية

$\therefore \frac{x+y\,i}{1+3i} = -1+2i$ نعوض مرافقه في المعادلة ثم نبسط

$x+yi = (-1+2i)(1+3i)$

$x+yi = -1-3i+2i+6i^2$

$x+yi = -1-i-6$

$x+yi = -7-i \Rightarrow \therefore x=-7$, $\therefore y=-1$

<~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~>http://raeed.mathsboard.com<~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~><~>

مثال إذا كان $\frac{3-i}{1-i}$ ، $\frac{2x-y\,i}{1+2i}$ مترافقان فأوجد قيم $x, y \in R$

الحل نجد مرافق احدهما = العدد الآخر

$$\frac{2x-y\,i}{1+2i} = \overline{\left(\frac{3-i}{1-i}\right)}$$

$\frac{3-i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i-i-i^2}{1+1}$ نبسط العدد للصورة الاعتيادية

$= \frac{3+2i+1}{2} = \frac{4+2i}{2} = \frac{4}{2}+\frac{2}{2}i = 2+i$

$\therefore \frac{2x-y\,i}{1+2i} = 2-i$ نعوض مرافقه في المعادلة ثم نبسط

$2x-yi = (2-i)(1+2i)$

$2x-yi = 2+4i-i-2i^2$

$2x-yi = 2+3i+2$

$2x-yi = 4+3i$

$\therefore 2x=4 \Rightarrow x=2$, $\therefore -y=3 \Rightarrow y=-3$

** عند قسمة عدد مركب على عدد مركب نضرب البسط والمقام بمرافق المقام مع مراعاة إن ضرب العدد المركب في مرافقه = مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي لاحظ الأمثلة الآتية :

مثال اوجد ناتج كلا مما يأتي بالصيغة العادية (الجبرية) للعدد المركب :

1) $\frac{3-4i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i-4i-8i^2}{1+4} = \frac{3+2i+8}{5} = \frac{11+2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5} i$

2) $\frac{7+i}{3i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-7i-i^2}{3(-i^2)} = \frac{-7i+1}{3} = \frac{1-7i}{3} = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} i$

3) $\frac{1-3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-3i+3i^2}{1+1} = \frac{1-4i-3}{2} = \frac{-2-4i}{2} = \frac{-2}{2} - \frac{4}{2} i = -1 - 2i$

4) $2(1+i)^{-2} = \frac{2}{(1+i)^2} = \frac{2}{1+2i+i^2} = \frac{2}{1+2i-1}$

$= \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i = 0 - i$

5) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)^3 (1-i)^2} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 \cdot \frac{1}{(1-i)^2} = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^3 \cdot \frac{1}{(1-i)^2}$

$= \left(\frac{1+i+i-1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-2i-1}$

$= \left(\frac{2i}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{-2i}$

$= (i)^3 \cdot \frac{1}{-2i} = \left(\frac{-i^2}{2}\right) = \frac{1}{2} + 0\, i$

رحلة التفوق
في
السادس

6) $(3-2i)^{-2}$ واجب

↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭http://raeed.mathsboard.com↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭

التحليل في الأعداد المركبة

توجد عدة حالات منها :

1) في حالة مجموع مربعين نضع بدل الجمع طرح ونضرب الحد الثاني بـ(i^2) لاحظ الأمثلة الآتية :

مثال حلل كل مما يأتي إلى عاملين :

1) $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a - bi)(a + bi)$

2) $x^2 + 16 = x^2 - 16 i^2 = (x - 4i)(x + 4i)$

3) $4y^2 + 9 = 4y^2 - 9 i^2 = (2y - 3i)(2y + 3i)$

2) في حالة مجموع مكعبين أو الفرق بينهما مع وجود i في احد الحدود نبدل العملية ونبدل i إلى(i^3) ثم نحلل أو نضع i^4 في الحد الخالي من i ويخرج عامل مشترك لاحظ الأمثلة :

مثال حلل كل مما يأتي :

1) $a^3 + b^3 i = a^3 - b^3 i^3 = (a - bi)(a^2 + abi + b^2 i^2)$

$= (a - bi)(a^2 + abi - b^2)$

2) $2x^3 - 16i = 2(x^3 - 8i) = 2(x^3 + 8i^3) = 2(x + 2i)(x^2 - 2xi + 4i^2)$

$= 2(x + 2i)(x^2 - 2xi - 4)$

3) $y^3 i - 1 = y^3 i - i^4 = i(y^3 - i^3) = i(y - i)(y^2 + yi + i^2)$

$= i(y - i)(y^2 + yi - 1)$

4) $3y^3 + 24i =$ واجب

3) في بعض الحدوديات الثلاثية مع وجود i في الحد الوسط نبدل إشارة الحد الأخير ونضربه بـ(i^2) ثم نحلل لاحظ الأمثلة :

مثال حلل كلا مما يأتي :

1) $y^2 + 4iy + 5 = y^2 + 4iy - 5i^2 = (y + 5i)(y - i)$

2) $3x^2 - 7ix - 4 = 3x^2 - 7ix + 4i^2 = (3x - 4i)(x - i)$

3) $x^2 + 2xyi + 8y^2 = x^2 + 2xyi - 8y^2i^2 = (x + 4yi)(x - 2yi)$

4) في بعض الحدوديات الثلاثية نجعل الحدودية مربع كامل بإضافة وطرح المقدار الاتي بعد الحد الثاني $(\frac{1}{2}$ معامل x $)^2$ ثم نكمل الحل لاحظ الأمثلة أدناه :

مثال حلل كلا مما يأتي :

1) $x^2 - 4x + 29 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 29$ بإضافة وطرح المقدار $(\frac{1}{2}$ معامل x$)^2$

$= (x - 2)^2 + 25$ مربع كامل ونبسط المتبقي

$= (x - 2)^2 - 25i^2$ نبدل الجمع إلى طرح ونضع i^2 للحد الأخير

$= (x - 2 - 5i)(x - 2 + 5i)$ نحلل فرق بين مربعين

2) $y^2 - 6y + 13 = y^2 - 6y + 9 - 9 + 13$ بإضافة وطرح المقدار $(\frac{1}{2}$ معامل y$)^2$

$= (y - 3)^2 + 4$ مربع كامل ونبسط المتبقي

$= (y - 3)^2 - 4i^2$ نبدل الجمع إلى طرح ونضع i^2 للحد الأخير

$= (y - 3 - 2i)(y - 3 + 2i)$ نحلل فرق بين مربعين

5) إن أمكن تحليل الأعداد إلى مجموع أو طرح مربعين و نحول الجمع إلى طرح ونضرب العدد الثاني بـ(i^2) ثم نحلل لاحظ الأمثلة الآتية :

مثال حلل إلى عاملين أو أكثر في $\mathbb{C}$ على :

1) $50 = 1 + 49 = 1 - 49i^2 = (1 - 7i)(1 + 7i)$

2) $37 = 36 + 1 = 36 - i^2 = (6 - i)(6 + i)$

3) $\frac{74}{9} = \frac{25+49}{9} = \frac{25}{9} - \frac{49}{9}i^2 = (\frac{5}{3} - \frac{7}{3}i)(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}i)$

4) $15 = 16 - 1 = (4 - 1)(4 + 1) = 3(4 - i^2) = 3(2 - i)(2 + i)$

5) $26 = 2(13) = 2(4 + 9) = 2(4 - 9i^2) = 2(2 - 3i)(2 + 3i)$

6) $27 + i = 27 - i(i^2) = 27 - i^3 = (3 - i)(9 + 3i - 1) = (3 - i)(8 + 3i)$

مثال حلل إلى عدة عوامل في $\mathbb{C}$:

1) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$= (x^2 - 4)(x^2 - 4i^2)$

$= (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$

2) $z^4 + 10z^2 + 9 = (z^2 + 9)(z^2 + 1)$

$= (z^2 - 9i^2)(z^2 - i^2)$

$= (z - 3i)(z + 3i)(z - i)(z + i)$

مثال : عودة لتساوي عددين

أوجد قيم x , y الحقيقية في كل مما يأتي :

1) $\frac{x^2+ y^2}{x+yi} = 3 + 2i$

$\frac{x^2- y^2i^2}{x+yi} = 3 + 2i \Rightarrow \frac{(x - yi)(x + yi)}{(x+yi)} = 3 + 2i$

$x - yi = 3+2i \quad \therefore x = 3 , \therefore -y = 2 \Rightarrow y = -2$

2) $\frac{x^2+3x\,i+10}{x-2i} = -4 - 2yi$

$\frac{x^2+3x\,i-10i^2}{x-2i} = -4 - 2yi \Rightarrow \frac{(x-2i)(x+5i)}{(x-2i)} = -4 - 2yi$

$x + 5i = -4 - 2yi \quad \therefore x = -4 , \therefore -2y = 5 \Rightarrow y = \frac{-5}{2}$

3) $\frac{2x^2+x\,i+15}{2x-5i} = -3 + yi$ واجب

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

تمارين 1 – 1

س1 // ضع كلا مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

- $i^5 = i^4(i) = i = 0 + i$
- $i^6 = i^4(i^2) = -1 = -1 + 0i$
- $i^{124} = i^0 = 1 = 1 + 0i$ (لاحظ عند قسمة 24 على 4 الباقي هو صفر)
- $i^{999} = i^3 = -i = 0 - i$ (لاحظ عند قسمة 99 على 4 الباقي هو 3)
- $i^{4n+1} = i^{4n}(i) = i = 0 + i \,, n \in N$ (لاحظ إن الأس من مضاعفات العدد 4)
- $(2+3i)^2 + (12+2i) = (4 + 12i - 9) + (12 + 2i) = 7 + 14i$
- $(10+3i)(0+6i) = 0+60i+0i-18 = -18 + 60i$
- $(1+i)^4 - (1-i)^4 = [(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$
  $= [1 + 2i - 1]^2 - [1 - 2i - 1]^2 = [2i]^2 - [-2i]^2$
  $= -4 - (-4) = 0 = 0 + 0i$
- $\frac{12+i}{i} = \frac{-12i^2+i}{i} = \frac{i(-12i+1)}{i} = 1 - 12i$
- $\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+24i+16i^2}{9+16} = \frac{9+24i-16}{25} = \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24i}{25}$
- $\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i-3i^2}{4+9} = \frac{2i+3}{13} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2i}{13}$
- $(\frac{3+i}{1+i})^3 = (\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i})^3 = (\frac{3-3i+i-i^2}{2})^3 = (\frac{4-2i}{2})^3 = (2 - i)^3$
  $= (2 - i)^2 (2 - i) = (4 - 4i - 1)(2 - i)$
  $= (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i - 4 = 2 - 11i$
- $\frac{2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2} = \frac{2+11i-12}{4-3i+1}$
  $= \frac{-10+11i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{-50-30i+55i-33}{25+9} = \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$

- $(1+i)^3+(1-i)^3=(1+i)^2(1+i)+(1-i)^2(1-i)$

$=(1+2i-1)(1+i)+(1-2i-1)(1-i)$

$=2i(1+i)+(-2i)(1-i)=2i+2i^2-2i+2i^2$

$=2i-2-2i-2=-4+0i$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2 // أوجد قيم x , y الحقيقية :

a) $y+5i=(x+2i)(2x+i)$

$y+5i=2x^2+xi+4xi+2i^2$

$y+5i=2x^2+5xi-2$

$\therefore y=2x^2-2 \quad ....(1)$

$\therefore 5=5x \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1)$ نعوض في $\Rightarrow y=0$

b) $8i=(x+2i)(y+2i)+1$ (يفضل نقل 1 إلى الطرف الآخر)

$-1+8i=xy+2xi+2yi-4 \Rightarrow -1+8i=xy-4+(2x+2y)i$

$\therefore xy-4=-1 \Rightarrow xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x} \quad ....(1)$

$\therefore 2x+2y=8\ ]\div 2$

$x+y=4 \quad ....(2)$ نعوض (1) في (2)

$x+\frac{3}{x}=4\ ](x) \Rightarrow x^2-4x+3=0$ (حيث $x\neq 0$)

$(x-3)(x-1)=0 \Rightarrow \therefore \text{either } x=3 \Rightarrow y=1 \text{ or } x=1 \Rightarrow y=3$

c) $\frac{1-i}{1+i}+(x+yi)=(1+2i)^2$

$(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i})+(x+yi)=1+4i-4$

$\frac{1-2i-1}{2}+(x+yi)=-3+4i$

$-i+(x+yi)=-3+4i$

$x+yi=-3+4i+i$

$x+yi=-3+5i \Rightarrow \therefore x=-3 \quad , \quad y=5$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

$(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i})x+(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i})y=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$

$(\frac{2-2i-i-1}{2})x+(\frac{6-3i-2i-1}{5})y=-i$

$(\frac{1-3i}{2})x+(\frac{5-5i}{5})y=-i$

$(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2})x+(1-i)y=-i \quad]\times 2$

$(1-3i)x+(2-2i)y=-2i$

$x-3xi+2y-2yi=0-2i \Rightarrow x+2y+(-3x-2y)i=0-2i$

$\therefore \quad x+2y=0 \quad .... (1)$

$\therefore \ -3x-2y=-2 \quad ....(2)$ بالجمع

$-2x=-2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1)$ نعوض في $\Rightarrow y=\frac{-1}{2}$

س3 // أثبت أن :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}\, i$

الطرف الأيسر

$$\frac{(2+i)^2-(2-i)^2}{(2-i)^2(2+i)^2} = \frac{4+4i-1-(4-4i-1)}{((2-i)(2+i))^2}$$

$$= \frac{3+4i-4+4i+1}{(4+1)^2}$$

$$= \frac{8i}{25} = \text{الطرف الأيمن}$$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

الطرف الأيسر

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(1-i)(1-i)^2+(1+i)(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{(1-i)(1-2i+i^2)+(1+i)(1+2i+i^2)}{1+1}$$

$$= \frac{(1-i)(1-2i-1)+(1+i)(1+2i-1)}{2} = \frac{(1-i)(-2i)+(1+i)(2i)}{2}$$

$$= \frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{2} = \frac{2i^2+2i^2}{2} = \frac{4i^2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{الطرف الأيمن}$$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

$L.H.S = (1-i)(1-(-1))(1-(-i))$

$= (1-i)(2)(1+i) = (2)(1-i)(1+i) = 2(1+1) = 4 = R.H.S$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// حلل إلى ضرب عاملين بالصورة $(a+bi)$ حيث a, b عددين نسبيين .

- $29 = 4 + 25 = 4 - 25i^2 = (2-5i)(2+5i)$
- $125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11-2i)(11+2i)$
- $41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5-4i)(5+4i)$
- $85 = 49 + 36 = 49 - 36i^2 = (7-6i)(7+6i)$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س5 // جد قيمة x, y الحقيقية إذا علم أن : $\frac{6}{x+yi}$ ، $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

الحل : أي نجد مرافق احدهما = العدد الآخر

$$\frac{6}{x+yi} = \overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)}$$

نبسط العدد للصورة الاعتيادية

$$\frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+3i+2i-1}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

نعوض مرافقه في المعادلة ثم نبسط

$$\therefore \frac{6}{x+yi} = 1 - i$$

$$x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \Longrightarrow x+yi = \frac{6(1+i)}{1+1} \Longrightarrow x+yi = \frac{6(1+i)}{2}$$

$$x+yi = 3(1+i) \Longrightarrow x+yi = 3+3i \Longrightarrow \therefore x = 3 \quad , \quad \therefore y = 3$$

الجذور التربيعية

أولا : في حالة العدد الحقيقي (خالي من الجزء التخيلي) يتم إيجاد الجذور مباشرة وذلك :
أما نفرض العدد = z^2 مثلا ثم نجذر الطرفين مع مراعاة إن السالب تخرج من تحت الجذر i كما تعلمنا
أو نفرض العدد = z^2 مثلا ونصفر ثم بالتحليل (إذا كان جمع يحول إلى طرح ونضع i^2 في العدد لاحظ مثال 2)
كما في الأمثلة الآتية :

مثال اوجد الجذور التربيعية للأعداد الآتية :

** لاحظ إن كل من المثالين المجاورين يمكن إن يحل بالطريقة الأخرى .

1) – 49

ليكن $z^2 = -49$

حيث $z \in \mathbb{C}$ $\quad \therefore z = \mp\sqrt{-49} = \mp 7i$

2) – 13

ليكن $c^2 = -13$

حيث $c \in \mathbb{C}$ $\quad c^2 + 13 = 0 \Rightarrow c^2 - 13i^2 = 0$

$(c - \sqrt{13}i)(c + \sqrt{13}i) = 0$

$\therefore c = \sqrt{13}i \quad$ or $\quad c = -\sqrt{13}i$

3) – 24 (حاول الحل بالطريقتين أعلاه) واجب

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ثانيا : لإيجاد الجذور التربيعية لعدد مركب (يحتوي جزء تخيلي) نتبع الخطوات الآتية :

* سنتطرق له في المواضيع القادمة ((مهم))

1) نفرض مثلا إن الجذر المطلوب = $x + yi$
2) نربع الطرفين
3) نجد قيم كل من $x , y \in R$
4) نكتب الجذور بالاستعانة بقيم x , y

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $8i$.

الحل نفرض أن :

$\sqrt{8i} = a + bi$

بالتربيع $\quad 8i = a^2 + 2abi - b^2$

$0 + 8i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 0 \;.....\;(1)$

$\therefore 2ab = 8 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{a} \;.......\;(2)$

من تساوي عددين مركبين

نعوض في (1)

$a^2 - \frac{16}{a^2} = 0 \;\;](a^2)$ $\quad$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 - 16 = 0 \Rightarrow (a^2 - 4)\overset{\text{يهمل}}{\boxed{(a^2 + 4)}} = 0$

نعلم إن مجموع مربعين لا يتحلل في الأعداد الحقيقية لأنه يعطي نواتج تخيلية وبما إن a , b حقيقيان لذا تهمل

$\therefore a^2 = 4 \Rightarrow a = \mp 2$

either $a = 2 \Rightarrow b = 2 \quad$ or $\quad a = -2 \Rightarrow b = -2$

$\therefore$ الجذران $2 + 2i \;,\; -2 - 2i$

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$:

الحل نفرض أن :

$$\sqrt{3+4i} = a + bi$$

$3+4i = a^2 + 2abi – b^2$ بالتربيع

$3+4i = a^2 – b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 – b^2 = 3 \;.....\; (1)$

$\therefore 2ab = 4 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a} \;.......\; (2)$ } من تساوي عددين مركبين

نعوض في (1)

$a^2 – \frac{4}{a^2} = 3 \;\;]\,(a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 – 4 = 3a^2$

$a^4 – 3a^2 – 4 = 0 \Rightarrow (a^2 – 4)\overset{\text{يهمل}}{\boxed{(a^2 +1)}} = 0$

نعلم إن مجموع مربعين لا يتحلل في الأعداد الحقيقية لأنه يعطي نواتج تخيلية وبما إن a , b حقيقيان لذا تهمل

$\therefore a^2 = 4 \Rightarrow a = \mp 2$

ألان نعوض في معادلة 2 لإيجاد قيم b

either $a = 2 \Rightarrow b = 1$ or $a = – 2 \Rightarrow b = – 1$

$\therefore$ الجذرين $2 + i \,,\, – 2 – i$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $7 – 24i$

الحل

$\sqrt{7 – 24i} = a + bi$ نفرض أن

$7 – 24i = (a + bi)^2$ بالتربيع

$7 – 24i = a^2 + 2abi – b^2$

$7 – 24i = a^2 – b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 – b^2 = 7 \;.....\; (1)$

$\therefore 2ab = –24 \Rightarrow ab = –12 \Rightarrow b = \frac{-12}{a} \;.......\; (2)$ } من تساوي عددين مركبين

نعوض في (1)

$a^2 – \frac{144}{a^2} = 7 \;\;]\,(a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 – 7a^2 – 144 = 0 \Rightarrow (a^2 – 16)\overset{\text{يهمل}}{\boxed{(a^2 + 9)}} = 0$

نعلم إن مجموع مربعين لا يتحلل في الأعداد الحقيقية لأنه يعطي نواتج تخيلية وبما إن a , b حقيقيان لذا تهمل

$\therefore a^2 = 16 \Rightarrow a = \mp 4$

ألان نعوض في معادلة 2 لإيجاد قيم b

either $a = 4 \Rightarrow b = – 3$

or $a = – 4 \Rightarrow b = 3$

$4 – 3i \,,\, – 4 + 3i$: الجذرين هما $\therefore$

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $\frac{1}{i^{17}}$

الحل نكتب العدد بالصيغة العادية $\frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{i^{1}} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -\, i = 0 - i$

** تذكر $i^4 = 1 , i^3 =- i$

نفرض أن $\sqrt{0 - i} = a + bi$

بالتربيع $0 - i = a^2 + 2abi - b^2$

$0 - i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 0 \;.....\; (1)$

$\therefore 2ab = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2a} \;.......\; (2)$ نعوض في (1)

بضرب طرفي المعادلة بـ $4a^2 \neq 0$ $a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \;\;]\,(4a^2)$

$4a^4 - 1 = 0 \Rightarrow (2a^2 - 1)\overset{\text{يهمل}}{\boxed{(2a^2 + 1)}} = 0$

$2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore a = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$

نعوض في معادلة 2 لإيجاد قيم b

either $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{-1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, or $a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ الجذرين $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i , \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭ http://raeed.mathsboard.com ↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للأعداد الآتية : $6i$ ، $8 + 6i$ ، $-16 + 12i$ ، $\frac{-46-9i}{2-3i}$ (واجب)

↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭ http://raeed.mathsboard.com ↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭↭

مثال إذا كان $z = \frac{7-4i}{2+i}$ ، حيث $z = a + bi$ فأوجد الجذور التربيعية للمقدار $2a - bi$

الحل $a + bi = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{14-7i-8i+4i^2}{5} = \frac{10-15i}{5} = 2 - 3i$

$\therefore a = 2 \; , \; b = -3$

$\therefore 2a - bi = 2(2) - (-3)i = 4 + 3i$

نفرض أن $\sqrt{4 + 3i} = x + yi$

بالتربيع $4 + 3i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$\therefore x^2 - y^2 = 4 \;.........\; (1)$

$\therefore 2xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2x} \;.......\; (2)$ نعوض في (1)

بضرب طرفي المعادلة بـ $4x^2 \neq 0$ $x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4 \;\;]\,(4x^2)$

$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x^2 - 9)\overset{\text{يهمل}}{\boxed{(2x^2 + 1)}} = 0$

$2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \mp \frac{3}{\sqrt{2}}$

either $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{3}{2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, or $x = \frac{-3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{3}{2\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ الجذرين هما : $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$ $\frac{-3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

حل المعادلة التربيعية في الأعداد المركبة

توجد عدة حالات منها (بالاستعانة بالتحليل ضمن المنهج العراقي):

1) إذا كانت المعادلة التربيعية مكونة من مجموع حدين نحول الجمع إلى طرح ونضرب الحد الثاني بـ (i^2) ونحلل لإيجاد قيم المتغير أو نضع المتغير في جهة والعدد في جهة ثم نجذر الطرفين لإيجاد قيم المتغير ثم تكتب القيم في مجموعة حل المعادلة (لاحظ الأمثلة):

مثال

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

** $\sqrt{27} = \sqrt{9(3)} = 3\sqrt{3}$

1) $x^2 + 27 = 0$

$x^2 + 27 = 0$

$x^2 - 27i^2 = 0$

$(x - 3\sqrt{3}\,i)(x + 3\sqrt{3}\,i) = 0$

either $x = 3\sqrt{3}\,i$, or $x = -3\sqrt{3}\,i$ $\quad \therefore s = \{3\sqrt{3}\,i, -3\sqrt{3}\,i\}$

** لاحظ إن كل من الأمثلة المجاورة يمكن إن يحل كما في مثال 3 والعكس .
** كذلك يمكن الحل بالدستور .

2) $x^2 + 40 = 0$

$x^2 + 40 = 0$

$x^2 - 40i^2 = 0$

$(x - 2\sqrt{10}\,i)(x + 2\sqrt{10}\,i) = 0$

either $x = 2\sqrt{10}\,i$, or $x = -2\sqrt{10}\,i$ $\quad \therefore s = \{2\sqrt{10}\,i, -2\sqrt{10}\,i\}$

3) $x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

$x = \mp\sqrt{-3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}\,i$ $\quad \therefore s = \{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i\}$

<>http://raeed.mathsboard.com<>

2) إذا كانت المعادلة التربيعية مكونة من ثلاث حدود فبصورة عامة يمكن الحل باستخدام الدستور (لاحظ الأمثلة):

مثال

1) $x^2 + 6x + 10 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a = 1 , b = 6 , c = 10$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \mp \sqrt{36 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{-6 \mp \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$= \frac{-6 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \mp 2i}{2} = -3 \mp i \quad \therefore s = \{-3 + i, -3 - i\}$$

2) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a = 4 , b = -8 , c = 5$

$$x = \frac{8 \mp \sqrt{64 - 4(4)(5)}}{2(4)} = \frac{8 \mp \sqrt{-16}}{8}$$

$$= \frac{8 \mp 4i}{8} = 1 \mp \frac{1}{2}i \quad \text{set} = \{1 + \frac{1}{2}i , 1 - \frac{1}{2}i\}$$

3) $x^2 - 4x + 11 = 0$ (واجب)

4) $3x^2 + 4x + 7 = 0$ (واجب)

3) إذا كانت المعادلة التربيعية مكونة من ثلاث حدود مع وجود i في الحد الوسط يمكن أن نبدل إشارة الحد الأخير ويضرب بـ i^2 ثم نحلل بالتجربة أو يمكن الحل باستخدام الدستور

(لاحظ الأمثلة):

مثال أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

1) $x^2 - 3i\,x + 4 = 0$

$x^2 - 3\,i\,x - 4i^2 = 0$

$(x - 4i)(x + i) = 0$

$x = 4i \ , x = -i \qquad \therefore s = \{4i , - i\}$

2) $5x^2 + 6i\,x + 8 = 0$

$5x^2 + 6i\,x - 8i^2 = 0$

$(5x - 4i)(x + 2i) = 0$

$5x = 4i \Rightarrow x = \frac{4}{5}i \ , x = -2i \qquad \therefore s = \{\frac{4}{5}i , - 2i\}$

3) $4x^2 + i\,x + 3 = 0$ (واجب)

4) $6x^2 - 7i\,x + 5 = 0$ (واجب)

4) إذا كانت المعادلة التربيعية مكونة من ثلاث حدود مع وجود i في الحد الأخير تحل بالدستور ولكن سينتج i تحت الجذر وفي هذه الحالة يجب إيجاد قيمة الجذر أولا ثم نختار احد الناتجين (لماذا؟) ليعوض بدل الجذر ثم نبسط (لاحظ الأمثلة):

مثال أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

1) $x^2 + 2x + 1 - 8i = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow a = 1 , b = 2 , c = 1 - 8i$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(1)(1 - 8i)}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 + 32i}}{2} = \frac{-2 \mp 4\sqrt{2i}}{2}$$

هنا نتوقف حتى نجد قيم $\sqrt{2i}$ لكي نعوض ونبسط لإيجاد قيم x

نفرض أن $\sqrt{2i} = a + bi$

بالترتيب والترتيب $2i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 0 \ .... (1)$

$\therefore 2ab = 2 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \ .... (2)$ نعوض في (1)

$a^2 - \frac{1}{a^2} = 0 \ ] (a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 - 1 = 0 \Rightarrow (a^2 - 1)\boxed{(a^2 + 1)} = 0$ يهمل

$a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1$ نعوض في (2)

either $a = 1 \Rightarrow b = 1$, or $a = -1 \Rightarrow b = -1$

$\therefore \sqrt{2i} = 1 + i$ or $\sqrt{2i} = -1 - i$

نعوض احد الجذرين الناتجين حيث الآخر يعطي نفس النتائج جرب بنفسك

$$\therefore x = \frac{-2 + 4(1 + i)}{2} = \frac{-2 + 4 + 4i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$\text{or } x = \frac{-2 - 4(1 + i)}{2} = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i \qquad \therefore s = \{1 + 2i , - 3 - 2i\}$$

$2)\ x^2 - 4x + i\,(2 - 4i) = 0$

$x^2 - 4x + 2i + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow a = 1 , b = -4 , c = 2i + 4$

$$x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4\mp\sqrt{16-4(1)(2i+4)}}{2} = \frac{4\mp\sqrt{16-8i-16}}{2} = \frac{4\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

هنا يتوقف الحل حتى
نجد قيم $\sqrt{8i}$ لكي
نعوض احدها في الكسر
ثم نبسط لإيجاد قيم x

$\sqrt{-8i} = a + bi$ نفرض أن

$-8i = a^2 + 2abi - b^2$ بالتربيع والترتيب

$\therefore a^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore 2ab = -8 \Longrightarrow ab = -4 \Longrightarrow b = \frac{-4}{a} \quad \ldots\ldots\ (2)$ نعوض في (1)

$a^2 - \frac{16}{a^2} = 0 \ \ ]\ (a^2)$ يضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 - 16 = 0 \Longrightarrow (a^2 - 4)\boxed{\overset{\text{يهمل}}{(a^2 + 4)}} = 0$

$a^2 = 4 \Longrightarrow a = \mp 2$ نعوض في (2)

$a = 2 \ \Longrightarrow\ b = -2 \qquad \text{or}\ \ a = -2 \Longrightarrow b = 2$

$\therefore \sqrt{-8i} = 2 - 2i \ \text{or}\ -2 + 2i$

$\text{either } x = \frac{4+2-2i}{2} = \frac{6}{2} - \frac{2}{2}\,i = 3 - i$

$\text{or } x = \frac{4-2+2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,i = 1 + i$

$\therefore s = \{\ 3 - i , 1 + i\}$

نعوض احد الجذرين
الناتجين حيث الآخر يعطي
نفس النتائج جرب بنفسك

http://raeed.mathsboard.com

$3)\ x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3(i + 1) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow a = 1 , b = -2\sqrt{3} , c = 3(i + 1)$

$$x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}\mp\sqrt{12-4(1)3(i+1)}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\mp\sqrt{12-12i-12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\mp\sqrt{-12i}}{2}$$

هنا يتوقف الحل حتى
نجد قيم $\sqrt{-12i}$ لكي
نعوض احدها في الكسر
ثم نبسط لإيجاد قيم x

اكمل باقي الحل كواجب

http://raeed.mathsboard.com

الكتاب المقرر خير وسيلة للتعلم

الوجيز في الرياضيات للصف السادس العلمي تطلب من قرطاسية الخطاط حيدر الكرادي

لا يجوز بيعها أو نسخها إلا بعد موافقة مدرس المادة

للمعلومات والاقتراحات الاتصال على الرقم 07808683063

موقعنا على الانترنيت منتديات بابل للرياضيات

http://raeed.mathsboard.com/

ملاحظة سبق ان تعرفنا على الصيغة العامة للمعادلة التربيعية ذات متغير واحد وهي $ax^2 + bx + c = 0$ ومثل هذه المعادلة يقال ان معاملاتها اعداد حقيقية اذا كانت $a \neq 0, a, b, c \in R$ ويمكن ايجاد علاقة بين معاملات هذا النوع من المعادلات وجذورها (قيم المتغير فيها) حسب الخطوات الاتية :

1) نتخلص من معامل x بالقسمة عليه (أي نقسم على a) لتصبح المعادلة بالصورة :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2) مجموع جذري المعادلة = $\frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب جذري المعادلة = $\frac{c}{a}$

**(لاحظ الاشارات مهمه جدا ، كما يمكن ايجاد المعادلة اذا علم جذراها في الاعداد المركبة بهذه العلاقات)

من الملاحظة اعلاه والنقطتين 1 و 2 نحصل على أن المعادلة التربيعية هي :

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مثال كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2 + i \ , 3 - 2i$

الحل نجد مجموع الجذرين $(2 + i) + (3 - 2i) = 5 - i$

ونجد حاصل ضرب الجذرين $(2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 - (5 - i)x + (8 - i) = 0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2 + 2i \ , 1 - i$ **الحل واجب**

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة المعادلة التربيعية ذات معاملاتها حقيقية اذا كان احد جذريها $(x + yi)$ فان الجذر الآخر هو $(x - yi)$ ، $y \neq 0$ أي:

1) إذا كان جذري المعادلة مترافقان فان معاملاتها حقيقية.

2) إذا كانت معاملات المعادلة حقيقية و أحد جذريها $(x + yi)$ فان الجذر الآخر هو مرافقه هو $(x - yi)$ حيث $y \neq 0$.

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال كون المعادلة التربيعية في كل مما يأتي :

1) جذراها : $3 + i, 3 - i$

الحل مجموع الجذرين $(3 + i) + (3 - i) = 6$

حاصل ضرب الجذرين $(3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = 10$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 - 6x + 10 = 0$

2) معاملاتها حقيقية و أحد جذريها $-2 + 3i$

الحل ∵ المعاملات حقيقية واحد جذريها $(-2 + 3i)$

∴ الجذر الثاني هو مرافقه $(-2 - 3i)$

مجموع الجذرين $-2 - 3i + (-2 + 3i) = -4$

حاصل ضرب الجذرين $(-2 - 3i)(-2 + 3i) = 4 + 9 = 13$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 + 4x + 13 = 0$

3) **معاملاتها حقيقية واحد جذريها** $\frac{13-4i}{6+i}$

الحل **نبسط لإيجاد الجذر الاول** $\frac{13-4i}{6+i}\cdot\frac{6-i}{6-i}=\frac{78-13i-24i-4}{36+1}=\frac{74-37i}{37}=\frac{74}{37}-\frac{37}{37}i=2-i$

∵ المعاملات حقيقية واحد جذريها $(2-i)$ **∴ الجذر الثاني هو مرافقه** $(2+i)$

مجموع الجذرين : $2+i+2-i=4$

ضرب الجذرين : $(2+i)(2-i)=4+1=5$

∴ المعادلة: $x^2-4x+5=0$

4) **معاملاتها حقيقية واحد جذريها** $\frac{3+i}{1-i}$ ، 5) **معاملاتها حقيقية واحد جذريها** $\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^{15}$

6) **معاملاتها حقيقية واحد جذريها** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{11}$ **الحل واجب**

مثال 1 **أوجد عددين مركبين مجموعهما (8) وضربهما (19) و جزئيهما الخيالي لا يساوي (0)**

الحل **لنفرض أحد العددين المركبين** $a+bi$

∵ المجموع حقيقي والضرب حقيقي (والجزء الخيالي $\neq 0$**) ∴ العددان مترافقان و الثاني هو** $a-bi$

$a+bi+a-bi=8$

$2a=8\Longrightarrow a=4$

$(a+bi)(a-bi)=19$

$a^2-abi+abi+b^2=19$

$a^2+b^2=19\Longrightarrow 16+b^2=19\Longrightarrow b^2=3\ \Longrightarrow \therefore b=\mp\sqrt{3}$

∴ العددين $(4-\sqrt{3}\,i),\ (4+\sqrt{13}\,i)$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 2 أوجد عددين مركبين مجموعهما (4) و ضربهما (15)

الحل نفرض احد العددين x والآخر y

$x+y=4\ ....\ (1)$

$xy=15\Longrightarrow x=\frac{15}{y}\ ....\ (2)$ نعوض في (1)

$\left[\frac{15}{y}+y=4\right]y$ $\quad y\neq 0$ بضرب طرفي المعادلة بـ

$15+y^2=4y\quad\Longrightarrow\quad y^2-4y+15=0$

** في كلا المثالين 1 و2 يمكن حل كل منهما بالطريقة التي حل بها المثال الاخر ......

$$y=\frac{+4\mp\sqrt{16-4(1)(15)}}{2}\Longrightarrow y=\frac{4\mp\sqrt{16-60}}{2}\Longrightarrow y=\frac{4\mp\sqrt{-44}}{2}\Longrightarrow y=\frac{4\mp\sqrt{4(11)}\,i}{2}\Longrightarrow y=2\mp\sqrt{11}\,i$$

either $y=2+\sqrt{11}\,i\Longrightarrow$ (2) نعوض في $\Longrightarrow x=\frac{15}{2+\sqrt{11}\,i}\cdot\frac{2-\sqrt{11}\,i}{2-\sqrt{11}\,i}=\frac{15(2-\sqrt{11}\,i)}{4+11}=2-\sqrt{11}\,i$

or $y=2-\sqrt{11}\,i\Longrightarrow x=2+\sqrt{11}\,i$

مثال إذا كان $(2+i)$ احد جذري المعادلة : $x^2+ax+(-2-6i)=0$ فما قيمة $a\in\mathbb{C}$ ؟ وما الجذر الآخر؟

الحل ∵ $(2+i)$ احد جذري المعادلة (يمثل قيمة x فيحقق المعادلة) أي : $x=2+i$

$$(2+i)^2+a(2+i)+(-2-6i)=0$$
$$4+4i-1+a(2+i)+(-2-6i)=0$$
$$3+4i+a(2+i)+(-2-6i)=0$$
$$1-2i+a(2+i)=0 \Rightarrow a(2+i)=-1+2i$$
$$\therefore a=\frac{-1+2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{-2+i+4i+2}{4+1}=\frac{5i}{5}=i=0+i$$

∴ تصبح المعادلة بالصورة الاتية : $x^2+ix+(-2+6i)=0$

والان نفرض الجذر الآخر z حيث $z\in\mathbb{C}$

∵ حاصل ضرب الجذرين هو $=\frac{c}{a}=(-2-6i)$

$$\therefore z(2+i)=(-2-6i)$$
$$z=\frac{(-2-6i)}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{-4+2i-12i-6}{5}=\frac{-10}{5}-\frac{10}{5}i=-2-2i$$

** يمكن حل المعادلة بالدستور لإيجاد الجذر الآخر. أو من قاعدة مجموع الجذرين .

*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

تمارين (1 – 2)

1) حل المعادلات التربيعية الاتية وبين اي منها يكون جذراها مترافقين ؟

a) $z^2=-12$

حاول الحل بطريقة اخرى

$$z^2=\mp\sqrt{-12} \Rightarrow z=\mp 2\sqrt{3}i$$
$$\therefore z=2\sqrt{3}i \ , \ z=-2\sqrt{3}i$$
$$\therefore set=\{2\sqrt{3}i, -2\sqrt{3}i\}$$

نلاحظ ان الجذران مترافقان

*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

b) $z^2-3z+3+i=0$ تحل الدستور

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a=1 \ , b=-3 \ , c=3+i$$
$$z=\frac{3\mp\sqrt{9-4(1)(3+i)}}{2(1)}=\frac{3\mp\sqrt{9-12-4i}}{2}=\frac{3\mp\sqrt{-3-4i}}{2}$$

نفرض أن $\sqrt{-3-4i}=a+bi$

بالتربيع والترتيب $-3-4i=a^2+2abi-b^2$

$$\therefore a^2-b^2=-3 \ \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\therefore 2ab=-4 \Rightarrow ab=-2 \Rightarrow b=\frac{-2}{a} \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض في (1)

بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2\neq 0$

$$a^2-\frac{4}{a^2}=-3 \ ]\,(a^2)$$
$$a^4+3a-4=0 \Rightarrow \overset{\text{يهمل}}{\boxed{(a^2+4)}}\,(a^2-1)=0$$
$$a^2=1 \Rightarrow a=\mp 1$$

نعوض في (2)

$$a=1 \Rightarrow b=-2 \qquad \text{or} \qquad a=-1 \Rightarrow b=2$$

∴ الجذران التربيعيان هما $(1-2i)$ or $(-1+2i)$

either $x = \frac{3+1-2i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2}{2}i = 2 - i$

or $x = \frac{3-1+2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$

$\therefore s = \{\, 2 - i \,,\, 1 + i \,\}$ نلاحظ ان الجذران غير مترافقان

نعوض احد الجذرين الناتجين حيث الآخر يعطي نفس النتائج جرب بنفسك

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$ تحل الدستور

$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a = 2 \,,\, b = -5 \,,\, c = 13$

$z = \frac{5 \mp \sqrt{25-4(2)(13)}}{2.2} = \frac{5 \mp \sqrt{25-104}}{4} = \frac{5 \mp \sqrt{-79}}{4}$

$= \frac{5 \mp \sqrt{79}\, i}{4} = \frac{5}{4} \mp \frac{\sqrt{79}}{4} i$

$\therefore set = \{ \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{79}}{4} i \,,\, \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{79}}{4} i \,\}$ نلاحظ ان الجذران مترافقان

لاحظ ان المعاملات في المعادلة المعطاة حقيقية ونتج ان الجذران مترافقان

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

$z^2 + 2z + 2i - i^2 = 0$

$z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$ تحل الدستور

$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a = 1 \,,\, b = 2 \,,\, c = 2i + 1$

$z = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(1)(2i+1)}}{2(1)} = \frac{-2 \mp \sqrt{4-8i-4}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{-8i}}{2}$

نفرض أن : $\sqrt{-8i} = a + bi$

بالتربيع $-8i = a^2 + 2abi - b^2$

$0 - 8i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 0 \,.....\, (1)$

$\therefore 2ab = -8 \Longrightarrow ab = -4 \Longrightarrow b = \frac{-4}{a} \,.......\, (2)$

نعوض في (1)

$a^2 - \frac{16}{a^2} = 0 \,]\, (a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

$a^4 - 16 = 0 \Longrightarrow (a^2 - 4)\boxed{(a^2 + 4)} = 0$

يهمل

$\therefore a^2 = 4 \Longrightarrow a = \mp 2$

either $a = 2 \Longrightarrow b = -2$ or $a = -2 \Longrightarrow b = 2$

∴ الجذرين $2 - 2i \,,\, -2 + 2i$

either $x = \frac{-2+2-2i}{2} = -\frac{2}{2}i = 0 - i$

or $x = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2}{2}i = -2 + i$

$\therefore s = \{\, 0 - i \,,\, -2 + i \,\}$ نلاحظ ان الجذران غير مترافقان

الحل بطريقة اخرى (التجزئة)

$z^2 + 2z + 2i - i^2 = 0$

$z^2 - i^2 + 2z + 2i = 0$

$(z - i)(z + i) + 2(z + i) = 0$

$(z + i)[(z - i) + 2] = 0$

either $z = -i$ or $z = -2 + i$

$\therefore s = \{\, 0 - i \,,\, -2 + i \,\}$

نعلم إن مجموع مربعين لا يتحلل في الأعداد الحقيقية لأنه يعطي نواتج تخيلية وبما إن a , b حقيقيان لذا نهمل

نعوض احد الجذرين الناتجين حيث الآخر يعطي نفس النتائج جرب بنفسك

e) $4z^2 + 25 = 0$

$4z^2 - 25i^2 = 0 \Rightarrow (2z - 5i)(2z + 5i) = 0$

$\therefore z = \frac{5}{2}i$ or $z = \frac{-5}{2}i$ $\therefore set = \{ \frac{5}{2}i , \frac{-5}{2}i \}$ لاحظ ان الجذران مترافقان

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

f) $z^2 - 2z\,i + 3 = 0$

$a = 1, b = -2i, c = 3$

$$z = \frac{2i\mp\sqrt{-4-4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{2i\mp\sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i\mp\sqrt{-16}}{2} = \frac{2i\mp 4i}{2}$$

$\therefore$ either $z = \frac{2i+4i}{2} = 3i$, or $z = \frac{2i-4i}{2} = -i$

$\therefore$ set $= \{ -i , 3i \}$ نلاحظ أن الجذران غير مترافقان

$z^2 - 2z\,i + 3 = 0$ (طريقة اخرى بالتجربة)
$z^2 - 2z\,i - 3i^2 = 0$
$(z - 3i)(z + i) = 0$
either $z = 3i$ or $z = -i$
$\therefore s = \{ -i , 3i \}$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) كون المعادلة التربيعية التي جذراها m , L حيث :

a) $m = 1+2i$, $L = 1 - i$

$1+2i + 1 - i = 2 + i$ مجموع الجذرين

$(1+2i)(1-i) = 3 + i$ ضرب الجذرين

$\therefore$ المعادلة $x^2 - (2 + i)x + (3 + i) = 0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $m = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ نبسط كلا الجذرين قبل الحل حيث :

$L = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

$1 - 2i + 5 - 12i = 6 - 14i$ مجموع الجذرين

$(1 - 2i)(5 - 12i) = 5 - 12i - 10i - 24 = -19 - 22i$ ضرب الجذرين

$\therefore$ المعادلة $x^2 - (6 - 14i)x + (-19 - 22i) = 0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) أوجد الجذور التربيعية للأعداد المركبة الاتية :

a) $-6i$

$-6i = (a + bi)^2$ نفرض أن :

$-6i = a^2 + 2abi - b^2$ مربع حدانية

$0 - 6i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 0$ ..... (1)

$\therefore 2ab = -6 \Rightarrow ab = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{a}$ .... (2)   نعوض في (1)

$a^2 - \frac{9}{a^2} = 0 \;]\,(a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$

يهمل

$a^4 - 9 = 0 \Rightarrow (a^2 - 3)\boxed{(a^2 + 3)} = 0$

$\therefore a^2 = 3 \Rightarrow a = \mp\sqrt{3}$

either $a = \sqrt{3} \Rightarrow b = -\sqrt{3}$ or $a = -\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}$

$\therefore$ الجذرين هما : $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$, $-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

b) $7+24i$

نفرض أن $7+24i = (a+bi)^2$

نفتح مربع الحدانية ونرتب $7+24i = a^2 + 2abi - b^2$

$\therefore a^2 - b^2 = 7 \;\ldots\ldots\ldots (1)$

نعوض في (1) $\therefore 2ab = 24 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{a} \;\ldots\ldots\ldots (2)$

بضرب طرفي المعادلة بـ $a^2 \neq 0$ $\quad a^2 - \frac{144}{a^2} = 7 \;\;]\,(a^2)$

$a^4 - 7\,a - 144 = 0 \Rightarrow (a^2 - 16)\boxed{\overset{\text{يهمل}}{(a^2+9)}} = 0$

نعوض في (2) $a^2 = 16 \Rightarrow a = \mp 4$

either $a = 4 \Rightarrow b = 3$ or $a = -4 \Rightarrow b = -3$

∴ الجذران التربيعيان هما $4 + 3i \;,\; -4 - 3i$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4} = 1 + \sqrt{3}\,i$

نفرض أن $1 + \sqrt{3}\,i = (a+bi)^2$

نفتح مربع الحدانية ونرتب $1 + \sqrt{3}\,i = (a^2 - b^2) + 2abi$

$\therefore a^2 - b^2 = 1 \;\ldots\ldots\ldots (1)$

نعوض في (1) $\therefore 2ab = \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2a} \;\ldots\ldots\ldots (2)$

بضرب طرفي المعادلة بـ $4a^2 \neq 0$ $\quad a^2 - \frac{3}{4a^2} = 1 \;\;]\,(4a^2)$

$4a^4 - 3 = 4a^2 \Rightarrow 4a^4 - 4a^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2a^2 - 3)(2a^2 + 1) = 0$

نعوض في (2) $2a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

either $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, or $a = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ الجذرين هما : $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i \;,\; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

a) i

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذر الآخر هو $= -i$

مجموع الجذرين $i + (-i) = 0$

ضرب الجذرين $i(-i) = 1$

∴ المعادلة $x^2 - 0\,(x) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $5 - i$

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذر الآخر هو $= 5 + i$

مجموع الجذرين $5 - i + 5 + i = 10$

ضرب الجذرين $(5 - i)(5 + i) = 25 + 1 = 26$

∴ المعادلة $x^2 - 10x + 26 = 0$

c) $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i$

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذر الآخر هو $=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i$

مجموع الجذرين $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ضرب الجذرين $(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i)(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i)=\frac{2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

∴ المعادلة $x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

5) إذا كان ($3+i$) هو احد جذري المعادلة : $x^2-mx+(5+5i)=0$ فما قيمة $m\in\mathbb{C}$؟

وما قيمة الجذر الآخر ؟

الحل ($3+i$) هو احد جذري المعادلة أي قيمة x لذلك نعوض في المعادلة (يحقق المعادلة)

$x=3+i$

$(3+i)^2-m(3+i)+(5+5i)=0$

$9+6i-1+5+5i=m(3+i)$

$13+11i=m(3+i)$

$\therefore m=\frac{13+11i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{50+20i}{10}=5+2i$

نفرض الجذر الآخر y حيث $y\in\mathbb{C}$

∵ ضرب الجذرين $=\frac{c}{a}$

$\therefore y(3+i)=5+5i$

$y=\frac{5+5i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{20+10i}{10}=2+i$

يمكن حل المعادلة بالدستور لإيجاد الجذر الآخر.

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ* ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

لإيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح في الاعداد المركبة لنفرض أن احد هذه الجذور هو (x) أي أن : $\sqrt[3]{1}=x$ لذا بتكعيب الطرفين ينتج أن : $x^3=1$ ولنحاول حل هذه المعادلة في الاعداد المركبة لإيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح (لاحظ الحل ادناه)

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

either $x=1$ or $x^2+x+1=0$ تحل بالدستور

$a=1, b=1, c=1$

$\therefore x=\frac{-1\mp\sqrt{1-4(1)(1)}}{2}=\frac{-1\mp\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$

∴ الجذور هي : $1,\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

** لو لاحظنا النواتج لوجدنا الجذرين التخيليين مترافقان وتتمتع هذه الجذور بعدة خواص وهي :

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

1) أحد الجذور حقيقي والجذران والآخران عددان مركبان مترافقان .

2) اذا رمزنا لأحد الجذرين التخيليين (ω) فأن الجذر الأخر هو (ω^2) ويقرأ " أوميكا " لذا تصبح الجذور $(1, \omega^2, \omega)$

3) مربع أحد الجذرين التخيليين يساوي الجذر التخيلي الآخر . $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3(\omega) = \omega$ ، $(\omega)^2 = \omega^2$

4) كل من الجذرين التخيليين مرافق الاخر اي : $\overline{\omega} = \omega^2$ ، $\overline{\omega^2} = \omega$

5) $\omega^3 = 1$ ومنها في حال رفعت أوميكا لاس اكبر من 3 نقسم على 3 وباقي القسمة هو الاس الجديد

6) حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي (1) أي : $1 = (\omega)(\omega^2) 1$ ومنها $\omega(\omega^2) = 1$

7) مقلوب أحد الجذرين الخياليين يساوي الجذر الخيالي الآخر .

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2 \quad , \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

رحلة التفوق
في
السادس

8) مجموع الجذور الثلاثة يساوي (0) أي أن :

$\omega + \omega^2 + 1 = 0$ ومنها نحصل على

a) $\omega + \omega^2 = -1$
b) $1 + \omega = -\omega^2$
c) $1 + \omega^2 = -\omega$
d) $-\omega - \omega^2 = 1$
e) $-1 - \omega = \omega^2$
f) $-1 - \omega^2 = \omega$

9) حاصل طرح الجذرين التخيليين يساوي $(\mp\sqrt{3}\, i)$

$$\omega - \omega^2 = -\omega^2 + \omega = \mp\sqrt{3}\, i \quad \text{or} \quad \omega^2 - \omega = -\omega + \omega^2 = \mp\sqrt{3}\, i$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد ناتج كل مما يأتي :

1) $\omega^{17} = \omega^2$ نقسم الاس 17 على 3 والباقي 2 هو الاس الجديد

2) $\omega^{94} = \omega$ نقسم الاس 94 على 3 والباقي 1 هو الاس الجديد

3) $\omega^{69} = \omega^0 = 1$ نقسم الاس 69 على 3 والباقي 0 هو الاس الجديد

4) $\omega^{-23} = \frac{1}{\omega^{23}} = \frac{1}{\omega^2} = \omega$ نقسم الاس 23 على 3 والباقي 2 هو الاس الجديد

** حاول الحل بطريقة اخرى ؟

** الان يمكن استخدام هذه الجذور في امثلة منوعة والاستفادة من خواصها في الحل (لاحظ الامثلة الاتية) :

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد ناتج ما يأتي :

1) $\omega^{-23} + \omega^5 + \omega^{-12} = \frac{1}{\omega^{23}} + \omega^5 + \frac{1}{\omega^{12}} = \frac{1}{\omega^2} + \omega^2 + \frac{1}{\omega^0} = \omega + \omega^2 + 1 = 0$

2) $(\omega^2 + 1)^{-5} = \frac{1}{(\omega^2+1)^5} = \frac{1}{(-\omega)^5} = \frac{1}{-\omega^5} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$

3) $\left(\frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{-\omega^2} - \frac{1}{-\omega}\right)^2$

وزاري 2000 دور1

$= (\omega^2 - \omega)^2 = (-\omega + \omega^2)^2$

$= \omega^4 - 2\omega^3 + \omega^2 = \omega - 2 + \omega^2 = -2 + (\omega + \omega^2) = -2 - 1 = -3$

** في حالة وجود (ω) في البسط و (ω²) في المقام (أو العكس) والمعاملات متشابهة نضرب البسط أو المقام بالحد الخالي من (ω) في (ω³) ثم نستخرج عامل مشترك ونختصر ونكمل الحل .

4) $\frac{\omega^{23}+\omega^{7}-9}{\omega^{31}+\omega^{8}-4} = \frac{\omega^{2}+\omega-9}{\omega+\omega^{2}-4} = \frac{-1-9}{-1-4} = \frac{-10}{-5} = 2$

5) $(\omega^2+1)^6+(\omega+1)^6 = (-\omega)^6+(-\omega^2)^6$

$= \omega^6+\omega^{12} = 1+1 = 2$

6) $(\frac{-2+3\omega}{2\omega^2-3})^6 = (\frac{-2\omega^3+3\omega}{2\omega^2-3})^6 = (\frac{-\omega(2\omega^2-3)}{2\omega^2-3})^6 = (\omega)^6 = 1$

7) $\frac{\omega^{34}+\omega^{8}-8}{\omega^{8}+\omega^{7}-2\omega^{6}}$ **الحل واجب**

8) $(\frac{5\omega^2 i-1}{5+\omega i})^6 = -1$ **اثبت ان الحل واجب وزاري 2014 دور ثاني**

9) $(\frac{-3+4\omega^2}{3\omega-4})^3$ **الحل واجب**

10) $\left(\frac{1}{3+\omega^2}-\frac{1}{3+\omega}\right)^2 = (\frac{(3+\omega)-(3+\omega^2)}{(3+\omega^2)(3+\omega)})^2$

$= \left(\frac{(3+\omega)-(3+\omega^2)}{(3+\omega^2)(3+\omega)}\right)^2 = \left(\frac{(3+\omega)-3-\omega^2}{9+3\omega+3\omega^2+\omega^3}\right)^2$

$= \left(\frac{\omega-\omega^2}{9+3(\omega+\omega^2)+1}\right)^2 = \left(\frac{\omega^2-2\omega^3+\omega^4}{(10-3)^2}\right) = \frac{\omega^2-2+\omega}{49} = \frac{-2-1}{49} = \frac{-3}{49}$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد ناتج :

$\left(\frac{-7+3\omega}{7\omega^2-3}+\frac{8\omega^2+11}{8+11\omega}\right)^6 =$

الحل

$\left(\frac{-7+3\omega}{7\omega^2-3}+\frac{8\omega^2+11}{8+11\omega}\right)^6 = \left(\frac{-7\omega^3+3\omega}{7\omega^2-3}+\frac{8\omega^2+11\omega^3}{8+11\omega}\right)^6$

$= \left(\frac{-\omega(7\omega^2-3)}{7\omega^2-3}+\frac{\omega^2(8+11\omega)}{8+11\omega}\right)^6$

$= (-\omega+\omega^2)^6 = ((-\omega+\omega^2)^2)^3$

$= [\omega^2-2\omega^3+\omega^4]^3$

$= [\omega^2-2+\omega]^3 = [-1-2]^3 = [-3]^3 = -27$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال ورد في السؤال احد جذري العدد واحد المركبين أي $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو بعد تبسيط السؤال حصلنا على احدهما وكان مرفوعا لاس معين يجب ان نعوض مرة ω ومرة ω^2 ثم نجد الناتج لكل مرة (لاحظ الامثلة)

مثال أوجد ناتج ما يأتي :

1) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15} =$

either $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \omega \Rightarrow (\omega)^{15} = 1$ or $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \omega^2 \Rightarrow (\omega^2)^{15} = \omega^{30} = 1$

2) $\left(\frac{-2-\sqrt{-12}}{4}\right)^9 = \left(\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}\right)^9 = \left(\frac{2(-1-\sqrt{3}\,i)}{4}\right)^9$

$= \left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^9 = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$

either $\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \omega \Longrightarrow (\omega)^9 = 1$ or $\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \omega^2 \Longrightarrow (\omega^2)^9 = \omega^{18} = 1$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 20 في الكتاب صفحة 29

اثبت إن :

$(3\omega + 5 + 3\omega^2)^2 = -4\,(2 + \omega + 2\omega^2)^3$

الحل

L.H.S $= (3\omega + 3\omega^2 + 5)^2 = [\,3(\omega + \omega^2) + 5\,]^2 = (-3+5)^2 = 4$

R.H.S $= -4\,(2 + 2\omega^2 + \omega)^3 = -4\,[\,2(1+\omega^2) + \omega\,]^3$

$= -4\,(-2\,\omega + \omega)^3 = -4\,(-\omega)^3 = -4\,(-1) = 4$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال

أوجد ناتج كل مما يأتي بأبسط صورة :

1) $(2-\omega)^2 + (2-\omega^2)^2 = 4 - 4\,\omega + \omega^2 + 4 - 4\,\omega^2 + \omega^4$

$= 8 - 4\,\omega + \omega^2 - 4\,\omega^2 + \omega$

$= 8 - 3\,\omega - 3\,\omega^2$

$= 8 - 3\,(\omega + \omega^2) = 8 + 3 = 11$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $(3-2\omega)^2 + (3-2\omega^2)^2 =$ **الحل واجب**

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) $\frac{1-\omega}{1+\omega^2} + \frac{1-\omega^2}{1+\omega} = \frac{(1-\omega)(1+\omega)+(1-\omega^2)(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+\omega)}$ نوحد المقامات

$= \frac{(1+\omega - \omega - \omega^2)+(1+\omega^2-\omega^2-\omega^4)}{1+\omega+\omega^2+\omega^3}$

$= \frac{(1-\omega^2)+(1-\omega)}{1+(-1)+1}$

$= \frac{1-\omega^2+1-\omega}{1} = 2 - (\omega^2 + \omega) = 2 - (-1) = 3$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) $\frac{2-\omega}{1+3\omega^2} - \frac{2-\omega^2}{1+3\omega} =$ **الحل واجب**

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

5) $\left(\frac{1}{3+5\omega+4\omega^2} - \frac{1}{3+5\omega^2+4\omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{3+\omega+4\omega+4\omega^2} - \frac{1}{3+\omega^2+4\omega^2+4\omega}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{3+\omega-4} - \frac{1}{3+\omega^2-4}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\omega-1} - \frac{1}{\omega^2-1}\right)^2 = \left(\frac{\omega^2-1-(\omega-1)}{(\omega-1)(\omega^2-1)}\right)^2$

$= \left(\frac{\omega^2-1-\omega+1}{\omega^3-\omega-\omega^2+1}\right)^2 = \left(\frac{\omega^2-\omega}{1+1+1}\right)^2 = \left(\frac{\mp\sqrt{3}\,i}{3}\right)^2 = \frac{3\,i^2}{9} = \frac{-1}{3}$

وزاري 2000 دور 2

6) $(2+3\omega^2+\omega)^2 = (2+2\omega^2+\omega^2+\omega)^2 = [\,2\,(1+\omega^2\,)-1\,]^2$

$= (-2\omega-1)^2$

$= 4\omega^2+4\,\omega+1 = -4+1 = -3$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

7) $(-1+3\omega-\omega^2)(\,2\omega+3\omega^2+2) =$ **الحل واجب**

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

8) $\sqrt{\frac{4\omega^2+4\omega-21}{7-2\omega-2\omega^2}} = \sqrt{\frac{-4-21}{7-2(\omega+\omega^2)}} = \sqrt{\frac{-25}{7+2}} = \sqrt{\frac{25}{9}}\ i = \frac{5}{3}\,i$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1999 دور

إذا كان $y = 2-\sqrt{3}\ i$, $x = 2+\sqrt{3}\ i$ أوجد قيمة : $\omega^2x^2+\omega y^2$

الحل

المقدار $\omega^2(2+\sqrt{3}\,i\,)^2+\omega(2-\sqrt{3}\,i\,)^2 = \omega^2(\,4+4\sqrt{3}\,i-3\,)+\omega(\,4-4\sqrt{3}\,i-3\,)$

$= \omega^2(\,1+4\sqrt{3}\,i\,)+\omega(\,1-4\sqrt{3}\,i\,)$

$= \omega^2+4\sqrt{3}\ i\,\omega^2+\omega-4\sqrt{3}\ i\,\omega$

$= \omega^2+\omega+4\sqrt{3}\ i\,\omega^2-4\sqrt{3}\ i\,\omega$

$= -1\ +4\sqrt{3}\ i\,(\omega^2-\omega)$

$= -1\ +4\sqrt{3}\ i\,(\mp\sqrt{3}\ i\,) = -1\ \mp 12i^2 = -1\ \pm 12$

$\therefore$ either $= -1\ +12\ = 11$, or $= -1\ -12\ = -13$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة

1) في حالة احتجنا ايجاد المرافق لعدد مركب يحوي ω أو يحوي ω^2 (خالي من i) فيجب ان نتذكر ان احدهما هو مرافق الاخر (لاحظ الامثلة ادناه)

2) $\overline{\omega} = \omega^2$

3) $\overline{\omega^2} = \omega$

4) $\overline{13\omega} = 13\,\omega^2$

5) $\overline{-6\omega^2} = -6\,\omega$

6) $\overline{2\,\omega^2-9\,\omega} = 2\,\omega-9\omega^2$

7) $\overline{\frac{2}{5}\omega+7\,\omega^2} = \frac{2}{5}\omega^2+7\,\omega$

** لاحظ اننا لم نغير الاشارات في كل الامثلة المجاورة بل اكتفينا بتبديل كل ω بـ ω^2 والعكس للحصول على

2) أما في حالة وجود i في العدد يتم تغيير الاشارة للجزء الذي يحوي i وتبديل كل ω بـ ω^2 والعكس للحصول على مرافق العدد المركب (لاحظ الامثلة ادناه)

1) $\overline{3\,\omega^2-5i} = 3\,\omega+5i$

2) $\overline{i-2\,\omega} = -i-2\,\omega^2$

3) $\overline{\frac{2}{3}\omega+3\,i\omega^2} = \frac{2}{3}\omega^2-3\,\omega$

مثال عودة لإيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

الحلول

كون المعادلات التربيعية في كل مما ياتي :

1) جذراها $5i\omega-\omega^2 , 5i\omega^2-\omega$

مجموع الجذرين $5i\omega-\omega^2+5i\omega^2-\omega=5i(\omega+\omega^2)\ -\omega^2-\omega$

$=-5i+1=1-5i$

ضرب الجذرين $(5i\omega-\omega^2)\ (5i\omega^2-\omega)=-25\ \omega^3-5i\omega^2-5i\omega+\omega^3$

$=\ -25+1-5i(\omega^2+\omega)=-24+5i$

∴ المعادلة $x^2-(1-5i)x+(-24+5i)=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) جذراها $\frac{1}{\omega}-2i$ ، $\frac{1}{\omega^2}-2i$

الجذر الأول $\frac{1}{\omega}-2i=\omega^2-2i$

الجذر الثاني $\frac{2}{\omega^2}-2i=\omega-2i$

مجموع الجذرين $\omega^2-2i+\omega-2i=\omega^2+\omega-4i=-1-4i$

$(\omega^2-2i)\ (\omega-2i)=1-2i\omega^2-2i\omega-4=-3-2i(\omega^2+\omega)$

حاصل ضرب الجذرين $=-3-2i(-1)\ \ -3+2i$

∴ **المعادلة** $x^2-(-1-4i)\ x+(-3+2i)=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $\frac{3}{\omega^2}-\omega^2$

الجذر الأول $\frac{3}{\omega^2}-\omega^2=3\ \omega-\omega^2$

∵ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين هو $3\ \omega-\omega^2$

∴ الجذر الثاني هو مرافقه أي $3\ \omega^2-\omega$

مجموع الجذرين $3\ \omega-\omega^2+3\ \omega^2-\omega=-2\ \omega-2\ \omega^2=2$

$(3\ \omega-\omega^2)(3\ \omega^2-\omega)=9-3\omega-3\omega^2+1=10-3\ (\omega+\omega^2)=10+3=13$

∴ المعادلة $x^2-2\ x+13=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) جذراها $3\ i\omega-\omega^2 , 3\ i\ \omega^2-\omega$

مجموع الجذرين $3\ i\omega-\omega^2+3\ i\omega^2-\omega=3\ i(\omega+\omega^2)\ -\omega^2-\omega$

$=-3\ i+1=1-3\ i$

ضرب الجذرين $(3\ i\omega-\omega^2)\ (3\ i\omega^2-\omega)=-9\ \omega^3-3\ i\omega^2-3i\omega+\omega^3$

$=\ -9+1-3\ i(\omega^2+\omega)=-8+3\ i$

∴ المعادلة $x^2-(1-3\ i)x+(-8+3\ i)=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

5) جذراها $(2\omega+2\omega^2-1)^2 , (2-2\ \omega-2\omega^2)^2$ **الحل واجب** وزاري 97 دور 2

6) جذراها $2\omega i+\frac{3i}{\omega}$ ، $3i\omega-\frac{2\omega^2}{i}$ **الحل واجب** وزاري 99 دور 1

7) جذراها $\frac{3}{1-\omega}$ ، $\frac{3}{1-\omega^2}$ — الحل واجب — وزاري 2012 الدور التمهيدي

8) جذراها $\frac{\omega}{3-\omega^2}$ ، $\frac{\omega^2}{3-\omega}$ — الحل واجب — وزاري 2013 الدور التمهيدي

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد : $\frac{7+i\omega+i\omega^2}{1-i\omega-i\omega^2}$ — وزاري 98 دور 1

العدد

$$\frac{7+i\omega+i\omega^2}{1-i\omega-i\omega^2}=\frac{7+i(\omega+\omega^2)}{1-i(\omega+\omega^2)}=\frac{7-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{6-8i}{2}=3-4i$$

نفرض ان $\sqrt{3-4i}=x+iy$ …… اكمل الحل واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

تمارين 3 – 1

س1//اكتب المقادير الاتية في أبسط صورة :

a) $\omega^{64}=(\omega^3)^{21}\ \omega=\omega$

b) $\omega^{-325}=\frac{1}{(\omega^3)^{108}.\ \omega}=\frac{1}{\omega}=\omega^2$

c) $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega^{32}}\right)^{12}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega^{2}}\right)^{12}}=\frac{1}{(1+\omega)^{12}}=\frac{1}{(-\omega^2\ )^{12}}=\frac{1}{\omega^{24}}=\frac{1}{1}=1$

d) $(1+\omega^2)^{-4}=\frac{1}{(1+\omega^2)^4}=\frac{1}{(-\omega)^4}=\frac{1}{\omega^4}=\frac{1}{\omega}=\omega^2$

e) $\omega^{9n+5}=\omega^{9n}\ .\ \omega^5=(\omega^3)^{3n}\ .\ \omega^3\ .\ \omega^2=(1)^{3n}\ .\ 1\ .\ \omega^2=1\ .\ \omega^2=\omega^2$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2// كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $1+\omega^2\ ,\ 1+\omega$

مجموع الجذرين $(1+\omega^2)+(1+\omega)=1+\omega^2+\omega+1=1+0=1$

ضرب الجذرين $(1+\omega^2)(1+\omega)=-\omega\ (-\omega^2)=\omega^3=1$

∴ المعادلة $x^2-x+1=0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $\frac{\omega}{2-\omega^2}\ ,\ \frac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذرين $\frac{\omega}{2-\omega^2}+\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega(2-\omega)+\omega^2(\ 2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

$$=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega^2-2\omega+\omega^3}=\frac{2(\omega+\omega^2)-(\omega^2+\omega)}{5-2(\omega^2+2\omega)}=\frac{-2+1}{5+2}=\frac{-1}{7}$$

ضرب الجذرين $\frac{\omega}{2-\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega^3}{4-2\omega^2-2\ \omega+1}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7}$

$x^2-(\frac{-1}{7})\ x+\frac{1}{7}=0\ ](7)$ وبالضرب في

∴ المعادلة هي : $7x^2+x+1=0$

c) $\frac{3i}{\omega^2} = 3i\omega$, $\frac{-3\,\omega^2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 3i\omega^2$ نبسط كلا العددين

$3i\omega + 3i\omega^2 = -3i$ مجموع الجذرين

$(3i\omega)(3i\omega^2) = 9i^2\omega^3 = -9$ ضرب الجذرين

$x^2 - (-3i)x + (-9) = 0$ المعادلة ∴

$x^2 + 3ix - 9 = 0$

*ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س3// إذا كان $z^2 + z + 1 = 0$ فأوجد قيمة $\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

الحل

يجب حل المعادلة بالدستور لمعرفة قيمة z نقارن مع معادلة الدرجة الثانية $az^2 + bz + c = 0$

$$z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-1 \mp \sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

نلاحظ ان قيم z هي الجذور ا:لتكعيبية المركبة للعدد واحد الصحيح أي : $z = \omega^2$ or $z = \omega$

$$\because\ z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \omega^2 \text{ or } z = \omega$$

$z = \omega$ عندما $\Rightarrow \frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8} = \frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2} = \frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2}$

$z = \omega^2$ عندما $\Rightarrow \frac{1+3(\omega^2)^{10}+3(\omega^2)^{11}}{1-3(\omega^2)^7-3(\omega^2)^8} = \frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}} = \frac{1+3\omega^2+3\omega^4}{1-3\omega^2-3\omega^4}$

$$= \frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2-3\omega} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4 // اثبت إن :

a) $(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2})^2 = \frac{-1}{3}$

L.H.S $= (\frac{2+\omega^2-2-\omega}{(2+\omega)(2+\omega^2)})^2 = (\frac{\omega^2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+1})^2 = (\frac{\mp\sqrt{3}\ i}{5-2})^2 = \frac{3\ i^2}{9} = \frac{-1}{3} =$ R.H.S

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2} = \frac{2}{3}$

L.H.S $= \frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2} = \frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} =$ R.H.S

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $\left(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2\right)\left(1 + \omega - \frac{5}{\omega}\right) = 18$

L.H.S $= \left(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2\right)\left(1 + \omega - \frac{5}{\omega}\right) = (1 + \omega^2 - 2\omega)(-\omega^2 - 5\omega^2)$

$= (-\omega - 2\omega)(-6\omega^2)$

$= (-3\omega)(-6\omega^2) = 18 =$ R.H.S

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $(1+\omega^2)^3 + (1+\omega)^3 = -2$

L.H.S $= (-\omega)^3 + (-\omega^2)^3 = -\omega^3 + (-\omega^6) = -1 + (-1) = -2 =$ R.H.S

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

لكي نمثل الاعداد المركبة تمثيلا هندسيا سنسمي الأشكال التي تمثل الأعداد المركبة والعمليات عليها بأشكال (ارجاند) و يسمى المستوي الذي سنعين فيه الأشكال باسم (مستوي غاوس) أو المستوي المركب ، إذ يسمى المحور (x – axis) المحور الحقيقي والمحور (y – axis) يسمى المحور التخيلي

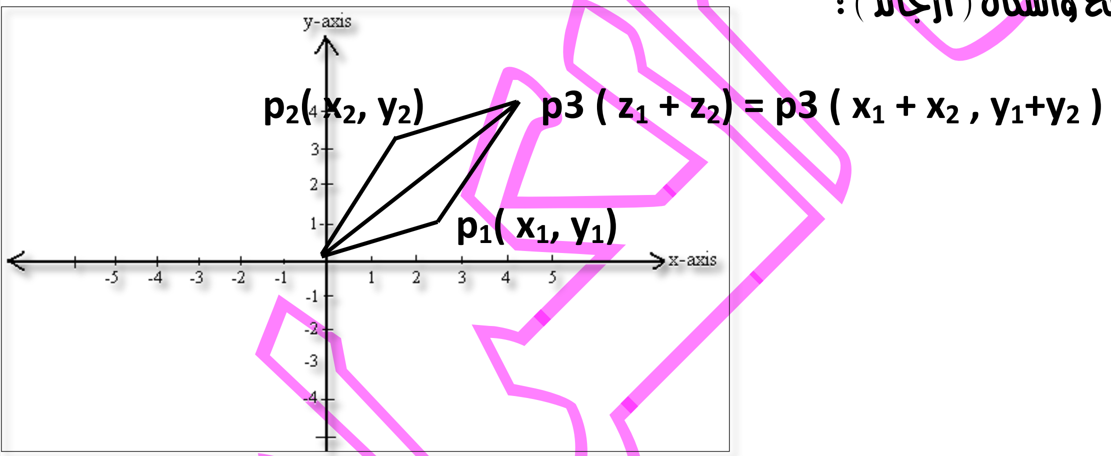
وقد قلنا سابقا (في تعريف العدد المركب) ان العدد المركب $z = x + yi$ مناظر للزوج المرتب الوحيد (x , y) وقد تعرف الطالب عند دراسته لموضوع (المتجهات) كيفية تمثيل المتجه في النظام الاحداثي وهنا بنفس الطريقة سنعين الزوج المرتب على المستوي المركب ويكون المتجه المقيد (يبدأ من نقطة الاصل الى النقطة) يمثل متجه العدد المركب .

فمثلا لو كان لدينا $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان تمثلان بالنقطتين $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ وهذا يمثل الصيغة الديكارتية للعدد المركب .

فأن :
$$z_1+ z_2=(x_1 + x_2) + (y_1+y_2)i \ =(x_1 + x_2) +(y_1+y_2) \ i$$

$$\therefore p3 \ (x_1 + x_2 , y_1+y_2)$$

والشكل الاتي يوضح عملية الجمع وأشكال (ارجاند) :



وباستخدام المتجهات

$$\overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2} = \overrightarrow{op_3}$$

ملاحظة 1 لتمثيل ناتج جمع عددين مركبين يمكن ان نستخدم الخطوات الاتية :

1) نعين كلا العددين (بعد تحويلهما الى ازواج مرتبة) على المستوي المركب .
2) نجمع العددين ثم نحول العدد الناتج الى زوج مرتب
3) نعين العدد (الزوج المرتب الجديد) ونرسم المتجه الذي يمثله
4) نكمل الرسم بين العددين وناتج الجمع .

ملاحظة 2 لتمثيل ناتج طرح عددين مركبين يمكن ان نستخدم الخطوات الاتية :

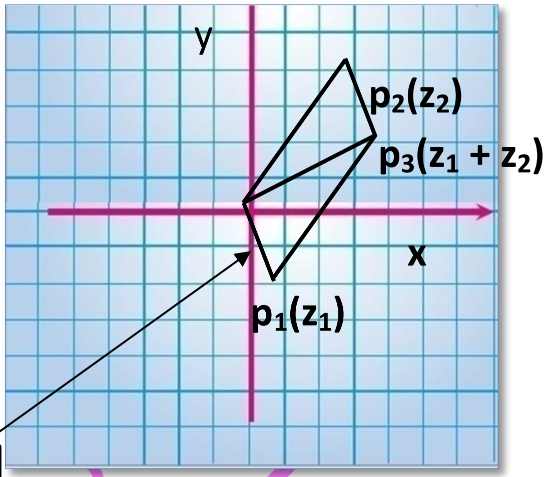
1) نعين كلا العددين (بعد تحويلهما الى ازواج مرتبة) على المستوي المركب .
2) نجد النظير الجمعي للعدد المطروح ونحوله الى زوج مرتب ونعينه على المستوي المركب .
3) نطرح العددين و نحول العدد الناتج الى زوج مرتب
4) نعين العدد (الزوج المرتب الجديد) ونرسم المتجه الذي يمثله
5) نكمل الرسم بين العدد الاول والنظير الجمعي للعدد الثاني وناتج الطرح .

مثال إذا كان $z_1 = 1 - 2i , z_2 = 3 + 4i$ ، فأوجد $z_1 + z_2$ ، $z_1 - z_2$ ثم مثلها بأشكال ارجاند

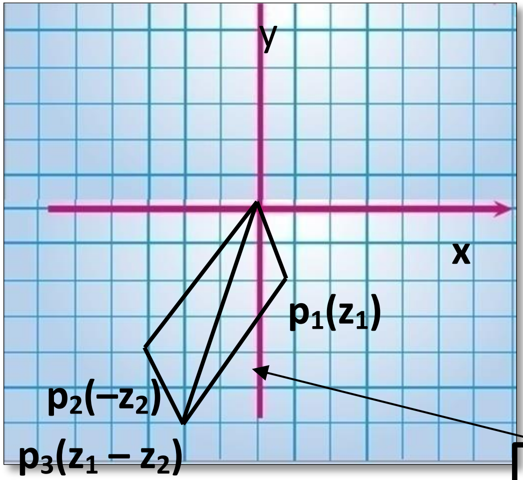
الحل

1) $z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (3 + 4i) = 4 + 2i$ .... (شكل رقم (1))

2) $z_1 - z_2 = (1 - 2i) - (3 + 4i) = -2 - 6i$ .... (شكل رقم (2))



(شكل رقم (1))



(شكل رقم (2))

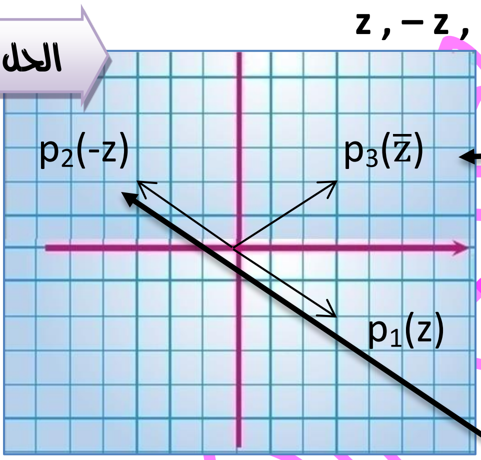
اشكال ارجاند

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال إذا كان $z = 3 - 2i$ مثل على شكل ارجاند كل مما يأتي : $z , -z , \bar{z}$

الحل

$\bar{z} = 3 + 2i , -z = -3 + 2i$



انعكاس حول محور السينات
$p_1(z) \Rightarrow p_3(\bar{z})$

دوران نصف دورة أو 180°
$p_1(z)$, $p_2(-z)$

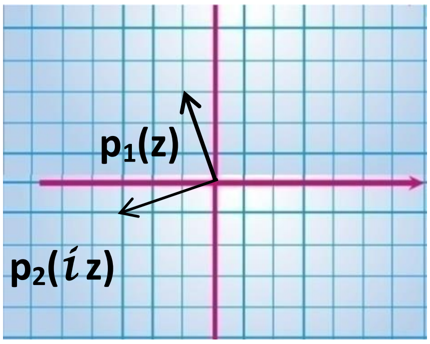
ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال إذا كان $z = -1 + 3i$ مثل على المستوي كلا من :1) $2z$, 2) iz ماذا تلاحظ ؟

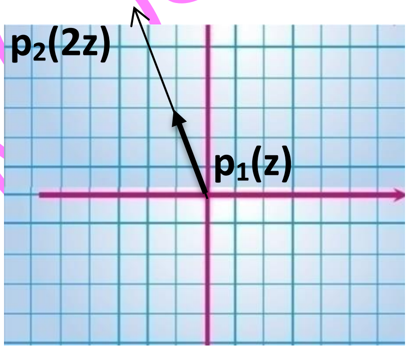
الحل

$z = -1 + 3i \Rightarrow iz = -i + 3i^2 = -3 - i$

$z = -1 + 3i \Rightarrow 2z = -2 + 6i$



دوران
90° أو
ربع دورة
عكس



تكبير
معامله
2

ملاحظة : ليكن $z \in \mathbb{C}$ فأن :

1) $(K z)$ تمثل تكبير للعدد z معامله K حيث $K \neq 0 , K \in R$

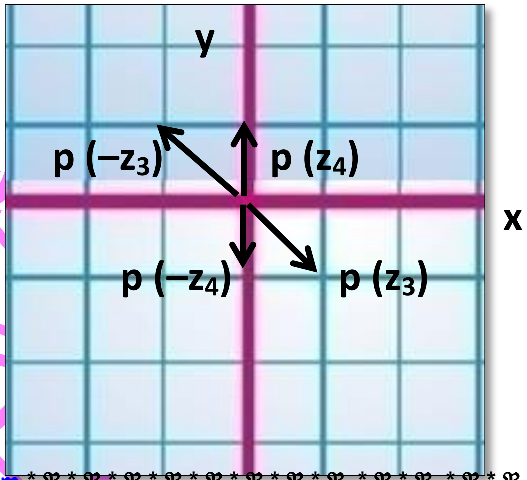
2) $(i z)$ تمثل دوران بزاوية $(90°)$ عكس عقارب الساعة للعدد z حيث $i =$

تمارين 4 – 1

1) اكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد آلاتية ثم مثل هذه الاعداد و نظائرها الجمعية على شكل ارجاند :

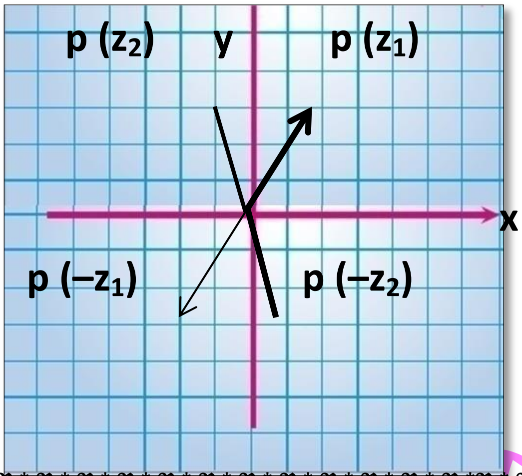
$z_3 = 1 - i = (1, -1) \Longrightarrow -z_3 = -1 + i = (-1, 1)$

$z_4 = i = 0 + i = (0, 1) \Longrightarrow -z_4 = -i = (0, -1)$



$z_1 = 2 + 3i = (2, 3) \Longrightarrow -z_1 = -2 - 3i = (-2, -3)$

$z_2 = -1 + 3i = (-1, 3) \Longrightarrow -z_2 = 1 - 3i = (1, -3)$

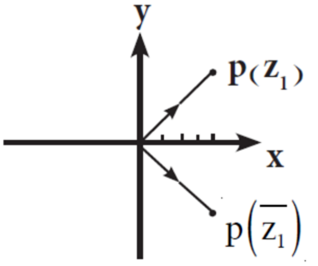


ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

2) اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثل الأعداد ومرافقاتها في شكل ارجاند :

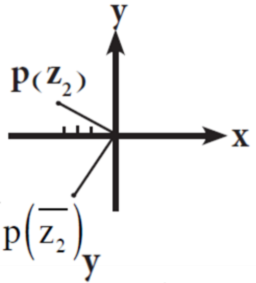
$Z_1 = 5 + 3i$ $\qquad$ $\overline{Z}_1 = 5 - 3i$

$p(Z_1) = (5, 3)$ $\qquad$ $P(\overline{Z}_1) = (5, -3)$



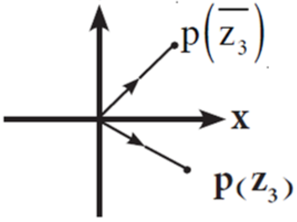
$Z_2 = -3 + 2i$ $\qquad$ $\overline{Z}_2 = -3 - 2i$

$P(Z_2) = (-3, 2)$ $\qquad$ $P(\overline{Z}_2) = (-3, -2)$



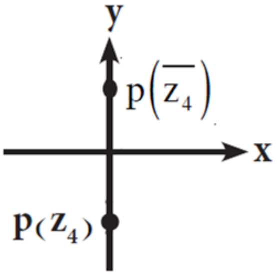
$Z_3 = 1 - i$ $\qquad$ $\overline{Z}_3 = 1 + i$

$P(Z_3) = (1, -1)$ $\qquad$ $P(\overline{Z}_3) = (1, 1)$



$Z_4 = -2i$ $\qquad$ $\overline{Z}_4 = 2i$

$P(Z_4) = (0, -2)$ $\qquad$ $P(\overline{Z}_4) = (0, 2)$



3) إذا كان : $z = 4 - 2i$ وضح على المستوي كلا من $z , \bar{z} , -z$

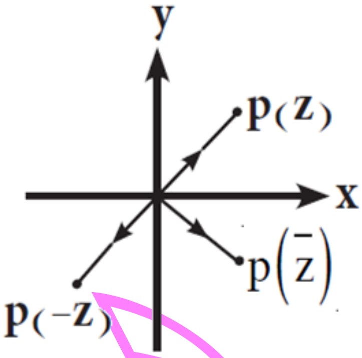
$$Z = 4 + 2i \Rightarrow P(Z) = (4,2)$$

$$\overline{Z} = 4 - 2i$$

$$P(\overline{Z}) = (4,-2)$$

$$-Z = -4 - 2i$$

$$p(-Z) = (-4,-2)$$



4) إذا كان : $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من:

$z_1 + z_2 , z_1 - z_2 , -3z_2 , 2z_1$

$$\star\ Z_3 = Z_1 + Z_2 = (4-2i)+(1+2i) = 5+0i$$

$$P(Z_2) = (1,2)$$

$$P(Z_1) = (4,-2)$$

$$P(Z_1 + Z_2) = P(Z_3) = (5,0)$$

$$\star\ Z_4 = Z_1 - Z_2 = (4-2i)-(1+2i) = (4-2i)+(-1-2i) = (3-4i)$$

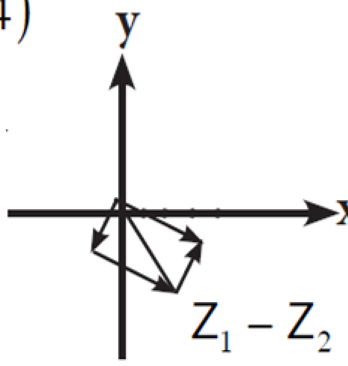
$$P(Z_1 - Z_2) = P(Z_4) = (3,-4)$$

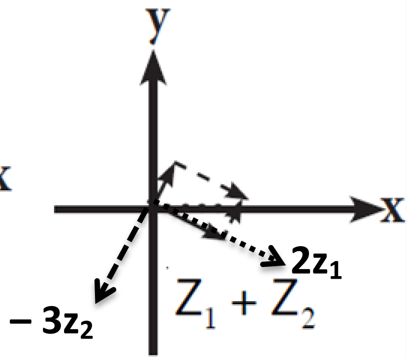
$$\star\ -3Z_2 = -3(1+2i) = -3-6i$$

$$P(-3Z_2) = (-3,-6)$$

$$\star\ 2Z_1 = 2(4-2i) = 8-4i$$

$$P(2Z_1) = (8,-4)$$

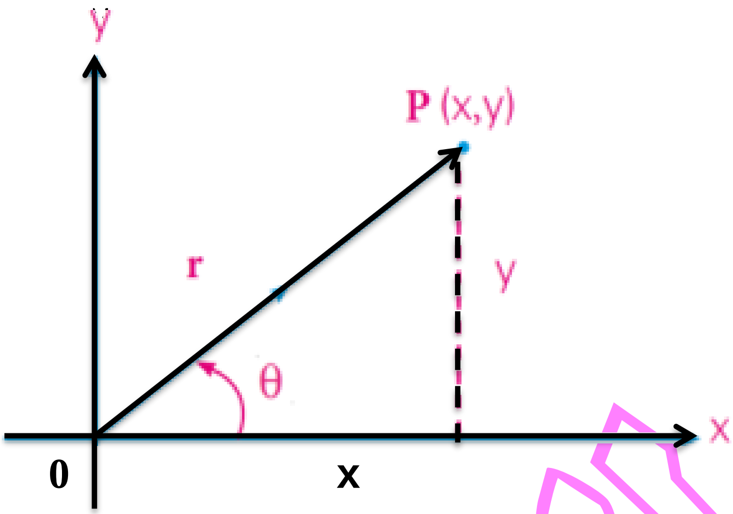




الصيغة القطبية للعدد المركب

تعرفنا في المواضيع السابقة على صيغتي العدد المركب الجبرية $z = a + b\acute{\imath}$ ، والصيغة الديكارتية $z = (a , b)$ ، وقد مثلنا الزوج المرتب (a , b) في المستوي كما في الشكل ادناه :

فلو طبقنا مبرهنة فيثاغورس على المثلث القائم في الشكل المجاور حيث فرضنا ان الوتر r وطولي الضلعين القائمين هما احداثيي النقطة p أي x ,y على الترتيب فستحصل على :



$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ولإيجاد قياس الزاوية θ نستخدم الخطوات الاتية :

1) نكتب العدد المركب على صورة زوج مرتب ونحدد الربع الذي يقع فيه

2) نجد كلا من sin θ و cos θ حسب العلاقات الاتية (درسناها في المتجهات في السنوات السابقة)

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

ومنها سنجد قيمة الزاوية من خلال θ (باستثناء الاشارات) سنجد الزاوية التي تنتسب لها الزاوية cos θ و sin θ قيم حسب احدى العلاقات الاتية والتي سبق ان درسها الطالب :

a) في الربع الأول : θ لا تتغير تبقى كما هي

b) في الربع الثاني : $\therefore \theta = \pi - h$

c) في الربع الثالث : $\therefore \theta = \pi + h$

d) في الربع الرابع : $\therefore \theta = 2\pi - h$

رحلة التفوق
في
السادس

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة يسمى r باسم (مقياس العدد المركب) ويقصد به طول المتجه الذي يمثل العدد المركب ويرمز له اما r أو ||z|| وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ mod z أي أن :

$$r = ||z|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وتسمى θ سعة العدد المركب ويرمز لها بالرمز arg (z) (وقد بينا كيفية ايجادها اعلاه)

ملاحظة لا تنسى في حالة إذا كان $\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = 0$ فأن الزاوية θ تقع على احد المحاور أي ان قيمتها واحدة من القيم الآتية :

$$\theta = 0^\circ \quad \text{or} \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad 180^\circ = \pi \quad \text{or} \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد المقياس والسعة للعدد المركب $z = \sqrt{3} + i$

الحل العدد في الربع الاول $z_1 = \sqrt{3} + i = (\sqrt{3}, 1)$

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد المقياس والسعة للعدد المركب $z = -1 + i$

الحل العدد في الربع الثاني $z_1 = -1 + i = (-1, 1)$

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

** العدد المركب $z = 0$ سعته غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

الصيغة القطبية للعدد المركب

بالاستفادة من المقياس والسعة للعدد المركب يمكن ان يكتب العدد بصورة جديدة تسمى الصورة القطبية للعدد المركب كما يأتي :

نعلم أن

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Longrightarrow a = r\cos\theta \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{r} \Longrightarrow b = r\sin\theta$$

$Z = a + b\,i$ نعوض العلاقات اعلاه في العدد المركب

$$\therefore Z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta \Longrightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

سنستخدم هذه العلاقة لكتابة العدد المركب بالصورة القطبية :

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad , \theta \in [0, 2\pi)$$

مثال الكتاب صفحة 38 عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

$Z = -2 + 2i$

وزاري 2013 الدور الاول

الحل

العدد في الربع الثاني

$z = -2 + 2i = (-2, 2)$

نجد المقياس

$\mod z = r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

نجد كل من :

$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

نجد السعة (حسب الربع) :

$\therefore \theta = \arg z = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

نكتب العدد بالصورة القطبية

$\therefore z = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

2) $Z = 2\sqrt{3} - 2i$

وزاري 2012 الدور الثاني

الحل

العدد في الربع الرابع

$z = 2\sqrt{3} - 2i = (2\sqrt{3}, -2)$

نجد المقياس

$r = \sqrt{4(3)+4} = \sqrt{16} = 4$

نجد كل من :

$\sin\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نجد السعة (حسب الربع) :

$\therefore \theta = \arg z = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

نكتب العدد بالصورة القطبية

$\therefore z = 4\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

مثال واجب عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

1) $Z = \frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i}$

2) $C = \sqrt{3} - 3i$

ملاحظة يمكن ايجاد الصيغة القطبية للأعداد المركبة الاتية بنفس الخطوات السابقة ولكن سنكتفي بأخذ صورتها القطبية بصورة مباشرة كوننا سنحتاجها كأساس لحل امثلة اخرى :

1) $1 = \cos 0 + i\sin 0$ ....(1)

2) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ....(2)

3) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ....(3)

4) $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ ....(4)

مهمة جدا

** والآن سنستخدم الصور القطبية للأعداد اعلاه لإيجاد الصور القطبية لبعض الاعداد (لاحظ المثال)

مثال محلول

1) $2 = 2\,(1) = 2\,(\cos 0 + i \sin 0)$

2) $-8 = 8\,(-1) = 8\,(\cos \pi + i \sin \pi)$

3) $\frac{1}{3}\, i = \frac{1}{3}\,(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

4) $-6i = 6\,(-i) = 6\,(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ايجاد الصورة الجبرية من الصورة القطبية للعدد المركب

لإيجاد الصورة الجبرية للعدد المركب نحتاج اولا الى معرفة الزاوية التي تنتسب لها سعة العدد المركب arg(z) حيث يمكن ايجاد هذه الزاوية بسهولة اذا كانت احدى الزوايا الخاصة أي $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ اما اذا كانت السعة لا تنتسب لأي من هذه الزوايا فلا نجد الصورة الجبرية لها (يمكن الاعتماد على معلوماتك في الصف الخامس العلمي) وهنا سنأخذ كمراجعة كيفية ايجاد القياس الرئيس للزوايا أولا وايجاد الزاوية التي تنتسب لها سعة العدد المركب ثانيا .

اولا : القياس الرئيس للزاوية (لاحظ التفاصيل أدناه التي نحتاجها هنا فقط لتسهيل طرح الموضوع)

ملاحظة : يتعرف الطالب على الزاوية في حالة الكسر إذا كانت في قياس رئيس أم لا إذا كان حاصل قسمة البسط على المقام أكبر من 2.

ولتحويل الزاوية للقياس الرئيس أي تنتمي للفترة $[0,2\pi]$ لاحظ الملاحظات الاتية :

1) إذا كانت الزاوية π مضروبة بعدد صحيح زوجي (موجب أو سالب) الناتج = 0

2) إذا كانت الزاوية π مضروبة بعدد صحيح فردي (موجب أو سالب) الناتج = π

3) في حالة الكسر الاعتيادي (الموجب) يضرب المقام مهما كان في 2 ونجد اكبر مضاعف للناتج اصغر من البسط يطرح من بسط الكسر والناتج يمثل القياس الرئيس (مثلا) $\frac{17\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

لاحظ أن المقام 3 × 2=6 (مضاعفات 6 هي 6 و 12 و 18 وأكبرها بحيث أصغر من البسط 17 هو 12 طرح من 17 والباقي 5 البسط الجديد)

ثانيا : الزاوية المنتسبة : هي كل زاوية لا تقع في الربع الأول (تقع في أحد الأرباع الثاني والثالث والرابع) تنتسب لزاوية في الربع الأول من خلالها نستطيع إيجاد قيم الدوال الدائرية لها (ويقصد بالزاوية المنتسبة هنا سعة العدد المركب) إذا استطعنا إيجاد هذه الزاوية التي تنتسب لها ولإيجاد تلك الزاوية بأبسط طريقة :

1) نبحث عن موقع الزاوية (في أي ربع) لمعرفة أشاره الدالة فيه ونكتب أولا (مهمة جدااا)

2) نكتب الدالة نفسها

3) نحذف العدد في البسط ونكتب باقي الزاوية

4) نجد الناتج للدالة حسب الزاوية الناتجة

مثال

أحسب كلا مما يأتي : $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{3}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$

الحل

1) نتحقق من ان الزاوية بالقياس الرئيس .
2) نجد الزاوية في الربع الثالث و sin فيه سالب
3) تكتب السالب والـ sin وباقي الزاوية بعد حذف 5 من البسط

$$1)\ \sin\frac{5\pi}{4} =$$
$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1) نتحقق من ان الزاوية بالقياس الرئيس .
2) نجد الزاوية في الربع الرابع و cos فيه موجب
3) تكتب الموجب والـ cos وباقي الزاوية بعد حذف 5 من البسط

$$2)\ \cos\frac{5\pi}{3} =$$
$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$+\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

1) نتحقق من ان الزاوية بالقياس الرئيس .
2) نجد الزاوية في الربع الثاني و cos فيه سالب
3) تكتب السالب والـ cos وباقي الزاوية بعد حذف 5 من البسط

$$3)\ \cos\frac{5\pi}{6} =$$
$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$-\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ

مثال

اكتب كلا من $z_1 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$, $z_2 = \cos\frac{14\pi}{3} + i\sin\frac{14\pi}{3}$ بالصيغة الجبرية؟

الحل

1) نتحقق من ان الزاوية بالقياس الرئيس .
2) نجد الزاوية في الربع الرابع و cos فيه موجب و sin سالب
3) تكتب الاشارات وباقي الزاوية بعد حذف 11 من البسط

$$z_1 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$$
$$= \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

الزاوية هنا ليست بالقياس الرئيس لان البسط 14 اكبر من ضعف المقام 6 لذا نطرح اكبر عدد من مضاعفات 6 واصغر من 14 من البسط وهو 12

$$z_2 = \cos\frac{14\pi}{3} + i\sin\frac{14\pi}{3}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$ الزاوية في الربع الثاني
$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال أكتب بالصيغة الجبرية كل من $z_1 = \cos\frac{19\pi}{4} + i\sin\frac{19\pi}{4}$ ؟ **واجب**

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة والآن بعد ان تعلمنا كتابة العدد المركب بالصورة القطبية والعكس سنتطرق لمبرهنة جديدة تسمى مبرهنة ديموافر وتستخدم لإيجاد قيمة اي عدد مركب مرفوع لاس عدد صحيح ولكن سنحتاج اولا للتعرف على كيفية ضرب الاعداد المركبة بصورتها القطبية فلو فرضنا أن :

$$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z_2 = \cos\emptyset + i\sin\emptyset$$

$$\boxed{\therefore z_1 . z_2 = \cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال اكتب $z_1 . z_2$ حيث $z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} , z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ بالصيغتين القطبية والجبرية؟

الحل

$$z_1 . z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$ نجمع الزوايا

$$= \cos\left(\frac{5\pi+2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi+2\pi}{6}\right)$$ نوحد المقامات ونجمع

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$ (الزاوية في الربع الثالث) الصورة القطبية

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

** والآن لو رجعنا لقانون الضرب اعلاه وعوضنا بدل الزاويتين بـ x لأصبح القانون :

$$z . z = \cos(x + x) + i\sin(x + x) \Longrightarrow z^2 = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

ومن خلال تعميم هذا الاستنتاج تم استنتاج العلاقة التي تسمى بمبرهنة ديموافر .

مبرهنة ديموافر ليكن : $n \in N$, $\theta \in R$ فإن :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

ويمكن برهان هذه المبرهنة باستخدام الاستقراء الرياضي (راجع الكتاب المقرر) والبرهان غير مطلوب من الطالب .

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال احسب قيمة :

$$\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4 =$$

الحل

$$\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4 = \cos\frac{4(3\pi)}{8} + i\sin\frac{4(3\pi)}{8}$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i\,(-1) = -i$$

مثال 29 الكتاب

أوجد ناتج المقدار باستخدام ديموافر : $(1+i)^{11}$

وزاري 2011 دور

الحل

نجد اولا الصورة القطبية للعدد ولنفرض أن : $z = 1 + i = (1 , 1)$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad , \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

نجد السعة (حسب الربع) $\therefore \theta=\arg z=\frac{\pi}{4}$

الصورة القطبية للعدد هي $\therefore z=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

الآن نطبق مبرهنة ديموافر $\therefore z^{11}=[(\sqrt{2})\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{11}$

$$=(\sqrt{2})^{11}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$=\sqrt{2}^{10}\sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{10}{2}}(\sqrt{2})\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=2^{5}(\sqrt{2})\,(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=32(\sqrt{2})\,(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=32(-1+i)$$

**هنا الزاوية ليست بالقياس الرئيس لان البسط 11 اكبر من ضعف المقام 8 لذا نطرح اكبر عدد من مضاعفات 8 واصغر من 11 من البسط وهو 8 فيصبح البسط 3

** لاحظ ان الزاوية اصبحت في الربع الثاني وهنا

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال 28 الكتاب

بين انه لكل $\theta \in R , n \in N$ فإن: $(\cos\theta-i\sin\theta)^{n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

الحل

$$L.H.S\ (\cos\theta+(-i\sin\theta))^{n}=(\cos\theta+(i\sin-\theta))^{n}$$

$$=(\cos-\theta+(i\sin-\theta))^{n}$$

$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

$$=\cos n\theta-i\sin n\theta=R.H.S$$

تذكر أن :
$\sin-\theta=-\sin\theta$
$\cos-\theta=\cos\theta$

** وضعنا $-\theta$ بدل θ مع cos
وضعنا $\sin-\theta$ بدل $-\sin\theta$
**
** والغاية ان تكون الزوايا

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

ملاحظة

لاحظ المثال الآتي : $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\cos(-1)\theta+i\sin(-1)\theta$

$$=\cos-\theta+i\sin-\theta=\cos\theta-i\sin\theta$$

لذا فبصورة عامة :

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta}$$

مثال أوجد ناتج ما يأتي بالصيغة القطبية :

الحل

$$(\cos 3\theta + \ i \sin 3\theta)^{-2} \ =$$

$$(\cos 3\theta + \ i \sin 3\theta)^{-2} = (\cos \ -6\theta + \ i \sin \ -6\theta)$$

$$= (\cos 6\theta - i \sin 6\theta)$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال أوجد ناتج ما يأتي بالصيغة القطبية :

الحل

$$\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4}{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^3} = (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^{-3}$$

$$= (\cos \theta + i \sin\theta)^{12} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-6}$$ عكس مبرهنة ديموافر

$$= (\cos \theta + i \sin \theta)^{6} = (\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$$ تجمع الاسس

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

*والان لو كان العدد مرفوع لاس كسري أو اردنا ايجاد جذور العدد التربيعية او اكثر سنستخدم النتيجة الاتية :

نتيجة مبرهنة ديموافر

ليكن : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، $n \in N$ ، $\theta \in R$ فأن :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos \theta + \ i \sin \theta)^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + \ i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

حيث $k = 0 , 1 , 2 , \dots , n - 1$

وتستخدم هذه النتيجة لإيجاد الجذور سواء التربيعية او التكعيبية او غيرها كذلك في حال طلبت قيمة لعدد مركب مرفوع لاس كسر (كما سنلاحظ في الامثلة والتمارين) ويمكن استخدام الخطوات ادناه لترتيب الحل :

1) نجد الصيغة القطبية للعدد المركب (ان لم تكن موجودة)

2) في حال كون الاس كسر نتخلص من بسطه باستخدام مبرهنة ديموافر

3) نكتب القانون $$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + \ i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

4) نعوض بدل k مرة صفر ونجد الناتج بالصورة القطبية ثم الاعتيادية ان امكن .

5) ومرة واحد ونجد الناتج بالصورة القطبية ثم الاعتيادية ان امكن .

6) ومرة اثنين ونجد الناتج بالصورة القطبية ثم الاعتيادية ان امكن .. وهكذا لحد العدد الاصغر من n بواحد

مثال باستخدام مبرهنة ديموافر أوجد الجذور التربيعية للعدد $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

الحل نجد اولا الصورة القطبية للعدد المركب حيث سنفرض ان :

$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = (\sqrt{2} , -\sqrt{2})$ العدد في الربع الرابع

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore z = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ نكتب العدد بالصورة القطبية

$\therefore z^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} (\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^{\frac{1}{2}}$ نجد الآن الجذور التربيعية للعدد

$\therefore z^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2})(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{2}) \; , \; k = 0 , 1$

عند $k = 0 \Rightarrow \therefore z_1 = (\sqrt{2})(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$

عند $k = 1 \Rightarrow \therefore z_2 = (\sqrt{2})(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8})$

لاحظ ان المطلوب الجذور التربيعية لذا تأخذ k قيمتين فقط هما الصفر والواحد

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*

** لاحظ في المثال اعلاه ان المقام في الزوايا ليس من الاعداد (2، 3، 4، 6) لذا يصعب ايجاد الصورة الاعتيادية للعدد المركب فينتهي الحل هنا الى هذا الحد .

ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*http://raeed.mathsboard.com *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ *ℜ*ℜ *ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*ℜ*

مثال 30 من الكتاب حل المعادلة الآتية باستخدام مبرهنة ديموافر أو نتيجتها : $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل

$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$x^3 = \cos\pi + i\sin\pi$ قاعدة سابقة في صفحة 45

$\therefore x = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$x = \cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3} \quad k = 0 ,1, 2$

لاحظ ان المطلوب الجذور التكعيبية لذا تأخذ k ثلاث قيم

$k = 0 \Rightarrow x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ربع اول

$k = 1 \Rightarrow x_2 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}$

$= \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0(i) = -1$ على محور السينات السالب

$k = 2 \Rightarrow x_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ ربع رابع

$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\text{set} = \{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i , \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i , -1 \}$

** لاحظ في المثال اعلاه ان المقام في الزوايا (3) لذا يجب ايجاد الصورة الاعتيادية للعدد المركب كما تعلمنا سابقاً لكل حالة حسب الزاوية التي لدينا .

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال 31 من الكتاب

أوجد الصيغة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم أوجد الجذور الخمسة له

الحل

نجد اولا الصورة القطبية للعدد المركب حيث سنفرض ان :

$z = \sqrt{3} + i = (\sqrt{3}, 1)$ الربع الأول

$\therefore r = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ العدد بالصورة القطبية

$\therefore z^2 = (2)^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$ نجد الان مربع العدد بالصورة القطبية

$\therefore z^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = \left(4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{5}}$ نجد الان جذور العدد الناتج بالصورة القطبية

$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$, k = 0 ,1, 2 , 3 , 4

عند $k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

عند $k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

عند $k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

عند $k = 3 \Rightarrow z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$

عند $k = 4 \Rightarrow z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

لاحظ ان المطلوب الجذور الخمسة لذا k تأخذ خمس قيم

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

** لاحظ في المثال اعلاه ان المقام في الزوايا ليس من الاعداد (2، 3، 4، 6) لذا يصعب ايجاد الصورة الاعتيادية للعدد المركب فينتهي الحل هنا الى هذا الحد .

مثال أوجد الجذور الخمسة للعدد (-32)

الحل نفرض أن : $z = -32$

$z = 32\,(-1) = 32\,(\cos\pi + i\sin\pi\ )$ راجع صفحة 45

$$\therefore z^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{32}\,)\,(\cos\pi\ +\ i\sin\pi)^{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore z^{\frac{1}{5}} = 2\,(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}\ +\ i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5})\ ,\ k = 0\,,1\,,2\,,3\,,4$$

لاحظ ان المطلوب الجذور الخمسة لذا k تأخذ خمس قيم

$$k = 0\ \Longrightarrow \therefore z_1\ = 2\,(\cos\frac{\pi}{5}\ +\ i\sin\frac{\pi}{5})$$

$$k = 1\ \Longrightarrow \therefore z_2\ = 2\,(\cos\frac{3\pi}{5}\ +\ i\sin\frac{3\pi}{5})$$

$$k = 2\ \Longrightarrow \therefore z_3\ = 2\,(\cos\frac{5\pi}{5}\ +\ i\sin\frac{5\pi}{5}) = 2\,(\cos\pi\ +\ i\sin\pi)$$

$$= 2\,(-1\ +\ 0\,i\,) = \ -2$$

$$k = 3 \Longrightarrow \therefore z_4 = 2\,(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$$

$$k = 4\ \Longrightarrow \therefore z_5\ = 2\,(\cos\frac{9\pi}{5}\ +\ i\sin\frac{9\pi}{5})$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال أوجد الجذور التكعيبية للعدد ($-i$)

الحل نفرض أن : $z = -i \Longrightarrow z = \ (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$$\therefore z^{\frac{1}{3}} = \ (\cos\frac{3\pi}{2} +\ i\sin\frac{3\pi}{2})^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \ (\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\ +\ i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3})\qquad k = 0\,,1\,,2$$

لاحظ ان المطلوب الجذور الثلاثة لذا k تأخذ ثلاث قيم

$$k = 0\ \Longrightarrow \therefore z_1 = \ (\cos\frac{3\pi}{6}\ +\ i\sin\frac{3\pi}{6}) = \ (\cos\frac{\pi}{2}\ +\ i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$= \boxed{(\,0 + i\,)}$$

$$k = 1\ \Longrightarrow \therefore z_2\ = \left(\cos\frac{7\pi}{6}\ +\ i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{6} -\ i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ i)}$$

$$k = 2\ \Longrightarrow \therefore z_3 = (\ \cos\frac{11\pi}{6}\ +\ i\sin\frac{11\pi}{6}\,) = (\ \cos\frac{\pi}{6} -\ i\sin\frac{\pi}{6}\ )$$

$$= \boxed{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ i)}$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

واجب

1) أوجد الجذور الستة للعدد ($64i$)

2) أوجد الجذور الأربعة للعدد ($81i$)

3) أوجد الجذور الثلاثة للعدد (i)

تمارين (5– 1)

1) أحسب ما يأتي :

a) $(\cos \frac{5}{24}\pi + i \sin \frac{5}{24}\pi)^4 = \cos 4(\frac{5}{24}\pi) + i \sin 4(\frac{5}{24}\pi)$

$= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ الربع الثاني

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

b) $(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi)^{-3} = (\cos \frac{-7\pi}{4} + i \sin \frac{-7\pi}{4})$

$= \cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} - i (- \sin \frac{\pi}{4})$ الربع الرابع

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

2) احسب باستخدام مبرهنة ديموافر (او التعميم) ما يأتي :

a) $(1 - i)^7$

$z = 1 - i = (1 , - 1)$ الربع الرابع

$|| z || = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} , \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \arg z = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore z = \sqrt{2} (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$

$\therefore z^7 = (\sqrt{2})^7 (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})^7$

$z^7 = (2^{\frac{1}{2}})^7 (\cos \frac{(7)7\pi}{4} + i \sin \frac{(7)7\pi}{4})$

$= (2^{\frac{7}{2}}) (\cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4})$

$z^7 = 2^3 . 2^{\frac{1}{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$= 8 \sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}) = 8 + 8i$

رحلة التفوق
في
السادس

الزاوية ليست بالقياس الرئيس لها لذا نضرب المقام في 2 ونجد من مضاعفات الـ 8 الاصغر من 49 وهو 48 نطرح من البسط لتصبح بالقياس الرئيس .

b) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

نفرض أن : $z=\sqrt{3}+i=(\sqrt{3},1)$ الربع الاول

$r=||z||=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \arg z=\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$\therefore z^{-9}=2^{-9}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}$

$z^{-9}=(\frac{1}{2^9})(\cos\frac{(-9)\pi}{6}+i\sin\frac{(-9)\pi}{6})$

$=(\frac{1}{512})(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2})$

$z^{-9}=(\frac{1}{512})(0-i(-1))=\frac{1}{512}i$

الاس السالب حسب الملاحظة

$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

3) بسط ما يأتي :

a) $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=(\cos 10\theta+i\sin 10\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-3}$

$=(\cos 10\theta+i\sin 10\theta)(\cos -9\theta+i\sin -9\theta)$

$=\cos(10\theta-9\theta)+i\sin(10\theta-9\theta)$

$=\cos\theta+i\sin\theta$

حل اخر : ((عكس مبرهنة ديموافر ثم عند القسمة نطرح الأسس إذا كانت الأساسات متساوية))

$$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=\frac{((\cos\theta+i\sin\theta)^2)^5}{((\cos\theta+i\sin\theta)^3)^3}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

b) $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$ .....بطريقتين

$(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4=(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)(\cos-\theta+i\sin-\theta)^4$

$=(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)(\cos-4\theta+i\sin-4\theta)$

$=\cos(8\theta-4\theta)+i\sin(8\theta-4\theta)$

$=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$

طريقة أخرى : ((عكس مبرهنة ديموافر ثم عند الضرب نجمع الأسس إذا كانت الأساسات متساوية))

$(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$

4) **أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $(-1+\sqrt{3}\,i)$ باستخدام ديموافر ثم باستخدام الطريقة المعروضة في البند (1 – 4) ((في صفحة 17 من الشروحات))**

اولا : (مبرهنة ديموافر) نفرض أن :

$z=-1+\sqrt{3}\,i=(-1,\sqrt{3})$ الربع الثاني

$r=\|z\|=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{-1}{2}, \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \arg z=\theta=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \therefore z^{\frac{1}{2}}=(2)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,1$

لاحظ ان المطلوب الجذور التربيعية لذا k تأخذ قيمتين

$k=0 \Rightarrow \therefore z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$

$k=1 \Rightarrow \therefore z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ الزاوية في الربع الثالث

$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$

ثانيا : (طريقة البند (1 – 4)) نفرض أن : $\sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}=a+bi$

$-1+\sqrt{3}\,i=a^2+2abi-b^2$ بالتربيع

$-1+\sqrt{3}\,i=a^2-b^2+2abi$

$\therefore a^2-b^2=-1 \quad ..... (1)$

$\therefore 2ab=\sqrt{3} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2a} \quad .... (2)$ من تساوي عددين مركبين

نعوض في (1)

$a^2-\frac{3}{4a^2}=-1 \quad](4a^2)$ بضرب طرفي المعادلة بـ $4a^2\neq 0$

$4a^4-3=-4a^2$

$4a^4+4a^2-3=0 \Rightarrow (2a^2-1)\boxed{\overset{\text{يهمل}}{(2a^2+3)}}=0 \Rightarrow \therefore 2a^2=1 \Rightarrow a=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

ألان نعوض في معادلة 2 لإيجاد قيم b

either $a=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ or $a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

∴ الجذران التربيعيان هما : $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \, , \, \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

5) باستخدام ديموافر أوجد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

نفرض أن : $z = 27\ i \Rightarrow z = 27\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$$\therefore z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = 3\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})\ ,\ k = 0 , 1 , 2$$

$k = 0 \Rightarrow \therefore z^{\frac{1}{3}} = 3\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 3\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ الجذر الأول

$$k = 1 \Rightarrow \therefore z^{\frac{1}{3}} = 3\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3})$$

$= 3\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 3\,(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ الجذر الثاني

$$k = 2 \Rightarrow \therefore z^{\frac{1}{3}} = 3\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}) = 3\,(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6})$$

$= 3\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 3\,(0 + i(-1)\,) = -3\,i$ الجذر الثالث

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

6) أوجد الجذور الأربعة للعدد (– 16)

نفرض أن : $z = -16$

$$z = 16\,(-1)$$

$$= 16\,(\cos\pi + i\sin\pi\ )$$

$$\therefore z^{\frac{1}{4}} = (\sqrt[4]{16}\,)\,(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore z^{\frac{1}{4}} = 2\,(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})\ ,\ k = 0 , 1 , 2 , 3$$

لاحظ ان المطلوب الجذور
الاربعة لذا k تأخذ اربع قيم

$k = 0 \Rightarrow \therefore z_1 = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\,) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ ..... (الأول)

$$k = 1 \Rightarrow \therefore z_2 = 2\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$= 2\,(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$= 2\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\,) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ ..... (الثاني)

$$k = 2 \Rightarrow \therefore z_3 = 2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

$$= 2\,(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$$

$= 2\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ ..... (الثالث)

$$k = 3 \Rightarrow \therefore z_4 = 2\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

$$= 2\,(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$$

$= 2\,(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\,) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ ..... (الرابع)

(7 الجذور الستة للعدد ($-64i$) باستخدام مبرهنة ديموافر

نفرض أن : $z = -64i$

$$z = 64(-i) = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

راجع صفحة 45

$$\therefore z^{\frac{1}{6}} = (\sqrt[6]{64})\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore z^{\frac{1}{6}} = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right) \quad , \ k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5$$

لاحظ ان المطلوب الجذور السنة لذا k تأخذ ستة قيم

$$k = 0 \Longrightarrow \therefore z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$k = 1 \Longrightarrow \therefore z_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$k = 2 \Longrightarrow \therefore z_3 = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$k = 3 \Longrightarrow \therefore z_4 = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$k = 4 \Longrightarrow \therefore z_5 = \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$$k = 5 \Longrightarrow \therefore z_6 = \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

الفصل الثاني / القطوع المخروطية

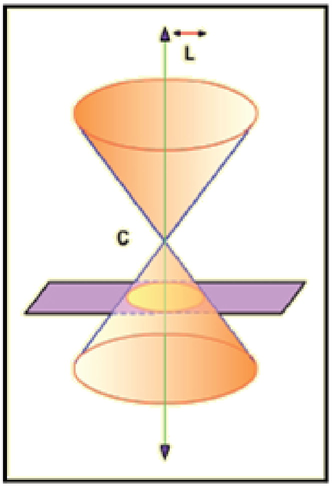
تتولد القطوع المخروطية : الدائرة – القطع المكافئ – القطع الناقص – القطع الزائد ، هندسيا إذا قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستو وكان (لاحظ الأشكال ادناه) :

1) عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط فان المقطع يمثل دائرة .

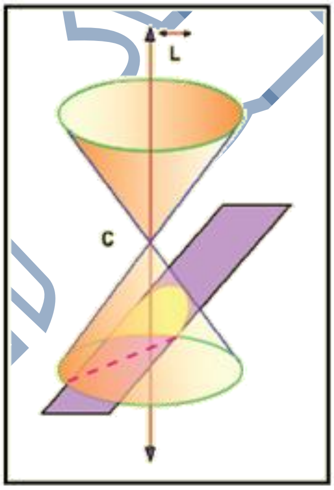
2) موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل قطع مكافئ .

3) غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته فأن القطع قطع ناقص .

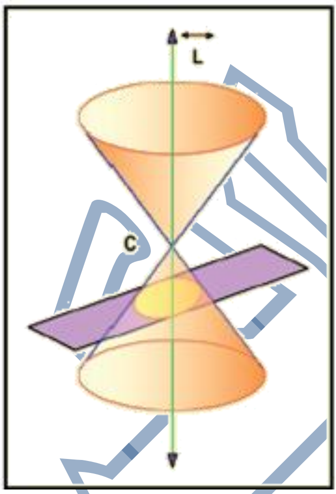
4) يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولداته فان المقطع قطع زائد .



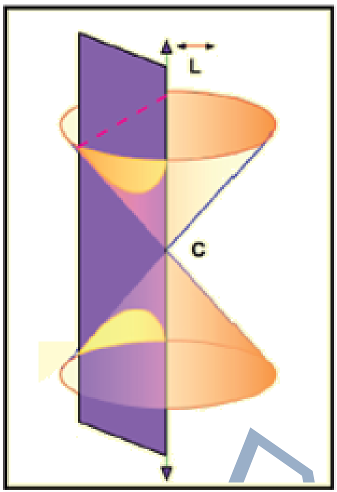
دائرة



قطع مكافئ



قطع ناقص



قطع زائد

القطع المخروطي

لتكن (x_1 , y_1) نقطة ثابتة في المستوي (سنسميها البؤرة) وليكن المستقيم $ax + by + c = 0$ مستقيما ثابتا (نسميه دليل القطع المخروطي) في ذلك المستوي لذا فان مجموعة كل النقط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة (x_1 , y_1) إلى بعدها عن المستقيم المعلوم تساوي عددا ثابتا (يسمى الاختلاف المركزي e)تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي .

وسندرس هنا ثلاث انواع من القطوع وهي القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد والتي يمكن التمييز بينها من خلال الاختلاف المركزي لها حيث :

1) في القطع المكافئ $e = 1$

2) في القطع الناقص $e < 1$ حيث $0 < e < 1$

3) في القطع الزائد $e > 1$

المعادلة العامة للقطع المخروطي

لتكن M(x , y) نقطة من نقاط القطع المخروطي لذا فالمسافة بينها وبين بؤرة القطع التي إحداثياتها (x_1 , y_2) يوجد بالعلاقة : $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

والبعد بين M(x , y) ودليل القطع يمكن ايجاده بالعلاقة : $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

لذا فحسب تعريف القطع المخروطي فان النسبة بين البعدين يساوي الاختلاف المركزي e أي :

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e\left(\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

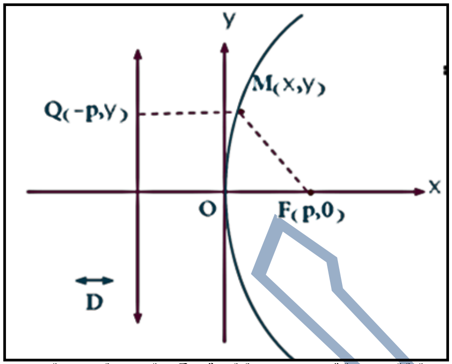
وعند تربيع الطرفين للتخلص من الجذر نحصل على المعادلة العامة للقطع المخروطي وهي :

$$\boxed{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

القطع المكافئ

هو مجموعة النقط M (x , y) في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة F(p , 0) تسمى البؤرة حيث (p> 0) مساويا لبعدها عن مستقيم معلوم " D " يسمى الدليل لا يمر بالبؤرة . أي أن MF = MQ وتسمى النقطة " O " رأس القطع المكافئ و الذي سنرمز له بالحرف (V) . ((لاحظ الشكل المجاور))



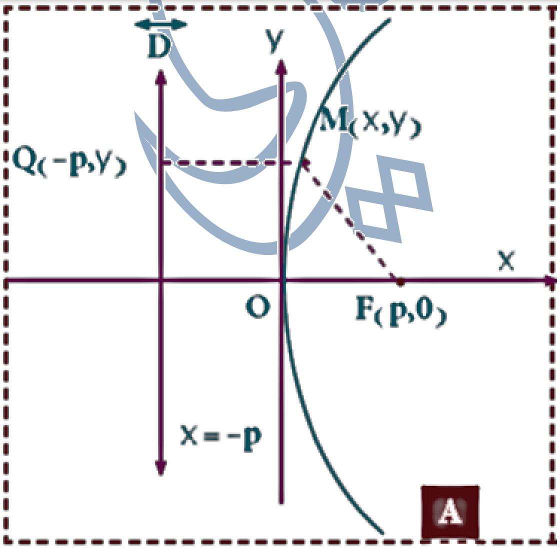
ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعمودي على الدليل بمحور القطع المكافئ.

كذلك لاحظ ان الاختلاف المركزي للقطع المكافئ = 1 لان : $\boxed{e=\frac{MF}{MQ}=1}$

وتوجد عدة حالات حسب موقع البؤرة والدليل للقطع المكافئ من محاور النظام الاحداثي وسنتطرق لبعضها .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

أو لا : معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الأصل ودليله يوازي محور



من تعريف القطع المكافئ (الشكل المجاور (A)) حيث

معادلة دليل القطع المكافئ هي x = – p وبؤرته هي F (p , 0) ، فان:

البعد العمودي بين M والدليل = البعد بين M والبؤرة

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بالتربيع والتبسيط :

$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2+0$$

$$y^2=2px+2px$$

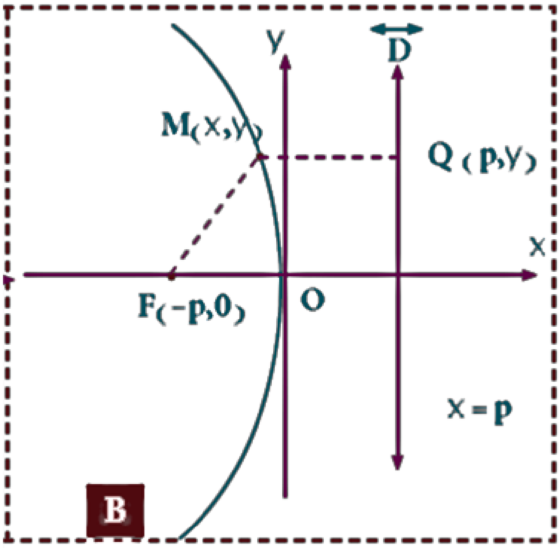
$$\boxed{\therefore y^2=4px \quad , \quad p>0}$$

ملاحظة في حالة كانت البؤرة على الاتجاه السالب لمحور السينات (الشكل المجاور (B)) فأن معادلة القطع المكافئ هي :

$$y^2 = -4px \quad , \quad p > 0$$

هنا معادلة دليل القطع المكافئ هي $x = p$ وبؤرته هي $F(-p, 0)$

(لاحظ ان قيمة p تبقى موجبة ولكن البؤرة $F(-p, 0)$ أي ان البؤرة تتفق مع المعادلة في الاشارة أما الدليل فإشارته تخالف البؤرة والمعادلة)



ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال 3 الكتاب أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم ارسمه .

الحل (لاحظ ان المعادلة المعطاة موجبة أي بالاتجاه الموجب لمحور السينات) $y^2 = 4x$

تقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ $y^2 = 4px$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(p, 0) \Longrightarrow F(1, 0)$ $\quad 4p = 4 \Longrightarrow p = 1$

$\therefore x = -p$ معادلة الدليل $\Longrightarrow x = -1$

ولرسم القطع نحتاج نقطتين او ثلاث على الاقل لذا نختار قيمة لـ x ونعوضها في المعادلة لنجد قيم y وتكتب على شكل ازواج مرتبة (الجدول ادناه) نعينها على النظام الاحداثي ثم نصل بينها بمنحني لتكن :

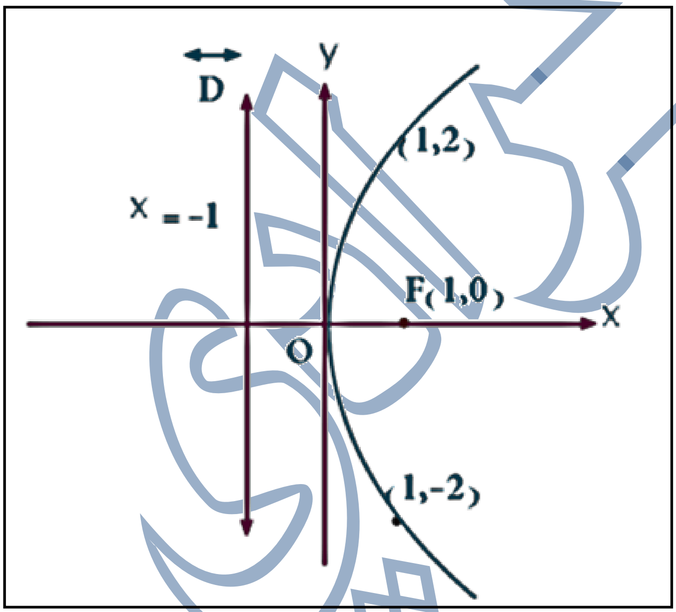
$$x = 0 \Longrightarrow y^2 = 4(0)$$
$$y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$\therefore$ النقطة $(0, 0)$

وعندما $x = 1$ نعوض في المعادلة:

$$y^2 = 4(1) \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \mp 2$$

$\therefore$ النقاط $(1, -2), (1, 2)$



y	X
0	0
2	1
− 2	1

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال بلا حل أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = 20x$ ثم ارسمه . **الحل واجب**

مثال أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته : $y^2 = 24\,x$

الحل (لاحظ ان المعادلة المعطاة موجبة أي بالاتجاه الموجب لمحور السينات) $y^2 = 24\,x$

نقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ $y^2 = 4px$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(\,p\,,0\,) \Longrightarrow F(\,6\,,0\,)$ $\therefore 4p = 24 \Longrightarrow p = 6$

$\therefore\ x = -\,p$ معادلة الدليل $\Longrightarrow x = -\,6$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ : $y^2 + 16\,x = 0$

الحل (المعادلة المعطاة تحتاج للترتيب ثم نكمل الحل) $y^2 + 16\,x = 0 \Longrightarrow y^2 = -\,16\,x$

(لاحظ ان المعادلة سالبة أي بالاتجاه السالب لمحور السينات) بالمقارنة $y^2 = -\,4px$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(\,-\,p\,,0\,) \Longrightarrow F(\,-\,4\,,0\,)$ $4p = 16 \Longrightarrow p = 4$

$\therefore\ x = p$ معادلة الدليل $\Longrightarrow x = 4$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ : $\frac{1}{4}\,y^2 + 3\,x = 0$

الحل (المعادلة المعطاة تحتاج للترتيب ثم نكمل الحل) $[\ \frac{1}{4}\,y^2 + 3x = 0\ ]\,(\,4\,)$

$y^2 + 12x = 0 \ \Longrightarrow\ y^2 = -12x$

(لاحظ ان المعادلة سالبة أي بالاتجاه السالب لمحور السينات) بالمقارنة $y^2 = -\,4px$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(\,-\,p\,,0\,) \Longrightarrow\ \therefore F(\,-\,3\,,0\,)$ $4p = 12 \Longrightarrow p = 3$

$x = p$ معادلة الدليل $\Longrightarrow x = 3$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 3 الكتاب أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(\,\sqrt{3}\,,0\,)$ و رأسه نقطة الأصل باستخدام التعريف.

الحل لدينا البؤرة $F(\,\sqrt{3}\,,0\,)$ ولنفرض $M(\,x\,,y\,)$ نقطة من النقاط التي تنتمي للقطع المكافئ لذا فان احداثي نقطة التقاطع بين العمود من M والدليل هي $(\,-\sqrt{3}\,,y\,)$ وان :

البعد بين M ودليل القطع = البعد بين M والبؤرة

$$\sqrt{(\,x-\sqrt{3}\,)^2 + \ y^2} = \sqrt{(\,x+\sqrt{3}\,)^2 + (\,y-y\,)^2}$$

بالتربيع وفتح الاقواس كمربع حدانية والتبسيط $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3 + 0$

$$y^2 = 2\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,x \Longrightarrow\ y^2 = 4\sqrt{3}\,x$$

ملاحظة في الامثلة السابقة نلاحظ ان البؤرة تقع على محور السينات أي أن محور القطع (راجع التعريف) في حال طلبت معادلته ضمن السؤال هو محور السينات الذي معادلته $y = 0$.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

** والآن وبعد ان تطرقنا لإيجاد كل من البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ سنعكس العمل ونحاول ايجاد المعادلة اذا علم احدهما (لاحظ الامثلة الاتية)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل لكل مما يأتي :

الحلول

1) بؤرته $F(-20\,,0)$

$F(-20\,,0) = F(-p\,,0) \Rightarrow \therefore p = 20$ (نقارن البؤرة المعطاة لإيجاد قيمة p)

$y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -80x$ (المعادلة على الاتجاه السالب لمحور السينات لأنها تطابق البؤرة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) معادلة دليله $x = -2$

معادلة الدليل : $x = -2$

$x = -p \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \therefore p = 2$ (نقارن معادلة الدليل المعطاة لإيجاد قيمة p)

$y^2 = 4px$ (المعادلة على الاتجاه الموجب لمحور السينات كون معادلة القطع تخالف اشارة الدليل)

$y^2 = 8x$ ∴ المعادلة :

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) معادلة دليله $x - 6 = 0$

معادلة الدليل : $x - 6 = 0$

$x = p \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \therefore p = 6$ (نقارن معادلة الدليل المعطاة لإيجاد قيمة p)

$y^2 = -4px$ (المعادلة على الاتجاه السالب لمحور السينات كون معادلة القطع تخالف اشارة الدليل)

$y^2 = -24x$ ∴ المعادلة :

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

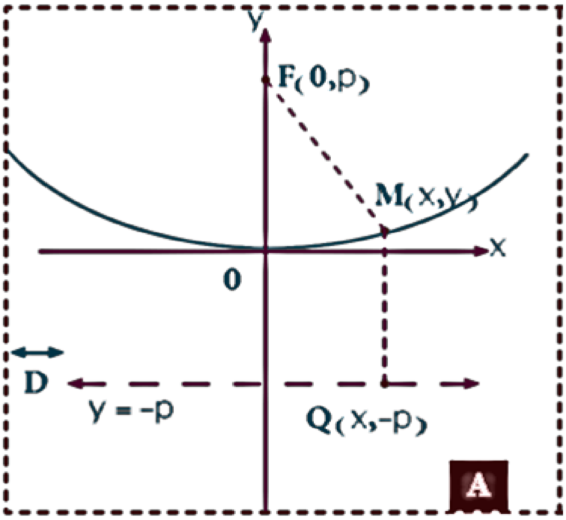
4) بؤرته $F(5\,,0)$

5) معادلة دليله $x - 3 = 0$

6) معادلة دليله $2x + 4 = 0$

واجب !!؟

ثانيا : معادلة القطع الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات ورأسه نقطة الأصل ودليله يوازي محور السينات



من تعريف القطع المكافئ (الشكل المجاور (A)) حيث

معادلة دليل القطع المكافئ هي $y = -p$ وبؤرته هي $F(0, p)$ ، فان:

البعد بين M والبؤرة F = البعد العمودي بين M والدليل $\overleftrightarrow{D}$

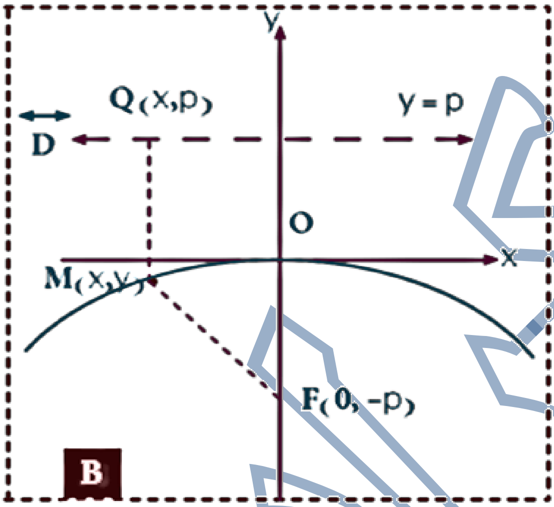
$$\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$$

بالتربيع والتبسيط : $0 + y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$

$$x^2 = 2py + 2py$$

$$\boxed{x^2 = 4py \ , \ \ p > 0}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ



ملاحظة في حالة كانت البؤرة على الاتجاه السالب لمحور الصادات (الشكل المجاور (B)) فأن معادلة القطع المكافئ هي :

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

هنا معادلة دليل القطع المكافئ هي $y = p$ وبؤرته هي $F(0,-p)$

(لاحظ ان قيمة p تبقى موجبة ولكن البؤرة $F(0,-p)$ أي ان البؤرة تتفق مع المعادلة في الاشارة أما الدليل فإشارته تخالف البؤرة والمعادلة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ فيما يأتي :

1) معادلته $x^2 = 8y$

الحلول

$x^2 = 8y$ (لاحظ ان المعادلة المعطاة موجبة أي بالاتجاه الموجب لمحور الصادات)

$x^2 = 4py$ نقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(0, 2) \Longleftarrow \therefore F(0, p)$

معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -2$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) معادلته $x^2 + 4y = 0$ واجب !!؟

3) معادلته $\frac{1}{3}x^2 + 3y = 0$

$[\ \frac{1}{3}x^2 + 3y = 0\ ] \times 3$

$x^2 = -9y$ (لاحظ ان المعادلة المعطاة سالبة أي بالاتجاه السالب لمحور الصادات)

$x^2 = -4py$ نقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ

$4p = 9 \Rightarrow p = \frac{9}{4}$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(0, -p) \Rightarrow \therefore F(0, -\frac{9}{4})$

معادلة الدليل $y = p \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في الامثلة السابقة نلاحظ ان البؤرة تقع على محور الصادات أي أن محور القطع (راجع التعريف) في حال طلبت معادلته ضمن السؤال هو محور الصادات والذي معادلته $x = 0$.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

** والان وبعد ان تطرقنا لايجاد كل من البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ سنعكس العمل ونحاول ايجاد المعادلة اذا علم احدهما (لاحظ الامثلة الاتية)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل في كل مما يأتي :

الحلول

1) بؤرته $F(0, 5)$

$F(0, 5) = F(0, p) \Rightarrow \therefore p = 5$ (نقارن البؤرة المعطاة لإيجاد قيمة p)

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 20y$ (المعادلة على الاتجاه الموجب لمحور الصادات لأنها تطابق البؤرة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) معادلة دليله $y = -3$

معادلة الدليل : $y = -3$

$y = -p \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \therefore p = 3$ (نقارن معادلة الدليل المعطاة لإيجاد قيمة p)

$x^2 = 4py$ (المعادلة على الاتجاه الموجب لمحور الصادات كون معادلة القطع تخالف اشارة الدليل)

$\therefore$ المعادلة : $x^2 = 12y$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) معادلة دليله $y - 8 = 2$

4) بؤرته $F(0, -9)$

5) معادلة دليله $\frac{1}{3}y + 5 = 0$

واجب !!؟

ملاحظة في حال اعطي في السؤال نقطتين تنتمي للقطع والمطلوب معادلة القطع فيمكن ايجاد المعادلة حسب الخطوات الاتية :

1) نلاحظ اي الاحداثيات بين النقطتين متساوي (حتى بالإشارة) يكون محور القطع أي البؤرة عليه .

2) الاحداثي المختلف بالإشارات لا يؤثر على الحل (يهمل)

3) نكتب معادلة القطع المكافئ العامة حسب موقع البؤرة .

4) نعوض احدى النقطتين في المعادلة بدل x , y (لان كل نقطة تنتمي للقطع تحقق معادلته) لإيجاد قيمة p

5) نكتب المعادلة العامة للقطع مرة اخرى ونعوض فيها قيمة p (لاحظ الامثلة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين (4 , − 1) , (4 , 1) ورأسه نقطة الأصل .

الحل نلاحظ ان الاحداثي السيني متساوي في النقطتين اي ان محور السينات محور القطع وكونهما موجبان اي المعادلة بالاتجاه الموجب .

∴ معادلة القطع هي : $y^2 = 4px$

نعوض إحدى (يفضل الموجبة ان وجدت) النقطتين في معادلة القطع لإيجاد p $16 = 4p(1)$

$$4p = 16 \quad \Rightarrow \quad p = 4$$

∴ المعادلة : $y^2 = 4px \quad \Rightarrow \quad y^2 = 16\,x$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين (− 4 , − 5) , (4 , − 5) ورأسه نقطة الأصل .

الحل نلاحظ ان الاحداثي الصادي متساوي في النقطتين اي ان محور الصادات هو محور القطع وكونهما سالبان اي المعادلة بالاتجاه السالب .

∴ معادلة القطع هي : $x^2 = -4py$

نعوض إحدى (يفضل الموجبة ان وجدت) النقطتين في معادلة القطع لإيجاد p $16 = -4p(-5)$

$$20p = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{16}{20} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{4}{5}$$

∴ المعادلة هي : $x^2 = -4py \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4\left(\frac{4}{5}\right)y$

$$x^2 = -\frac{16}{5}\,y$$

** في الامثلة السابقة نلاحظ ان النقاط المعطاة هي نقاط متناظرة حول المحاور ويمكن الافادة من تعيين النقط ورسم رسم مبسط لمعرفة مكان البؤرة واتجاه القطع للمساعدة في الحل .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(-3 , -2)$, $(3 , -2)$ ورأسه نقطة الأصل . واجب ؟

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(-1 , -2)$, $(-1 , 2)$ ورأسه نقطة الأصل . واجب ؟

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال اعطيت نقطة يمر فيها دليل القطع المكافئ دون الاشارة الى موقع البؤرة فتوجد حالتان

1) اما البؤرة على السينات وهنا معادلة الدليل تأخذ قيمة x ثم نكمل الحل .

2) او البؤرة على الصادات وهنا معادلة الدليل تأخذ قيمة y ثم نكمل الحل . (لاحظ الامثلة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(5 , -7)$ وبؤرته على محور الصادات

الحل (هنا ذكر موقع البؤرة لذا توجد حالة واحدة فقط)

∵ البؤرة على محور الصادات و دليله يمر بالنقطة $(5 , -7)$

∴ معادلة الدليل هي $y = -7$

$\therefore p = 7$

∴ البؤرة على محور الصادات الموجب (كون البؤرة والمعادلة تخالفان الدليل بالإشارة) .

$$x^2 = 4py \Longrightarrow x^2 = 28y$$

يمكن الاستعانة بالرسم لتوضيح الحل

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 8 الكتاب أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ودليله يمر بالنقطة $(3 , -5)$.

الحل يوجد هنا احتمالين لأنه لم يذكر اي معلومة عن موقع البؤرة حيث :

1) لنفرض ان البؤرة تنتمي إلى محور السينات

∵ الدليل مار بالنقطة $(3 , -5)$

∴ معادلة الدليل : $x = 3$

$p = 3$

∵ الدليل موجب

∴ المعادلة (تخالف الدليل) : $y^2 = -4px$

$y^2 = -12x$

2) لنفرض ان البؤرة تنتمي إلى محور الصادات

∵ الدليل مار بالنقطة $(3 , -5)$

∴ معادلة الدليل : $y = -5$

$p = 5$

∵ الدليل سالب

∴ المعادلة (تخالف الدليل) : $x^2 = 4py$

$x^2 = 20y$

مثال أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ودليله يمر بالنقطة $(-2 , 4)$. واجب

مثال أوجد معادلة القطع الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(-2 , 1)$ وبؤرته على محور السينات.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0 , 2)$ و رأسه نقطة الأصل باستخدام التعريف.

الحل لدينا البؤرة $F(0 , 2)$ ولنفرض $M(x , y)$ نقطة من النقاط التي تنتمي للقطع المكافئ لذا فأن احداثي نقطة التقاطع بين العمود من M والدليل هي $(x , -2)$ وان :

البعد بين M ودليل القطع = البعد بين M والبؤرة

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2}$$

بالتربيع وفتح الاقواس كمربع حدانية والتبسيط $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0 + y^2 + 4y + 4$

$$x^2 = 4y + 4y \Longrightarrow x^2 = 8y$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0 , -3)$ و رأسه نقطة الأصل باستخدام التعريف. واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ = $2p \, , \, p > 0$ ((لاحظ الامثلة))

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع مكافئ بؤرته على محور السينات البعد بين بؤرته ودليله = 6 وحدات و رأسه نقطة الأصل .

الحل (** في السؤال ذكر موقع البؤرة على محور السينات ولكن لا توجد دلالة ان كانت سالبة ام موجبة لذا توجد حالتان لاحظ الحل)

يوجد احتمالين لأنه لم يذكر اي معلومة عن اتجاه البؤرة على السينات وهما :

1) اذا كانت البؤرة تنتمي إلى محور السينات الموجب

$\because$ البعد بين البؤرة الدليل = 6

$$\therefore 2p = 6 \Longrightarrow p = 3$$

$\therefore$ المعادلة (تطابق البؤرة) : $y^2 = 4px$

$$y^2 = 12x$$

2) اذا كانت البؤرة تنتمي إلى محور السينات السالب

$\because$ البعد بين البؤرة الدليل = 6

$$\therefore 2p = 6 \Longrightarrow p = 3$$

$\therefore$ المعادلة (تطابق البؤرة) : $y^2 = -4px$

$$y^2 = -12x$$

مثال أوجد معادلة القطع مكافئ بؤرته على محور الصادات والبعد بين بؤرته ودليله = 10وحدات و رأسه نقطة الأصل .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال لم يذكر المحور فيصبح لدينا اربعة حالات (كل حالات القطع المكافئ) لاحظ المثال الاتي :

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي البعد بين بؤرته ودليله = 16 وحدة ورأسه نقطة الأصل .

الحل (هنا لم يذكر موقع البؤرة لذا نتطرق لجميع الحالات)

$$\because 2p = 16 \Longrightarrow p = 8$$

1) في حالة البؤرة على محور السينات الموجب .

$$y^2 = 4px \Longrightarrow y^2 = 32x$$

2) في حالة البؤرة على محور السينات السالب .

$$y^2 = -4px \Longrightarrow y^2 = -32x$$

3) في حالة البؤرة على محور الصادات الموجب .

$$x^2 = 4py \Longrightarrow x^2 = 32y$$

4) في حالة البؤرة على محور الصادات السالب .

$$x^2 = -4py \Longrightarrow x^2 = -32y$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

انسحاب المحاور

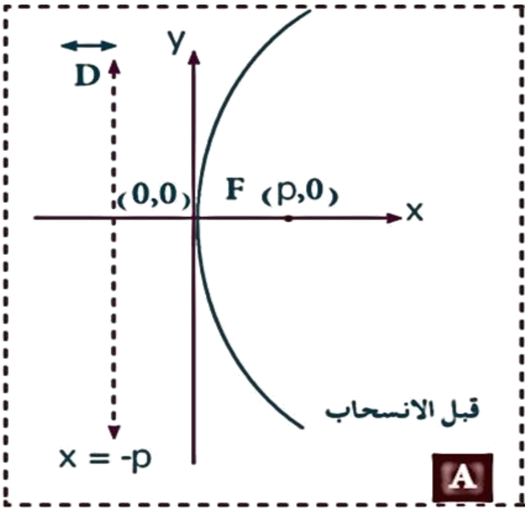
كنا قد تطرقنا للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل V (0 , 0) و محوره ينطبق على أحد المحورين الاحداثيين فكانت معادلة القطع احدى المعادلات الاتية :

1) $y^2 = 4p\,x$ (لاحظ الشكل) الاتجاه الموجب لمحور السينات

2) $y^2 = -4p\,x$ الاتجاه السالب لمحور السينات

3) $x^2 = 4p\,y$ الاتجاه الموجب لمحور الصادات

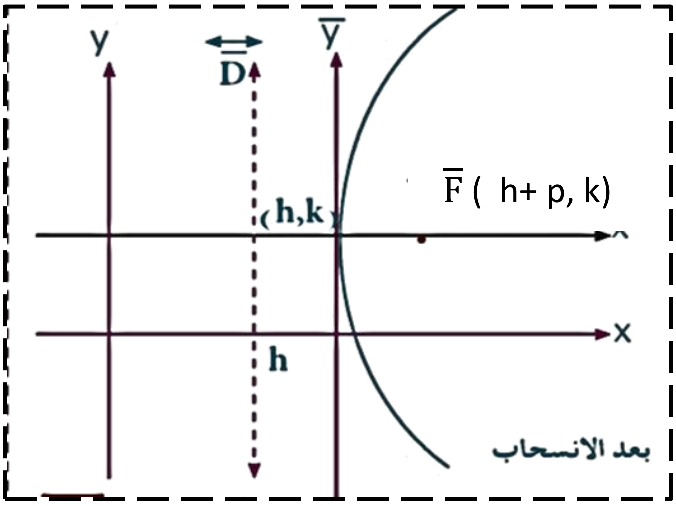
4) $x^2 = -4p\,y$ الاتجاه السالب لمحور الصادات



والان سنتطرق للقطع المكافئ الذي بؤرته على مستقيم (محور القطع المكافئ) يوازي محور السينات او يوازي محور الصادات أي اذا انسحب رأس القطع V(0,0) بمقدار (h) وحدة في الاحداثي السيني (x) و (k) وحدة في الاحداثي الصادي (y) فيصبح الرأس : $\overline{V}\,(\,h\,,\,k\,)$

فتصبح معادلة القطع المكافئ اذا كان محور القطع يوازي السينات كما يأتي (لاحظ الاشكال الاتية) :

1) $(y - k)^2 = 4p (x - h)$ القطع بالاتجاه الموجب (محور القطع المكافئ يوازي محور السينات)



(القطع في الاتجاه الموجب لمحور السينات)

الرأس $\bar{V}(h , k)$

البؤرة $\bar{F}(h+ p , k)$

معادلة الدليل : $x = h - p$

معادلة المحور : $y = k$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $(y + 3)^2 = 4 (x - 2)$

الحل نلاحظ ان المعادلة المعطاة موجبة أي نقارن مع المعادلة القطع بالاتجاه الموجب

$(y + 3)^2 = 4 (x - 2)$

$(y - k)^2 = 4 p (x - h)$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

الرأس $V (h , k) = (2 , - 3)$, $4p = 4 \Longrightarrow p = 1$

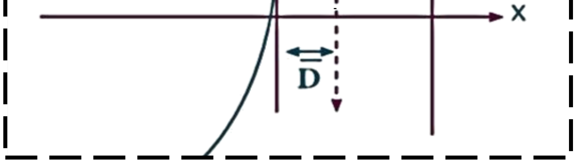
نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h+ p , k) = (2 + 1 , - 3) = (3 , - 3)$

معادلة الدليل $x = h - p \Longrightarrow x = 2 - 1 \Longrightarrow x = 1$

معادلة المحور $y = k \Longrightarrow y = - 3$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $(y - k)^2 = - 4p (x - h)$ القطع بالاتجاه السالب (محور القطع المكافئ يوازي محور السينات)



(القطع في الاتجاه السالب لمحور السينات)

الرأس $\bar{V}(h , k)$

البؤرة $\bar{F}(h - p , k)$

معادلة الدليل : $x = h + p$

معادلة المحور : $y = k$

مثال أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $(y-4)^2=-8(x+1)$

الحل نلاحظ ان المعادلة المعطاة سالبة أي نقارن مع المعادلة القطع بالاتجاه السالب

$$(y-4)^2=-8(x+1)$$
$$(y-k)^2=-4p(x-h)$$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

$V(h,k)=(-1,4)$ الرأس , $4p=8 \Longrightarrow p=2$

نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h-p,k)=(-1-2,4)=(-3,4)$

معادلة الدليل $x=h+p \Longrightarrow x=-1+2 \Longrightarrow x=1$

معادلة المحور $y=k \Longrightarrow y=4$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

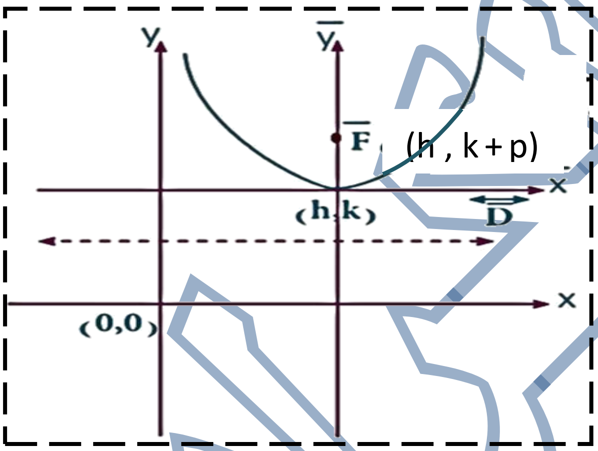
$3)\ (x-h)^2=4p(y-k)$ القطع بالاتجاه الموجب (محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات)

الرأس $\bar{V}(h,k)$

البؤرة $\bar{F}(h,k+p)$

معادلة الدليل: $y=k-p$

معادلة المحور: $x=h$



(القطع في الاتجاه الموجب لمحور الصادات)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $x^2-8y+16=0$

الحل نلاحظ ان المعادلة المعطاة غير مرتبة

$$x^2-8y+16=0 \Longrightarrow (x-0)^2=8y-16$$

نقارن مع المعادلة العامة (موجب صادات) $\therefore\ (x-0)^2=8(y-2)$

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

$V(h,k)=(0,2)$ الرأس , $4p=8 \Longrightarrow p=2$

نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h,k+p)=(0,2+2)=(0,4)$

معادلة المحور $x=h \Longrightarrow x=0$, معادلة الدليل $y=k-p \Longrightarrow y=2-2 \Longrightarrow y=0$

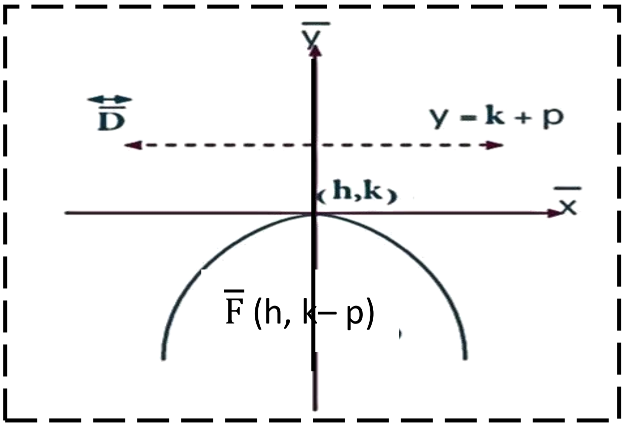
(محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات) القطع بالاتجاه السالب 4) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

الرأس $\overline{V}(h,k)$

البؤرة $\overline{F}(h,k-p)$

معادلة الدليل : $y=k+p$

معادلة المحور : $x=h$



(القطع في الاتجاه السالب لمحور الصادات)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

** لاحظ ان (p) تمثل البعد البؤري للقطع المكافئ وهو يساوي المسافة بين الرأس $\overline{V}$ والبؤرة $\overline{F}$ او يساوي البعد بين الرأس $\overline{V}$ و الدليل .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $(x-3)^2+12y=0$

الحل نلاحظ ان المعادلة المعطاة غير مرتبة $(x-3)^2+12y=0 \Rightarrow (x-3)^2=-12y$

نقارن مع المعادلة العامة (سالب صادات) $\therefore\ (x-3)^2=-12(y-0)$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

$4p=12 \Rightarrow p=3$, الرأس $V(h,k)=(3,0)$

نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h,k-p)=(3,0-3)=(3,-3)$

معادلة المحور $x=h \Rightarrow x=3$, معادلة الدليل $y=k+p \Rightarrow y=0+3 \Rightarrow y=3$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال من معادلة القطع المكافئ أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور لكل مما يأتي :

واجب

1) $y^2 = 4x-2$ 2) $(x+7)^2 = 4y$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة اذا كانت المعادلة تحوي مثلا y , x , x^2 أو x , y , y^2 يمكن الحكم مباشرة عليها انها معادلة لقطع مكافئ في حالة الانسحاب وتحول الى الصورة القياسية حسب الخطوات الاتية (لاحظ ايضا الامثلة):

1) نعزل x^2 , x في جهة و y في جهة والاعداد ان وجدت في جهة (أو y^2 , y في جهة و x).

2) نستخدم طريقة اكمال المربع في الجهة الاولى (لاحظ الطريقة في حل الامثلة)

3) ننقل العدد المتبقي من الجهة الاولى للطرف الاخر ونبسط ونخرج عامل مشترك (ان وجد).

4) اصبحت المعادلة بالصيغة العامة .

مثال 10 الكتاب ناقش القطع المكافئ : $x^2 + 4x = y$

الحل لاحظ ان المتغير x , x^2 في جهة و y في جهة لذا نلجأ الى اكمال المربع في الطرف الذي فيه x^2 وذلك بإضافة وطرح مربع نصف معامل المتغير x وهو 4 الى طرفي المعادلة لذا فأن :

$\therefore \left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$ لذا نضيف 4 الى طرفي المعادلة

$x^2 + 4x + 4 = y + 4$

$(x+2)^2 = (y+4)$ لا يوجد عامل مشترك

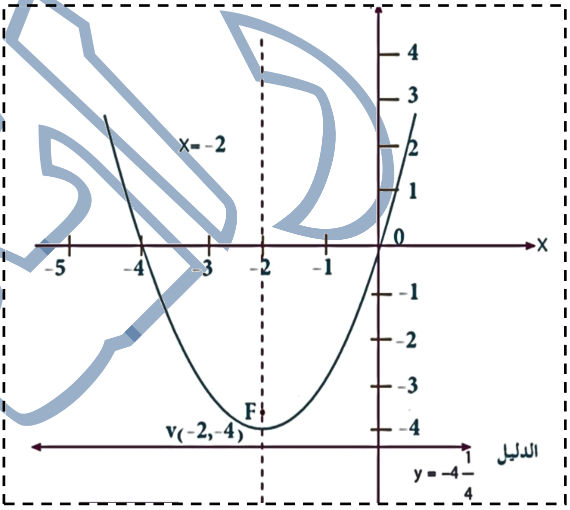
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ نقارن

$\therefore$ $V(-2,-4)$ الرأس , $4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

$F(h, k+p) = (-2, -4+\frac{1}{4}) = (-2, -3\frac{3}{4})$ البؤرة

$y = k - p \Rightarrow y = -4 - \frac{1}{4} = -4\frac{1}{4}$: معادلة الدليل

$x = h \Rightarrow x = -2$: معادلة المحور



* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال ناقش القطع المكافئ في كل مما يأتي :

1) $y^2 - 6y - x = -12$ واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $y^2 + 8y = -4x - 4$

الحل لاحظ ان المتغير y , y^2 في جهة و x في جهة لذا نلجأ الى اكمال المربع في الطرف الذي فيه y^2

$\therefore \left(\frac{\text{معامل } y}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$ لذا نضيف 16 الى طرفي المعادلة

$y^2 + 8y + 16 = -4x - 4 + 16$

$(y+4)^2 = -4x + 12$ لاحظ وجود -4 عامل مشترك كوننا نريد اشارة المتغير موجبة

$(y+4)^2 = -4(x-3)$

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ بالمقارنة مع المعادلة العامة

$V(h,k) = (3,-4)$ الرأس $\therefore$, $4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(h-p, k) = (3-1, -4) = (2, -4)$ البؤرة

معادلة الدليل : $x = h + p \Rightarrow x = 3 + 1 \Rightarrow x = 4$ و معادلة المحور : $y = k \Rightarrow y = -4$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

3) $x^2 + 2\sqrt{3}\,x = -4y + 1$, 4) $y^2 + 2y = -4x + 7$ واجب

اثرائية و وزارية واجب

وزاري 2005 الدور التمهيدي باستخدام التعريف اوجد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان معادلة دليله $y = \sqrt{3}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2006 الدور الاول اوجد معادلة القطع المكافئ الذي راسه (0,0) ويمر بالنقطتين المتناظرتين (-3,6),(3,6) ثم اوجد معادلة الدليل .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال قطع مكافئ البعد بين بؤرته ودليله = 8 وحدات ومار بالنقطتين $(-1,-M)$, $(-1,M)$ فأوجد قيمة $M \in R$ علما أن رأسه نقطة الأصل .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت المعادلة $L x^2 + y^2 (2L+1) + (L-4)y = 0$ تمثل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل، فأوجد قيمة L وإحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل ؟

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 8$ مع محور السينات . (ضع y صفر لإيجاد قيم x لتجد فقطة التقاطع مع محور السينات)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 8$ مع محور الصادات . (ضع x صفر لإيجاد قيم y لتجد فقطة التقاطع مع محور الصادات)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت المعادلة $y^2 = -(16L-2)x$ قطع مكافئ راسه نقطة الاصل يمر بالنقطة $(-2,4)$ ، أوجد قيم L وإحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل ؟

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال اوجد معادلة القطع المكافئ الذي راسه $(2,-3)$ ويمر بالنقطة $(-2,3)$ ومحوره يوازي محور السينات . (يمكن حل السؤال اذا كان المحور يوازي محور الصادات)

تمارين (1 – 2)

س1 // أوجد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها :

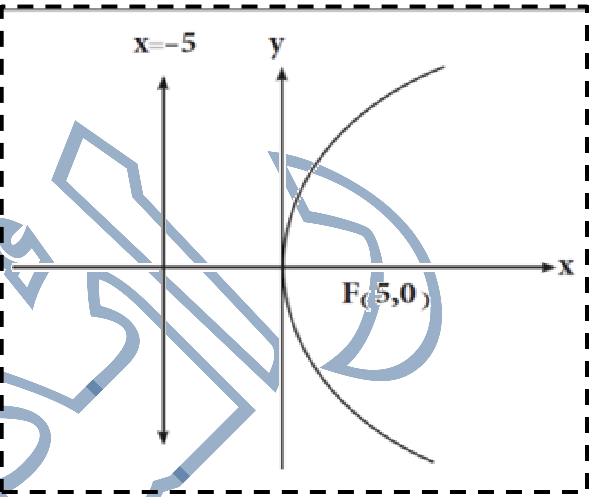
أ- البؤرة (5 , 0) والرأس نقطة الاصل

البؤرة $(5,0) \Longrightarrow \therefore p = 5$

من البؤرة القطع على محور السينات الموجب

$\therefore y^2 = 4px \Longrightarrow y^2 = 20\,x$

كذلك فإن معادلة الدليل هي : $x = -5$



X	y
0	0
1	$2\sqrt{5}$
1	$-2\sqrt{5}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

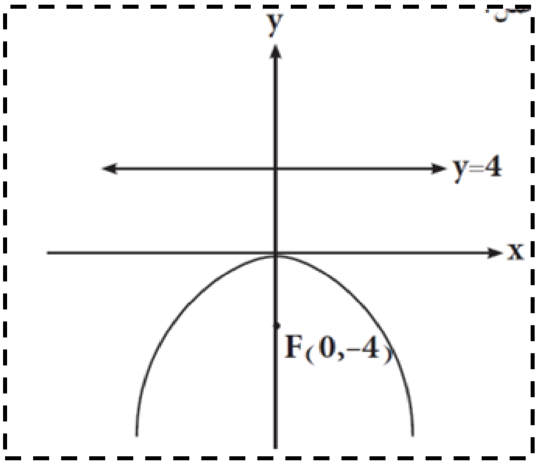
ب- البؤرة (0 , – 4) والرأس نقطة الاصل

البؤرة $(0, -4) \Longrightarrow \therefore p = 4$

من البؤرة القطع على محور الصادات السالب

$x^2 = -4p\,y \Longrightarrow x^2 = -16\,y$

كذلك فان معادلة الدليل هي : $y = 4$



X	y
0	0
4	– 1
– 4	– 1

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ج- البؤرة ($0, \sqrt{2}$) والرأس نقطة الاصل

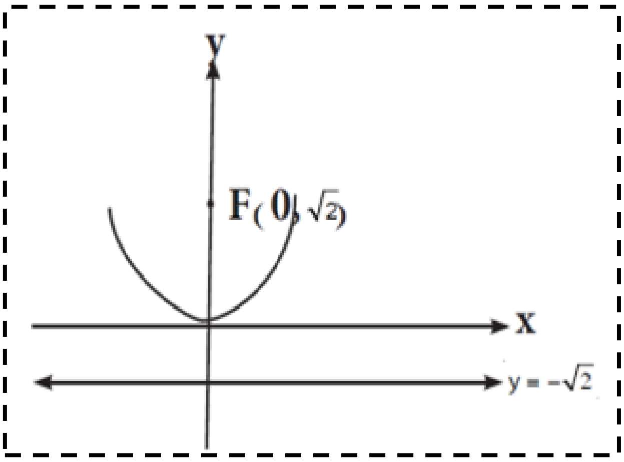
البؤرة $(0, \sqrt{2}) \Longrightarrow \therefore p = \sqrt{2}$

من البؤرة القطع على محور الصادات السالب

$x^2 = 4p\,y \Longrightarrow x^2 = 4(\sqrt{2})\,y$

$\therefore x^2 = 4\sqrt{2}\,y$

كذلك فان معادلة الدليل هي : $y = -\sqrt{2}$



x	Y
0	0
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

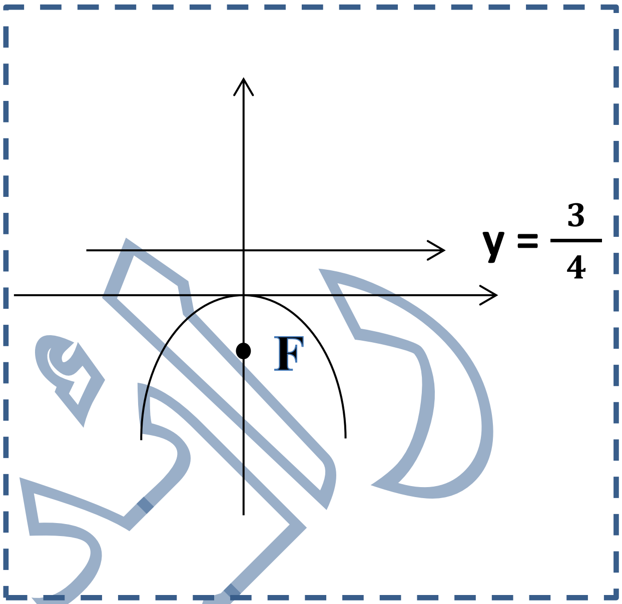
د- معادلة دليل القطع المكافئ $4y - 3 = 0$ والرأس نقطة الاصل

معادلة الدليل غير مرتبة : $4y - 3 = 0$

ترتيب معادلة الدليل : $4y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$

ومنها نجد البؤرة : $\therefore p = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow F\left(0, -\frac{3}{4}\right)$

$\therefore x^2 = -4p\,y \Rightarrow x^2 = -3\,y$



x	Y
0	0
$\sqrt{3}$	–1
$-\sqrt{3}$	–1

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2 // أوجد إحداثيات البؤرة والرأس و معادلة الدليل ومعادلة المحور فيما يأتي :

a) $x^2 = 4y$

$x^2 = 4y$ (لاحظ ان المعادلة المعطاة موجبة أي بالاتجاه الموجب لمحور الصادات)

الراس نقطة الاصل اي : $V(0, 0)$

نقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ $x^2 = 4py$

نعوض في البؤرة والدليل $4p = 4 \Rightarrow p = 1 \quad \Rightarrow \therefore F(0, p) \Rightarrow \therefore F(0, 1)$

معادلة الدليل $y = -p \quad \Rightarrow y = -1$

المحور هو محور الصادات لذا فمعادلة المحور هي: $x = 0$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $2x + 16\,y^2 = 0$

$[16\,y^2 = -2x\,] \div 16 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{8}x$ (لاحظ ان المعادلة بالاتجاه السالب لمحور السينات)

الراس نقطة الاصل اي : $V(0, 0)$

نقارن مع المعادلة العامة للقطع المكافئ $y^2 = -4px$

$4p = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{32}$

نعوض في البؤرة والدليل $\therefore F(-p, 0) \Rightarrow \therefore F\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$

معادلة الدليل $x = p \quad \Rightarrow x = \frac{1}{32}$

المحور هو محور السينات لذا فمعادلة المحور هي: $y = 0$

c) $y^2 = -4(x-2)$

نلاحظ ان المعادلة المعطاة سالبة أي نقارن مع المعادلة القطع بالاتجاه السالب

$(y-0)^2 = -4(x-2)$

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

$V(h,k) = (2,0)$ الرأس , $4p = 4 \Longrightarrow p = 1$

نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h-p, k) = (2-1, 0) = (1, 0)$

معادلة الدليل $x = h + p \Longrightarrow x = 2 + 1 \Longrightarrow x = 3$

معادلة المحور (محور السينات) $y = k \Longrightarrow y = 0$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

نقارن مع المعادلة العامة (موجب صادات) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

لإيجاد احداثيات الراس و p نقارن الراس وقيمة p :

$V(h,k) = (1,1)$ الرأس , $4p = 8 \Longrightarrow p = 2$

نعوض لإيجاد كل من: البؤرة $F(h, k+p) = (0, 1+2) = (0, 3)$

معادلة المحور $x = h \Longrightarrow x = 1$, معادلة الدليل $y = k - p \Longrightarrow y = 1 - 2 \Longrightarrow y = -1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

e) $y^2 + 4y + 2x = -6$

$y^2 + 4y = -2x - 6$

لاحظ وجود المتغير y, y^2 و x لذا نلجأ الى اكمال المربع في الطرف الذي فيه y^2

$$\therefore \left(\frac{\text{معامل } y}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

لذا نضيف 4 الى طرفي المعادلة

$y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$

$(y+2)^2 = -2x - 2$ لاحظ وجود -2 عامل مشترك كوننا نريد اشارة المتغير موجبة

$(y+2)^2 = -2(x+1)$

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ بالمقارنة مع المعادلة العامة

$V(h,k) = (-1, -2)$ الرأس $\therefore$, $4p = 2 \Longrightarrow p = \frac{1}{2}$

$F(h-p, k) = (-1-\frac{1}{2}, -2) = (-\frac{3}{2}, -2)$ البؤرة

معادلة الدليل : $x = h + p \Longrightarrow x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ و معادلة المحور: $y = k \Longrightarrow y = -2$

f) $x^2 + 6x - y = 0$

$x^2 + 6x = y$ بعد الترتيب

لاحظ وجود المتغير x , x^2 و y لذا نلجأ الى اكمال المربع في الطرف الذي فيه x^2

$\therefore \left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$ لذا نضيف 9 الى طرفي المعادلة

$x^2 + 6x + 9 = y + 9 \Longrightarrow (x + 3)^2 = (y + 9)$ (لا يوجد عامل مشترك)

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ بالمقارنة مع المعادلة العامة

$V(h , k) = (-3, -9)$ الرأس , $4p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{4}$

$F(h , k + p) = (-3, -8\frac{3}{4})$ البؤرة

$y = k - p \Longrightarrow y = -9\frac{1}{4}$: معادلة الدليل , $x = h \Longrightarrow x = -3$: معادلة المحور

رحلة التفوق
في
السادس

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س3// أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2 , 5)$, $(2 , -5)$ و الرأس نقطة الأصل .

الحل // نلاحظ ان الاحداثي السيني متساوي في النقطتين اي ان محور السينات هو محور القطع وكونهما موجبان اي المعادلة بالاتجاه الموجب .

∴ معادلة القطع هي : $y^2 = 4px$

نعوض إحدى (يفضل الموجبة ان وجدت) النقطتين في معادلة القطع لإيجاد p $25 = 4p(2)$

$8p = 25 \Longrightarrow p = \frac{25}{8}$

∴ المعادلة هي : $y^2 = 4px \Longrightarrow y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Longrightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3 , 4)$ والرأس نقطة الأصل أوجد معادلة علما ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

الحل // يوجد هنا احتمالين لأنه لم يذكر اي معلومة عن موقع البؤرة حيث :

1) لنفرض ان البؤرة تنتمي إلى محور السينات

∵ الدليل مار بالنقطة $(-3 , 4)$

∴ معادلة الدليل : $x = -3$

$p = 3$

∵ الدليل سالب

∴ المعادلة : $y^2 = 4px \Longrightarrow y^2 = 12x$

2) لنفرض ان البؤرة تنتمي إلى محور الصادات

∵ الدليل مار بالنقطة $(-3 , 4)$

∴ معادلة الدليل : $y = 4$

$p = 4$

∵ الدليل موجب

∴ المعادلة : $x^2 = -4py \Longrightarrow x^2 = -16y$

س5// قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة (1 , 2) أوجد قيمة A ثم أوجد بؤرته ودليله وأرسم القطع .

((لإيجاد قيمة A نعوض النقطة (1 , 2) في معادلة القطع كون القطع يمر بها فهي تحقق معادلته))

$$Ax^2 + 8y = 0 \Longrightarrow Ax^2 = -8y$$

نعوض(1 , 2) بدل x و y على الترتيب : $A(1) = -8(2) \Longrightarrow A = -16$

$-16x^2 = -8y \Longrightarrow x^2 = \frac{8}{16}y$ ∴ المعادلة

$x^2 = \frac{1}{2}y$ نقارن

ومعادلة الدليل : $x^2 = 4py \Rightarrow 4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8} \Rightarrow \therefore F\left(0, \frac{1}{8}\right), \ y = -\frac{1}{8}$

ولرسم القطع نحتاج نقطتين او ثلاث على الاقل لذا نختار قيمة لـ x ونعوضها في المعادلة لنجد قيم y وتكتب على شكل ازواج مرتبة (الجدول ادناه) نعينها على النظام الاحداثي ثم نصل بينها بمنحني لتكن :

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(0)$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

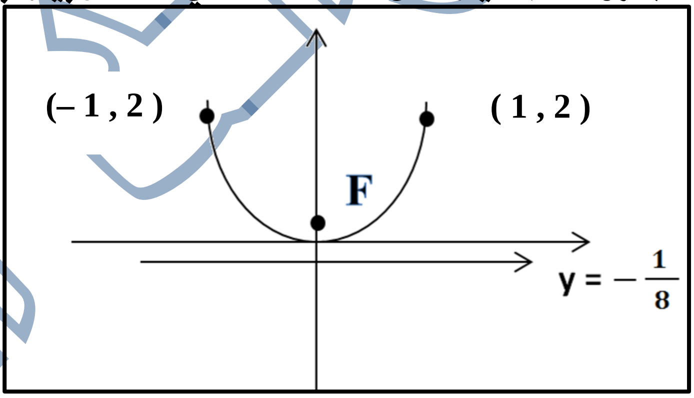
∴ (0 , 0) النقطة

وعندما y = 2 نعوض في المعادلة:

$$x^2 = \frac{1}{2}(2) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

∴ (– 1 , 2) , (1 , 2) النقاط

y	x
0	0
2	1
2	−1



* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س6// باستخدام التعريف أوجد معادلة القطع المكافئ :

أ- البؤرة F(7 , 0) والرأس نقطة الاصل

نفرض النقطة M(x ,y) تنتمي للقطع لذا فأن Q (–7 , y) تمثل نقطة تقاطع العمود المقام من M الى الدليل وهي تنتمي للدليل (تمثل البعد بين M والدليل) ومن التعريف فأن:

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$$

بالتربيع وفتح الاقواس كمربع حدانية :

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49$$

$$y^2 = 14x + 14x \Rightarrow y^2 = 28x$$

ب- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل

نفرض النقطة M(x ,y) تنتمي للقطع لذا فان Q (x , $\sqrt{3}$) تمثل نقطة تقاطع العمود المقام من M الى الدليل ونستنتج من معادلة الدليل ان قيمة $p = \sqrt{3}$ وان احداثي البؤرة هو $F(0,-\sqrt{3})$ ومن التعريف فأن:

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2}$$

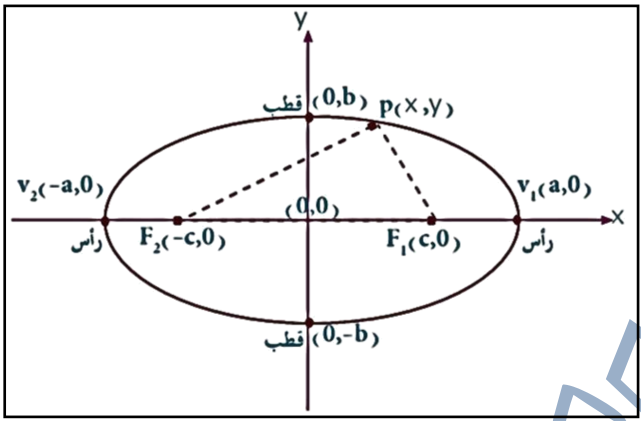
بالتربيع وفتح الاقواس كمربع حدانية : $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3$

$$x^2 = -2\sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3}\,y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}\,y$$

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي و التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عددا ثابتا .

وتوجد عدة حالات للقطع الناقص حسب موقع البؤرتين بالنسبة للمحورين الاحداثيين ومنها :

أو لا : القطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل



من خلال الشكل المجاور وتعريف القطع نلاحظ عدة امور منها :

1) نسمي كل من $F_1 (c , 0) , F_2 (- c , 0)$ باسم البؤرتان (من التعريف) حيث $c > 0$ و يرمز للبعد بين البؤرتين $2c$.

2) يسمى كل من $V_1 (a ,0) , V_2 (- a ,0)$ باسم الراسان حيث $a > 0$ و يرمز للبعد بين الراسين $2a$ و يسمى ايضا طول المحور الكبير (المحور البؤري) و يمثل العدد الثابت في التعريف

لذا فلو فرضنا النقطة $p (x , y)$ تقع على القطع الناقص فمن التعريف فان :

$$pF_1 + pF_2 = 2a$$

3) تسمى النقطتان $(0 , b),(0 , -b)$ باسم قطبي القطع الناقص حيث $b > 0$ ويرمز للبعد بين القطبين $2b$ ويسمى ايضا طول المحور الصغير .

4) المحور الكبير هو محور السينات ومعادلته $y = 0$ و معادلة المحور الصغير $x = 0$

5) محيط المثلث = مجموع أضلاعه الثلاثة) لذا فان محيط المثلث pF_1F_2 هو :

لاحظ ان : $pF_1 + pF_2 = 2a \ , F_1F_2 =2c$

$$\therefore \ pF_1 +PF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c$$

ايجاد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل

لتكن كل من $F_1 (c , 0) , F_2 (- c , 0)$ البؤرتان و $p (x , y)$ نقطة تنتمي للقطع ونعلم ان :

$$pF_1 + pF_2 = 2a$$

وبعد التعويض والتبسيط (الاشتقاق غير مطلوب راجع الكتاب) نحصل على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل وهي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث $a > c \ , a > b$ (لاحظ الشكل اعلاه) كما ان كل من a , b يمكن ايجادهما من احداثيي الراس والقطب.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة الاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e = \frac{c}{a}$ كما ويمكن ايجاد $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ أو $c^2 = a^2 - b^2$

مثال أوجد احداثي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص

الذي معادلته : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

الحل نقارن مع المعادلة القياسية للقطع : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

** كل من a , b , c تمثل اطوال قطع مستقيمة (لاحظ الشكل السابق) لذا لا تؤخذ سالبة.

$\therefore\ a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ طول المحور الكبير

$\therefore V_1(a,0) \Rightarrow V_1(5,0), V_2(-a,0) \Rightarrow V_2(-5,0)$ الرأسين

$\therefore\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$ طول المحور الصغير

$\therefore (0,b) \Rightarrow (0,3)\ ,\ (0,-b) \Rightarrow (0,-3)$ القطبين

$\because c^2 = a^2 - b^2$ (الآن نجد c وذلك باستخدام هذه العلاقة)

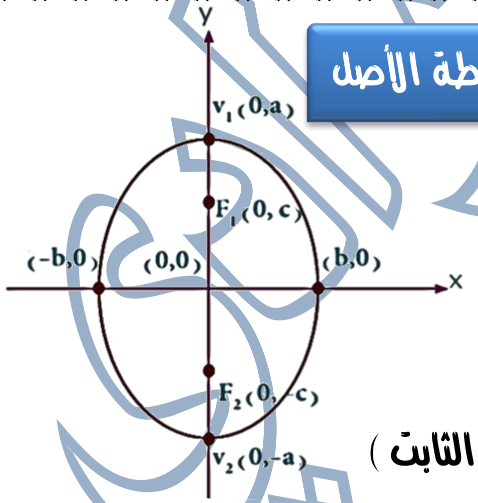
$\therefore c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$ (الآن نستخدم c لإيجاد البؤرتين والاختلاف المركزي)

$\therefore F_1(c,0) \Rightarrow F_1(4,0), F_2(-c,0) \Rightarrow F_2(-4,0)$ البؤرتين

$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{4}{5}$ (لاحظ ان الاختلاف المركزي اقل من 1)

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ثانيا : القطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل



من خلال الشكل المجاور وتعريف القطع نلاحظ :

1) البؤرتان $F_1(0,c), F_2(0,-c)$ حيث $c > 0$ و البعد بين البؤرتين 2c .

2) الراسان $V_1(0,a), V_2(0,-a)$ حيث $a > 0$ و البعد بين الراسين 2a (طول المحور الكبير) أو (المحور البؤري) او (العدد الثابت)

لذا فلو فرضنا النقطة p (x , y) تقع على القطع الناقص فمن التعريف فان : $pF_1 + pF_2 = 2a$

3) $(b,0),(-b,0)$ قطبي القطع الناقص حيث $b > 0$ والبعد بين القطبين 2b (طول المحور الصغير).

4) المحور الكبير هو محور الصادات ومعادلته $x = 0$ و معادلة المحور الصغير $y = 0$

5) (محيط المثلث = مجموع أضلاعه الثلاثة) لذا فان محيط المثلث pF_1F_2 هو :

لاحظ ان : $pF_1 + pF_2 = 2a\ ,\ F_1F_2 = 2c$

$\therefore\ pF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c$

ايجاد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل

البؤرتان $F_1 (0 , c) , F_2 (0 , - c)$ و $p (x , y)$ نقطة تنتمي للقطع ونعلم ان :

$$pF_1 + pF_2 = 2a$$

وبعد التعويض والتبسيط (الاشتقاق غير مطلوب) نحصل على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل وهي :

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

حيث $a > b$, $a > c$ (لاحظ الشكل اعلاه) كما ان كل من b , a يمكن ايجادهما من احداثيي الراس والقطب.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ كما ويمكن ايجاد $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ أو $c^2 = a^2 - b^2$

كذلك نلاحظ ان معظم القوانين والعلاقات تنطبق على الحالتين الاول والثانية (لاحظ المثال للمقارنة)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد احداثيي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص

الذي معادلته : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

الحل نقارن مع المعادلة القياسية للقطع :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$\therefore\ a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ طول المحور الكبير

$\therefore\ V_1 (0 , a) \Rightarrow V_1 (0 ,5)\ ,\ V_2 (0 , - a) \Rightarrow V_2 (0 , - 5)$ الرأسين

$\therefore\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ طول المحور الصغير

$\therefore (b , 0) \Rightarrow (4 , 0)\ ,\ (- b , 0) \Rightarrow (- 4 , 0)$ القطبين

$\because\ c^2 = a^2 - b^2$ (الان نجد c وذلك باستخدام هذه العلاقة)

$\therefore\ c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ (الان نستخدم c لإيجاد البؤرتين والاختلاف المركزي)

$\therefore\ F_1 (0 , c) \Rightarrow F_1 (0 , 3) , F_2 (0 , - c) \Rightarrow F_2 (0 , - 3)$ البؤرتين

$\because\ e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{3}{5}$ (لاحظ ان الاختلاف المركزي اقل من 1)

ملاحظة في حال طلب مساحة القطع او محيطه يمكن ايجادهما حسب القوانين الاتية :

1) $A = ab\,\pi$ مساحة القطع الناقص

2) $p = 2\,\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \pi\,\sqrt{2a^2+2b^2}$ محيط القطع الناقص حيث : $\pi = \frac{22}{7}$

مثال أوجد المساحة والمحيط للقطع الناقص الذي معادلته : $9x^2 + 16\,y^2 = 144$

الحل المعادلة غير مرتبة لذا نقسم على 144 لتصبح : $[\,9x^2 + 16\,y^2 = 144\,]\,(\div\,144)$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ وبما أن $a > b$ لذا محور القطع الكبير على السينات (نقارن) :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \therefore a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$A = ab\,\pi \;= 12\,\pi\ \text{unit}^2$

$p = 2\,\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{16+9}{2}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}\,\pi\ \text{unit}$

مثال أوجد المساحة والمحيط للقطع الناقص الذي معادلته : $11x^2 + 9\,y^2 = 99$

الحل المعادلة غير مرتبة لذا نقسم على 144 لتصبح : $[11x^2 + 9\,y^2 = 99]\,(\div\,99\,)$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{11} = 1$ وبما أن $a > b$ لذا محور القطع الكبير على الصادات (نقارن) :

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \therefore a^2 = 11 \Rightarrow a = \sqrt{11} \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 11 - 9 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

$A = ab\,\pi \;= 3\sqrt{11}\;\pi\ \text{unit}^2$

$p = 2\,\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{11+9}{2}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{20}{2}} = 2\sqrt{10}\,\pi\ \text{unit}$

مثال أوجد احداثي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي المساحة والمحيط للقطع الناقص الذي معادلته : $4x^2 + y^2 = 4$

واجب

ملاحظة والآن سنحاول ايجاد معادلة القطع الناقص من خلال معلومات اخرى (لاحظ الامثلة الاتية) :

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 12 الكتاب أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه $(3 , 0), (- 3 , 0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5 , 0), V_2(- 5 , 0)$.

الحل نلاحظ ان البؤرتان (أو الرأسان) يقعان على محور السينات ومركز القطع نقطة الاصل

$\therefore$ المعادلة على محور السينات وهي : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(لكتابة المعادلة نحتاج ايجاد كل من a , b من معلومات السؤال)

$\because V_1(5 , 0) \Longrightarrow a = 5$

$\because F_1(3 , 0) \Longrightarrow c = 5$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$9 = 25 - b^2 \Longrightarrow b^2 = 25 - 9 \Longrightarrow b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل يقطع من المحورين قطع مستقيمة تسمى المقطع السيني والمقطع الصادي حيث الاكبر بينهما تمثل طول المحور الكبير (2a) والاصغر بينهما يمثل طول المحور الصغير (2b)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 13 الكتاب أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و يقطع من محور السينات جزءا طوله (8) وحدات ومن الصادات يقطع جزءا طوله (12) وحدة ثم المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه.

الحل (نلاحظ ان المقطع السيني اصغر من المقطع الصادي أي ان المحور الكبير للقطع هو محور الصادات)

المقطع السيني هنا هو $2b = 8$

$2b = 8 \Longrightarrow b = 4$

المقطع الصادي هنا هو $2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

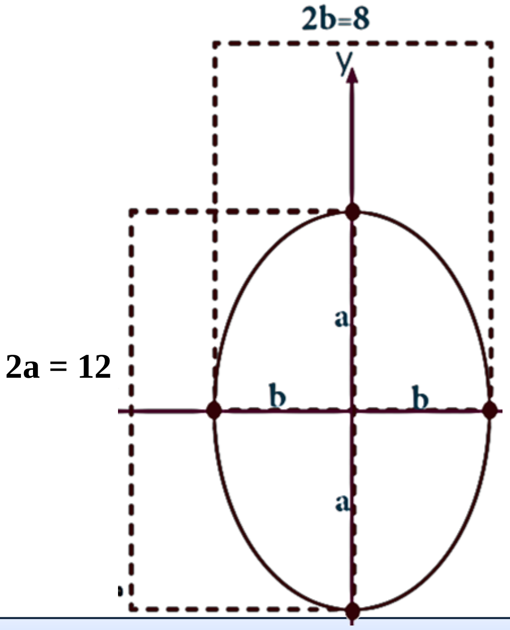
$\because c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

المسافة بين البؤرتين $2c = 4\sqrt{5}$

المحيط $p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi\sqrt{26}$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$



ملاحظة نعلم أن $a > b$ لذا فان الفرق بين طولي المحورين في القطع الناقص = $2a - 2b$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 15 الكتاب أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه يساوي (2) وحدة .

الحل

$\because$ المسافة بين البؤرتين هي $2c$: $\quad \therefore 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$[\, 2a - 2b = 2 \,] \div 2$

$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \;........ (1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = (1 + b)^2 - b^2$

$9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$

نعوض في معادلة (1) $\quad 2b = 8 \Rightarrow \therefore b = 4$

$\therefore a = 1 + 4 = 5$

$\therefore$ المعادلة هي : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 16 الكتاب أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير = 10

الحل نحاول ايجاد بؤرة المكافئ لأنها تمثل احدى بؤرتي الناقص لإيجاد قيمة c

<u>في القطع المكافئ :</u> $\quad y^2 = 12x$

نقارن لإيجاد البؤرة $\quad y^2 = 4px$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3 \quad \therefore F(3, 0)$

<u>في القطع الناقص</u> البؤرتان : $F_1(3,0), F_2(-3,0)$

$\therefore c = 3$

$\because$ طول محوره الصغير = 10 : $\quad \therefore 2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$9 = a^2 - 25 \Rightarrow \quad a^2 = 9 + 25$

$\therefore a^2 = 34$

$\therefore$ المعادلة هي : $\dfrac{x^2}{34} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و طول محوره الكبير 12 وحدة واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و طول محوره الكبير 8 وحدة والبعد بين بؤرتيه 6 وحدات طول .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال ذكرت في السؤال النسبة بين المحورين وكان البسط اصغر من المقام فهي $\frac{2b}{2a}$ اما اذا كان البسط اكبر من المقام فهي $\frac{2a}{2b}$.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و البعد بين بؤرتيه 6 وحدات والنسبة بين طولي محوريه = $\frac{4}{5}$

الحل (لاحظ انه لا توجد دلالة على موقع البؤرتين لذا توجد حالتين)

$\because 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$\because \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5}$ (لاحظ أن البسط اصغر من المقام)

$\frac{b}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4a}{5}$ ....(1)

$c^2 = a^2 - b^2$

$[9 = a^2 - \frac{16a^2}{25}] \times 25$

$225 = 25\,a^2 - 16\,a^2 \Rightarrow 9\,a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ نعوض في (1)

$\therefore b = \frac{4(5)}{5} = 4$

اذا كانت البؤرتان على السينات البؤرتان هما : $\therefore F_1(3 , 0) , F_2(-3 , 0)$

$\therefore$ المعادلة : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

اذا كانت البؤرتان على الصادات البؤرتان هما : $\therefore F_1(0 , 3) , F_2(0 , -3)$

$\therefore$ المعادلة : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و البعد بين رأسيه 12 وحدات والنسبة بين طولي محوريه = $\frac{1}{4}$

واجب

مثال أوجد معادلة القطع الناقص وأحد قطبيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -24x$ و النسبة بين طولي محوريه = $\frac{5}{3}$ علما أن مركزه نقطة الاصل .

الحل من القطع المكافئ نجد بؤرته وهي قطب القطع الناقص $y^2 = -24x$

$y^2 = -4px$ نقارن

$\therefore 4p = 24 \Rightarrow p = 6 \quad \therefore F(-6, 0)$

في القطع الناقص القطبان على السينات اي القطع على الصادات القطبان : $(6, 0)\ (-6, 0)$

$\therefore b = 6$

$\because \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3}$ (لاحظ أن البسط اكبر من المقام)

$\frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 10$

∴ المعادلة : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات و طول محوره الكبير 20 وحدات واختلافه المركزي = $\frac{4}{5}$ علما أن مركزه نقطة الاصل .

واجب

ملاحظة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل يقطع كلا المحورين في الرأسين والقطبين (لاحظ المثال)

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و يقطع المحورين الاحداثيين في النقط التي احداثياتها هي : $(\mp3, 0), (0, \mp4)$

الحل (لاحظ ان الاحداثي الصادي في النقط 4 بينما الحداثي السيني في النقط الاخرى 3 ونحن نعلم ان $a > b$

لذا فان $(0, \mp4)$ تمثلان الراسين و $(\mp3, 0)$ تمثلان القطبين)

والبؤرتين تطابق الراسين في المحور أي محور الصادات $\therefore a = 4 \quad , b = 3$

∴ المعادلة : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

ملاحظة كل نقطة تنتمي للقطع تحقق معادلته (لاحظ المثال الآتي)

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و أحد رؤوسه هو بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -20y$ ويمر بالنقطة $(3 , 0)$

الحل <u>من القطع المكافئ نجد البؤرة وتمثل رأس للقطع الناقص</u> $x^2 = -20y$

نقارن $x^2 = -4py$

$4p = 20 \Rightarrow p = 5 \quad \therefore F (0 , -5)$

<u>في القطع الناقص</u> الرأسان هما : $V_1(0 , 5) , V_2(0 , -5)$

$\therefore c = 4$

$\because$ النقطة $(3 , 0)$ تحقق معادلة القطع الناقص لان القطع يمر بها كذلك الراسان على الصادات اي البؤرتان على الصادات لذا فالمعادلة هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{9}{b^2} + \frac{0}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 25$$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -12x$ ويمر بالنقطة $(0 , -4)$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2012 الدور الثاني أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزأ طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة .

الحل المقطع السيني = 8 ولكن لا توجد اشارة لان المحور السيني هو المحور الكبير ان الصغير لذا يوجد حالتين :

1) $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$\because A = ab\,\pi$ (نعوض قيمة A من السؤال وقيمة a من الحل)

$\therefore 24\pi = (4)b\,\pi \Rightarrow b = 6$ وهذا غير ممكن لذا نهمل هذه الحالة

2) $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$\because A = ab\,\pi$ (نعوض قيمة A من السؤال وقيمة b من الحل)

$\therefore 24\pi = a\,(4)\,\pi \Rightarrow a = 6$ أي ان محور القطع الكبير هو محور الصادات

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

** لاحظ أن في القطع الناقص $a > b$

وزاري أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات والنسبة بين طولي محوريه $\frac{1}{2}$ ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ في النقطة التي احداثيها السيني = 2

واجب

وزاري قطع ناقص رأساه النقطتان $V_1(5 , 0)$, $V_2 (-5 , 0)$ واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة $(-3 , 4)$ ورأسه في نقطة الاصل ، أوجد معادلتي القطعين المكافئ والناقص.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة اذا ذكر في السؤال إحدى بؤرتي القطع تبعد عن رأسيه بالعددين m , n فان :

البعد بين الرأسين = m + n (طول المحور الكبير 2a)

ولإيجاد قيمة c فأن قيمتها هي حاصل طرح الاصغر بين m , n من قيمة a (لاحظ المثال)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات وتبعد إحدى بؤرتيه عن رأسيه بالعددين 1 ، 9

الحل ∵ البعد بين الرأسين = 1 + 9 (طول المحور الكبير 2a)

$\therefore 9 + 1 = 2a$ طول المحور الكبير

$$10 = 2a \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore c = 5 - 1 \Rightarrow c = 4$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

∴ المعادلة : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تنتميان إلى السينات وتبعد إحدى بؤرتيه عن رأسيه بالعددين 3 , 5

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة اذا كان لدينا قطع ناقص يمس دليل قطع مكافئ نجد معادلة الدليل ونقطة التماس وتعوض في المعادلة لأنها تحقق المعادلة كون القطع يمر بها .

(طريقة اخرى) كما ان نقطة التماس تمثل اما رأس أو قطب القطع الناقص حيث إذا كانت نقطة التماس:

1- تتفق مع البؤرتين في المحور فهي تمثل رأس القطع الناقص .

2- تختلف مع البؤرتين في المحور فهي تمثل قطب القطع الناقص . (لاحظ المثال الاتي)

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تنتميان إلى محور الصادات والبعد بين بؤرتيه = (4) وحدات ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 = -12\,y$

الحل

من معادلة القطع المكافئ نجد معادلة الدليل $\quad x^2 = -12\,y$

نقارن $\quad x^2 = -4p\,y$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$\therefore$ معادلة الدليل : $\quad y = 3$

القطع الناقص يمس دليل القطع المكافئ عند النقطة (0 , 3) وهي تحقق معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$ نعوض النقطة (0 , 3)

$$\frac{0}{b^2} + \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$$

$\because 2c = 4 \quad \Rightarrow \therefore c = 2$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore b^2 = 5$

$\therefore$ المعادلة : $\quad \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(حل اخر) النقطة (0 , 3) تقع على نفس المحور مع البؤرتين (محور الصادات) لذا تمثل رأس القطع ومنها :

$a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$\because 2c = 4 \quad \Rightarrow \therefore c = 2$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore b^2 = 5$

$\therefore$ المعادلة : $\quad \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 14 الكتاب لتكن $k\,x^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}\,, 0)$ فأوجد قيمة $k \in R$

الحل

نلاحظ إن البؤرتان $(\sqrt{3}\,, 0)$ ، $(-\sqrt{3}\,, 0)$ تنتمي لمحور السينات ومنها $\quad c = \sqrt{3}$

نقسم المعادلة على 36 لوضع المعادلة بالصورة القياسية $\quad [\ kx^2 + 4y^2 = 36\ ] \div 36$

نضرب المعاملات في مقام المقام

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\because$ البؤرتان تنتمي لمحور السينات نقارن $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore \dfrac{36}{k} = a^2 \quad , b^2 = 9$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = \dfrac{36}{k} - 9 \Rightarrow 3 + 9 = \dfrac{36}{k}$

$12\,k = 36 \Rightarrow k = 3$

وزاري 1998 الدور الثاني النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات وهي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه = $\frac{5}{4}$ فأوجد معادلة كل منهما .

الحل في القطع المكافئ : نلاحظ ان النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تقع في الربع الاول لذا فان البؤرة تقع على الاتجاه الموجب لمحور السينات أي المعادلة هي :

$y^2 = 4px$ نعوض النقطة في المعادلة لأنها تنتمي للقطع

$4 = 4p(\frac{1}{3}) \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F(3, 0)$

$y^2 = 12x$ ∴ معادلة القطع المكافئ هي :

في القطع الناقص : بؤرتيه هما (من المكافئ) : $F_1(3, 0), \; F_2(-3, 0) \Rightarrow \therefore c = 3$

النسبة بين طولي محوريه : $\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5b}{4}$ .....(1)

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow [9 = \frac{25b^2}{16} - b^2](16)$

$144 = 25b^2 - 16b^2 \Rightarrow 9b^2 = 144$

$\therefore b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ نعوض في (1)

$\therefore a = \frac{5(4)}{4} \Rightarrow a = 5$

∴ المعادلة : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2008 الدور الاول قطع ناقص معادلة $4x^2 + 2y^2 = L$ فأوجد قيمة (L) اذا كان البعد بين بؤرتيه = $2\sqrt{3}$ وحدات ومحوره الاكبر يقع على محور الصادات .

الحل

البعد بين بؤرتيه $\because 2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow \therefore c = \sqrt{3}$

نرتب المعادلة $4x^2 + 2y^2 = L \,]\div L$

∵ محوره الاكبر يقع على محور الصادات $\frac{4x^2}{L} + \frac{2y^2}{L} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{L}{4}} + \frac{y^2}{\frac{L}{2}} = 1$

نقارن $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\therefore a^2 = \frac{L}{2}, \; b^2 = \frac{L}{4}$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} \Rightarrow 3 = \frac{2L-L}{4} \Rightarrow 3 = \frac{L}{4} \Rightarrow L = 12$

مثال قطع ناقص معادلته $12x^2 + 4y^2 = L$ فإذا علمت ان البعد بين بؤرتيه = 8 وحدات ، أوجد قيمة L .

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ يمر بإحدى بؤرتيه ومساحة منطقته (15π) وحدة مساحة .

واجب

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومحيط المثلث $pF_1F_2 = 32$ وحدة طول حيث النقطة $p(x, y)$ تنتمي للقطع وكل من F_1, F_2 بؤرتي القطع.

الحل <u>في القطع المكافئ نجد بؤرته لأنها بؤرة القطع الناقص نفسها</u> $x^2 = 24y$

نقارن $x^2 = 4py$

$\therefore 4p = 24 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow F(0, 6)$

<u>في القطع الناقص (لاحظ ان البؤرتين على محور الصادات)</u>

$F_1(0, 6), F_2(0, -6) \Rightarrow c = 6$

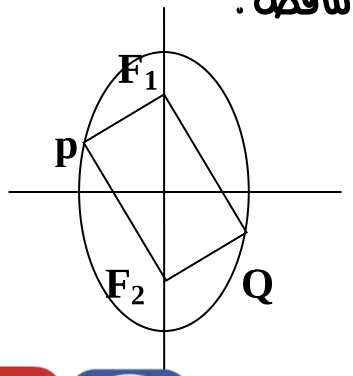
$\because$ محيط المثلث $pF_1F_2 = 32$ $\qquad \because pF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c$

$\therefore [2a + 2(6) = 32] \div 2 \Rightarrow a + 6 = 16 \Rightarrow a = 10$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 36 = 100 - b^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 36 \Rightarrow b^2 = 64$

$\therefore$ المعادلة : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنقطة (0 , 4) هي احدى بؤرتيه والنقطتان p , Q تنتميان إليه حيث إن محيط الشكل الرباعي $F_1pF_2Q = 20$ وحدة حيث أن F_1, F_2 هما بؤرتي القطع الناقص .



$\because F_1(0, 4) \Rightarrow c = 4$

$\because pF_1 + pF_2 = 2a$

$\because QF_1 + QF_2 = 2a$

$\because$ محيط الشكل الرباعي = مجموع أطوال أضلاعه

$\therefore pF_1 + pF_2 + QF_1 + QF_2 = 20$

$\therefore 2a + 2a = 20 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

مثال 17 الكتاب باستخدام التعريف ، أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و احداثي بؤرتاه : $F_1 (2 , 0)$, $F_2 (-2 , 0)$ والبعد الثابت = 6

الحل لنفرض أن النقطة $p(x ,y)$ تنتمي للقطع ولدينا العدد الثابت $2a = 6$

ومن تعريف القطع الناقص : $pF_1 + pF_2 = 2a$

بالتعويض $\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 6$

وبتربيع الطرفين $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$$(x-2)^2+y^2 = 36 - 2(6)\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36 + x^2 + 4x + 4$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36 + 4x \; +4x$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36 + 8x \;] \; (\div 4)$$

نربع الطرفين $3\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 9 + 2x$

$$9 [(x+2)^2 + y^2] = 81 + 36x + 4x^2 \Longrightarrow 9 [x^2+4x +4 + y^2] = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9 x^2+36x +36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9 x^2+ 9y^2 - 4x^2 = 81 - 36$$

وبالقسمة على 45 $5 x^2+ 9y^2 = 45$

∴ المعادلة: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في القطع الناقص مجموع طولي محوري القطع الناقص = $2a + 2b$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2002 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تقعان على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه = 8 ومجموع طولي محوريه = 16 وحدة .

وزاري 2010 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 = 16 x$ ومساحة منطقته 20π وحدة مربعة .

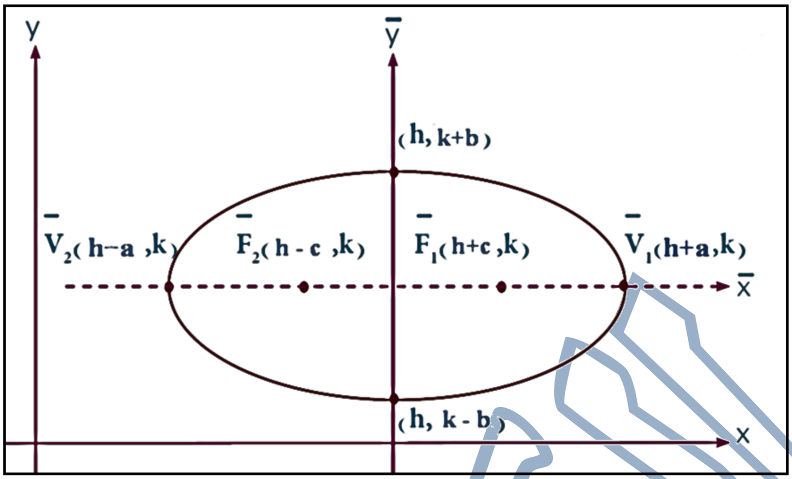
واجب

وزاري 2016 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $y^2 + 24 x = 0$ اذا علمت ان مساحة القطع الناقص $80 \pi \text{ cm}^2$.

انسحاب المحاور للقطع الناقص

ذكرنا انه توجد حالتين للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والان سنتطرق للقطع الناقص الذي مركزه $\bar{O}\,(h, k)$ ، فلو فرضنا إن المركز $O\,(0, 0)$ سينسحب بمقدار (h) من الوحدات في الإحداثي السيني وبمقدار (k) من الوحدات في الاحداثي الصادي فأن كل من الرأسين والبؤرتين والقطبين ومعادلة القطع الناقص ومعادلتي المحورين سوف يتغير بسبب هذا الانسحاب .

أولا : المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الكبير يوازي محور السينات ومركزه $\bar{O}\,(h, k)$.



من الشكل المجاور نلاحظ أن :

البؤرتان هما $\bar{F_1}\,(h + c , k)\,,\ \bar{F_2}\,(h - c , k)$

الرأسان هما $\bar{V_1}\,(h + a , k)\,,\ \bar{V_2}\,(h - a , k)$

القطبين هما $(h\,,\ k + b)\,,\,(h\,, k - b)$

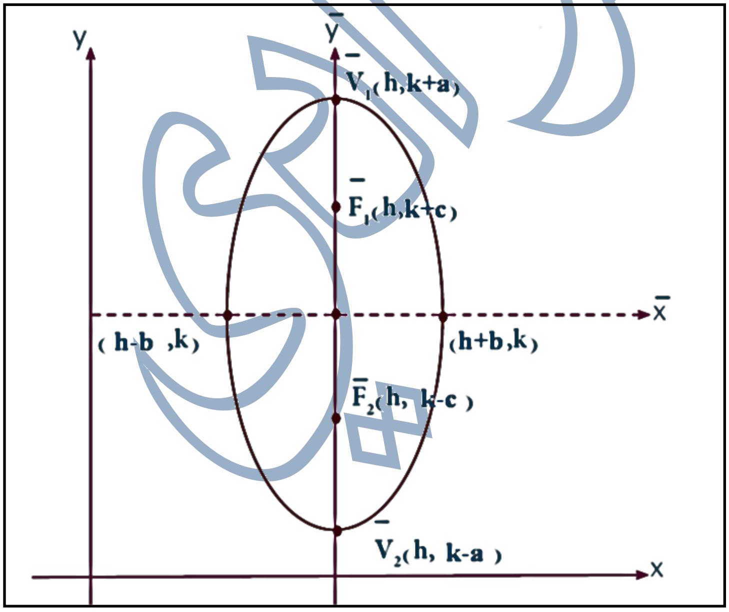
والمعادلة تصبح :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

كذلك المحور الكبير يوازي محور السينات ومعادلته : $y = k$

و المحور الصغير يوازي محور الصادات ومعادلته : $x = h$

ثانيا : المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الكبير يوازي محور الصادات ومركزه $\bar{O}\,(h, k)$.



من الشكل المجاور نلاحظ أن :

البؤرتان هما $\bar{F_1}\,(h , k + c)\,,\ \bar{F_2}\,(h , k - c)$

الرأسان هما $\bar{V_1}\,(h , k + a)\,,\ \bar{V_2}\,(h , k - a)$

القطبين هما $(h + b , k)\,,\,(h - b , k)$

والمعادلة تصبح :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

المحور الكبير يوازي محور الصادات ومعادلته: $x = h$

المحور الصغير يوازي محور السينات ومعادلته: $y = k$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة كل القوانين والملاحظات السابقة تستخدم في حالة الانسحاب كما هي عدا ما ذكر اعلاه .

مثال في كل مما يأتي اوجد إحداثيات البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي :

1) $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ نقارن

$(h , k) = (-4 , 3)$ (اساس الحل) مركز القطع

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ وحدة طول طول المحور الكبير

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة طول طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

$\overline{F_1}\,(h+c , k) = \overline{F_1}\,(-4+3 , 3) = \overline{F_1}\,(-1 , 3)$ البؤرتان

$\overline{F_2}\,(h-c , k) = \overline{F_2}\,(-4-3 , 3) = \overline{F_2}\,(-7 , 3)$

$\overline{V_1}\,(h+a , k) = \overline{V_1}\,(-4+5 , 3) = \overline{V_1}\,(1 , 3)$ الرأسان

$\overline{V_2}\,(h-a , k) = \overline{V_2}\,(-4-5 , 3) = \overline{V_2}\,(-9 , 3)$

$(h , k+b) = (-4 , 3+4) = (-4 , 7)$ القطبين هما

$(h , k-b) = (-4 , 3-4) = (-4 , -1)$

$y = k \Rightarrow y = 3$ معادلة المحور الكبير

$x = h \Rightarrow x = -4$ معادلة المحور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ الاختلاف المركزي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{100}=1$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة اذا كانت المعادلة تحوي مثلا x , x^2 , y , y^2 يمكن الحكم مباشرة عليها انها معادلة لقطع ناقص في حالة الانسحاب بشرط كون اشارتي كل من x^2 , y^2 متشابهة وتحول الى الصورة القياسية حسب الخطوات الاتية (لاحظ ايضا المثال):

1) نعزل x , x^2 في قوس ونخرج عامل مشترك ان وجد منها و y , y^2 في قوس ونخرج عامل مشترك ان وجد منها والاعداد ان وجدت في الجهة المقابلة .

2) نستخدم طريقة اكمال المربع في داخل كل قوس ثم نبسط المتبقي (لاحظ الطريقة في حل المثال الاتي)

3) نقسم الطرفين على العدد المتبقي في الجهة الاخرى لتصبح المعادلة بالصيغة العامة .

3) $x^2 + 9y^2 - 6x + 18y + 9 = 0$

بإضافة وطرح مربع نصف معامل x و بإضافة وطرح مربع نصف معامل y

ترتيب وعامل مشترك (ان وجد) $(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) = -9$

بإكمال المربع $(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) = -9$

$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 = -9$

$[(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 9] \div 9$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

طول المحور الكبير $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول

طول المحور الصغير $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2b = 2$ وحدة طول

المركز هو (اساس الحل) $(h, k) = (3, -1)$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

البؤرتان $\overline{F_1}\,(h+c, k) = \overline{F_1}\,(3 + 2\sqrt{2}, -1)$, $\overline{F_2}\,(h-c, k) = \overline{F_2}\,(3 - 2\sqrt{2}, -1)$

الرأسان $\overline{V_1}\,(h+a, k) = \overline{V_1}\,(3+3, -1) = (6, -1)$

$\overline{V_2}\,(h-a, k) = \overline{V_2}\,(3-3, -1) = (0, -1)$

القطبين هما $(h, k+b) = (3, -1+1) = (3, 0)$, $(h, k-b)\ (3, -1-1) = (3, -2)$

معادلة المحور الصغير $x = h \Rightarrow x = 3$,   معادلة المحور الكبير $y = k \Rightarrow y = -1$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$ **واجب**

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

رسم القطع الناقص

في حال طلب رسم القطع الناقص نتبع الخطوات الاتية :

1) نجد كلا من المركز والرأسين والبؤرتين والقطبين ومعادلتي المحورين (في حالة الانسحاب فقط).

2) نعين على النظام الاحداثي كلا من المحورين (في حالة الانسحاب فقط).

3) نعين الرأسين والقطبين على المحاور.

4) نصل بخط منحني متصل بين النقاط الأربعة .

5) نعين كلا البؤرتين .

تمارين (2–2)

س1 // عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي :

a) $x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ **المعادلة تحتاج للترتيب**

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **تقارن** $\Rightarrow (0,0)$ **المركز هو :**

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2a = 2$ **طول المحور الكبير**

$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2b = \sqrt{2}$ **طول المحور الصغير**

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ **البؤرتان على محور السينات ∴**

$V_1(1, 0), V_2(-1, 0)$ **الرأسان على محور السينات ∴**

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **القطبان على محور الصادات ∴**

لاحظ أن المحورين هما محور السينات الذي معادلته $y = 0$ **ومحور الصادات الذي معادلته** $x = 0$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $[9x^2 + 13y^2 = 117](\div 117) \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **تقارن** $\Rightarrow (0,0)$ **المركز هو :**

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{13}$ **طول المحور الكبير**

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$ **طول المحور الصغير**

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2$

$F_1(2, 0), F_2(-2, 0)$ **البؤرتان على محور السينات ∴**

$V_1(\sqrt{13}, 0), V_2(-\sqrt{13}, 0)$ **الرأسان على محور السينات ∴**

$(0, 3), (0, -3)$ **القطبان على محور الصادات ∴**

لاحظ أن المحورين هما محور السينات الذي معادلته $y = 0$ **ومحور الصادات الذي معادلته** $x = 0$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

c) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ نقارن $\Rightarrow (h,k)=(4,-1)$ مركز القطع (اساس الحل)

$a^2=81 \Rightarrow a=9 \Rightarrow 2a=18$ وحدة طول طول المحور الكبير

$b^2=25 \Rightarrow b=5 \Rightarrow 2b=10$ وحدة طول طول المحور الصغير

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

$\overline{F_1}\,(h+c\,,k)=\overline{F_1}\,(4+2\sqrt{14}\,,-1)$ البؤرتان

$\overline{F_2}\,(h-c\,,k)=\overline{F_2}\,(4-2\sqrt{14}\,,-1)$

$\overline{V_1}\,(h+a\,,k)=\overline{V_1}\,(4+9\,,-1)=\overline{V_1}\,(13\,,-1)$ الرأسان

$\overline{V_2}\,(h-a\,,k)=\overline{V_2}\,(4-9\,,-1)=\overline{V_2}\,(-5\,,-1)$

$(h\,,\ k+b)=(4\,,\ -1+5)=(4\,,4)$ القطبين هما

$(h\,,k-b)=(4\,,-1-5)=(4\,,-6)$

$y=k \Rightarrow y=-1$ معادلة المحور الكبير

$x=h \Rightarrow x=4$ معادلة المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$ الاختلاف المركزي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ نقارن $\Rightarrow (h,k)=(-3,-2)$ مركز القطع (اساس الحل)

$a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة طول طول المحور الكبير

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ وحدة طول طول المحور الصغير

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

$\overline{F_1}\,(h\,,k+c)=\overline{F_1}(-3\,,2)\,,\ \overline{F_2}\,(h\,,k-c)=\overline{F_2}(-3\,,-6)$ البؤرتان ∴

$\overline{V_1}\,(h\,,k+a)=V_1(-3\,,3)\,,\ \overline{V_2}\,(h\,,k-a)=V_2(-3\,,-7)$ الرأسان

$(h+b\,,\ k)=(0\,,-2)\,,\ (h-b\,,k)=(-6\,,-2)$ القطبين هما

$y=k \Rightarrow y=-2$ معادلة المحور الصغير , $x=h \Rightarrow x=-3$ معادلة المحور الكبير

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ الاختلاف المركزي

e) $9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$

$9x^2 - 72x + 16y^2 - 96y = -144$ نرتب

$9(x^2 - 8x) + 16(y^2 - 6y) = -144$ عامل مشترك

$9(x^2 - 8x + 16 - 16) + 16(y^2 - 6y + 9 - 9) = -144$ إكمال مربع

$9(x^2 - 8x + 16) - 144 + 16(y^2 - 6y + 9) - 144 = -144$

$[\,9(x - 4)^2 + 16(y - 3)^2 = 144\,] \div 144$

$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ من المقارنة $\Rightarrow (h, k) = (4, 3)$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 8$ وحدة طول طول المحور الكبير

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$ وحدة طول طول المحور الصغير

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$\overline{F_1}(\sqrt{7} + 4, 3), \overline{F_2}(-\sqrt{7} + 4, 3)$ البؤرتان ∴

$\overline{V_1}(8, 3), \overline{V_1}(0, 3)$ الرأسان ∴

$(h, k + b) = (4, 6), (h, k - b) = (4, 0)$ القطبين هما

$x = h \Rightarrow x = 4$ معادلة المحور الصغير

$y = k \Rightarrow y = 3$ معادلة المحور الكبير

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ الاختلاف المركزي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

f) $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$

$x^2 + 4x + 25y^2 - 150y = -204$ نرتب

$(x^2 + 4x) + 25(y^2 - 6y) = -204$ عامل مشترك

$(x^2 + 4x + 4 - 4) + 25(y^2 - 6y + 9 - 9) = -204$ إكمال مربع

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + 25(y^2 - 6y + 9) - 225 = -204$

$(x + 2)^2 + 25(y - 3)^2 = -204 + 4 + 225$

$(x + 2)^2 + 25(y - 3)^2 = 25\,] \div 25$

$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$ من المقارنة $\Rightarrow (h, k) = (-2, 3)$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 2(5) = 10$ وحدة طول طول المحور الكبير

طوله المحور الصغير $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2b = 2(1) = 2$ وحدة طول

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 1 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$

∴ البؤرتان $\overline{F_1}(h+c, k) = \overline{F_1}(2\sqrt{6} - 2, 3), \overline{F_2}(h-c, k) = \overline{F_2}(-2\sqrt{6} - 2, 3)$

الرأسان $\overline{V_1}(h+a, k) = V_1(3, 3), \overline{V_2}(-a+h, k) = V_2(-7, 3)$

القطبان $(h, b+k) = (-2, 4), (h, -b+k) = (-2, 2)$

معادله المحور الصغير $x = h \Rightarrow x = -2$ ، معادله المحور الكبير $y = k \Rightarrow y = 3$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2// أوجد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل في كل مما يأتي :

أ) البؤرتان $(5, 0), (-5, 0)$ وطول المحور الكبير يساوي 12 وحدة .

من البؤرتان : $c = 5$

∵ طول المحور الكبير يساوي 12 $\therefore 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 25 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 11$

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ب) البؤرتان $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

من البؤرتان : $c = 2$

ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$ أي عند النقطتين $(4, 0), (-4, 0)$ لذا نعوض احداهما في معادلة القطع لأنها تحقق معادلته :

لاحظ ان البؤرتان على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{16}{b^2} + \frac{0}{a^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - 16 \Rightarrow a^2 = 20$

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$

جـ) إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 , 5 وحدة على الترتيب .

∵ البعد بين الرأسين = 1 + 5 (طول المحور الكبير 2a)

$\therefore 5 + 1 = 2a$ طول المحور الكبير

$6 = 2a \Rightarrow a = 3$

$\therefore c = 3 - 1 \Rightarrow c = 2$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

نلاحظ وجود حالتين كون السؤال لم يحدد اي محور وهما:

1) البؤرتان على السينات المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

2) البؤرتان على الصادات المعادلة هي : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

د) الاختلاف المركزي = $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طول

$\because 2b = 12 \Rightarrow \therefore b = 6$ طول محوره الصغير

$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 2c = a \Rightarrow \therefore c = \frac{a}{2}$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = a^2 - 36 \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = 36 \Rightarrow \therefore a^2 = 48$

نلاحظ وجود حالتين كون السؤال لم يحدد اي محور وهما:

البؤرتان على السينات : ∴ المعادلة $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$

البؤرتان على الصادات : ∴ المعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$

هـ) المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي 3 وحدة

$\because 2c = 8 \Rightarrow \therefore c = 4$

$b = 3$ نصف المحور الصغير

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 9 \Rightarrow \therefore a^2 = 25$

نلاحظ وجود حالتين كون السؤال لم يحدد اي محور وهما:

البؤرتان على السينات و المعادلة هي : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

البؤرتان على الصادات و المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

س3 // باستخدام التعريف أو جد معادلة القطع الناقص إذا علم :

أ) بؤرتاه النقطتان ($0 , \mp 2$) ورأساه النقطتان ($0 , \mp 3$) ومركزه نقطة الأصل .

$\because (0 , \mp 3)$ الرأسان $\Rightarrow \therefore a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ العدد الثابت

ولنفرض ان النقطة $P (x , y)$ تقع على القطع الناقص

لذا فحسب التعريف $pF_1 + pF_2 = 2a$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6$$
$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$
$$(y-2)^2 = 36 - 12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + (y+2)^2$$
$$y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + y^2 + 4y + 4$$
$$12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 36 + 8y\,] \div 4$$
$$3\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 9 + 2y$$

$9\,[\,x^2 + y^2 + 4y + 4\,] = 81 + 36y + 4y^2$ بالتربيع

$$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$
$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36 \Rightarrow 9x^2 + 5y^2 = 45$$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ب) المسافة بين بؤرتيه (6) وحدة طول والبعد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الأصل .

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow F_1 (3 , 0) , F_2 (-3 , 0)$$

لنفرض أن النقطة $p(x ,y)$ تنتمي للقطع ولدينا العدد الثابت $2a = 10$

ومن تعريف القطع الناقص : $pF_1 + pF_2 = 2a$

بالتعويض $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$

وبتربيع الطرفين $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 2(10)\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + x^2 + 6x + 9$$
$$20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 6x \;\; +6x$$

$20\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 100 + 12x$] (÷ 4)

$5\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 25 + 3x$ نربع الطرفين

$25\,[\,(x+3)^2 + y^2\,] = 625 + 150x + 9x^2$

$25[\,x^2+6x+9+y^2\,] = 625 + 150x + 9x^2$

$25x^2+150x+225+25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$

$25x^2 - 9x^2 + 25y^2 = 625 - 225 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$ وبالقسمة على 400

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// اوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3})$

في القطع المكافئ : $y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$ من المقارنة $\therefore 4p = 8 \Rightarrow p = 2 \quad \therefore F(-2\,,\,0)$

في القطع الناقص : البؤرتان : $F_1(2\,,0)\,,\ F_2(-2\,,0)$

النقطة $(2\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3})$ تحقق معادلة القطع الناقص : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$ ....(1)

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 4 + b^2$ ....(2) نعوض (2) في (1)

$\frac{12}{4+b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$

$\frac{12b^2 + 3(4+b^2)}{b^2(4+b^2)} = 1$

$12b^2 + 12 + 3b^2 = 4b^2 + b^4 \Rightarrow b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$

$\therefore b^2 = 12$ or $\quad b^2 + 1 = 0 \Rightarrow b^2 = -1$ تهمل

$\therefore a^2 = 16$ بالتعويض في (2)

∴ المعادلة $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

س5// أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (3 , 4) , (6 , 2)

∵ البؤرتان على محور السينات أي المعادلة هي : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نعوض النقطة (6 , 2) في القطع لا نه يمر بها: $\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$$\frac{36}{a^2}=1-\frac{4}{b^2}\Rightarrow\frac{36}{a^2}=\frac{b^2-4}{b^2}\Rightarrow a^2(b^2-4)=36b^2\Rightarrow a^2=\frac{36b^2}{b^2-4}\quad\ldots\ldots(1)$$

نعوض النقطة (3 , 4) في القطع لا نه يمر بها: $\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$

$$\frac{9}{a^2}=1-\frac{16}{b^2}\Rightarrow\frac{9}{a^2}=\frac{b^2-16}{b^2}$$

$$a^2(b^2-16)=9b^2\Rightarrow a^2=\frac{9b^2}{b^2-16}\quad\ldots\ldots(2)$$

نعوض في معادلة (1) $\left[\frac{36b^2}{b^2-4}=\frac{9b^2}{b^2-16}\right]\div 9b^2$

$$\frac{4}{b^2-4}=\frac{1}{b^2-16}\Rightarrow 4b^2-64=b^2-4$$

$$4b^2-b^2=64-4\Rightarrow 3b^2=60\Rightarrow b^2=20$$

نعوض في معادلة (2) $a^2=\frac{9(20)}{20-16}=45$

∴ المعادلة $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س6// أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

في القطع المكافئ $y^2=12x$

$y^2=4px$ من المقارنة $\Rightarrow\therefore p=3\Rightarrow F(3,0)\Rightarrow(-3,0)$ نقطة التماس ∴

لإيجاد نقاط التقاطع مع محور الصادات نعوض $x=0$ في معادلة المنحني المعطى لإيجاد قيم y

$$0+y^2-0=16\Rightarrow y=\mp 4$$

∴ نقطتا التقاطع هما (0 , ∓4) وهما بؤرتي القطع الناقص

في القطع الناقص البؤرتان: (0 , ∓4) ، $c=4$

نقطة التماس(– 3 , 0) تحقق معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{9}{b^2}+0=1\Rightarrow b^2=9$$

$$c^2=a^2-b^2\Rightarrow 16=a^2-9\Rightarrow a^2=25$$

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

س7// أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 +8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني (– 2)

النقطة التي فيها $x = -2$ تحقق معادلة المكافئ والناقص :

نعوض في معادلة القطع المكافئ لإيجاد قيم y : $y^2 +8(-2) = 0$

$$y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$$

∴ نقاط التقاطع هي $(-2, 4) , (-2, -4)$ تحقق معادلة القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لكن في السؤال لدينا أن : $2a = 2(2b)$

$$\therefore a = 2b \text{ ....(1)}$$

لذا نعوض النقطة $(-2, 4)$ و قيمة a :

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17 \Rightarrow \therefore b = \sqrt{17}$$

نعوض في (1) $\therefore a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

∴ المعادلة $\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س8// قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ ما قيمة كل من $h , k \in R$ ؟

من القطع المكافئ بالمقارنة نحصل على $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$

$$\therefore 4p = 4\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \therefore F(\sqrt{3}, 0)$$

في القطع الناقص $F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0) \Rightarrow \therefore c = \sqrt{3}$

مجموع مربعي طولي محوريه $(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 = 60\ ] \div 4$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \text{.........(1)}$$

نعوض في (1) $\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = 15 - b^2 - b^2 \Rightarrow 2b^2 = 15 - 3 \Rightarrow \therefore b^2 = 6$

$$\therefore a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$[\ hx^2 + ky^2 = 36\ ] \div 36$$

من البؤرتان القطع على محور السينات فينتج من المقارنة $\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$$\therefore \frac{36}{h} = a^2 \Rightarrow \frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = 4 \quad , \quad \frac{36}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = 6$$

س9 // أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

<u>في القطع المكافئ</u>   بالمقارنة نحصل على $x^2 = 24y$

$\therefore 4p = 24 \Longrightarrow p = 6 \quad \therefore F(0, 6)$

<u>في القطع الناقص</u>   البؤرتان : $(0, \mp 6)$ $\therefore c = 6$

$[2a + 2b = 36] \div 2$

$a + b = 18 \Longrightarrow a = 18 - b \; .....(1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$36 = (18 - b)^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b + b^2 - b^2$

$36\,b = 324 - 36 \Longrightarrow 36\,b = 288$

$\therefore b = 8$ نعوض في (1) $\Longrightarrow a = 10$

$\therefore$ المعادلة هي $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س10 // أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث أن محيط المثلث $Q\,F_1\,F_2$ يساوي (24) وحدة

$F_1(4, 0), F_2(-4, 0) \Longrightarrow c = 4$

$\because$ محيط المثلث $pF_1F_2 = 24$

$\because pF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c$

$\therefore [\,2a + 2(4) = 24\,] \div 2$

$a + 4 = 12 \Longrightarrow a = 8$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 16 = 64 - b^2$

$b^2 = 64 - 16 \Longrightarrow b^2 = 48$

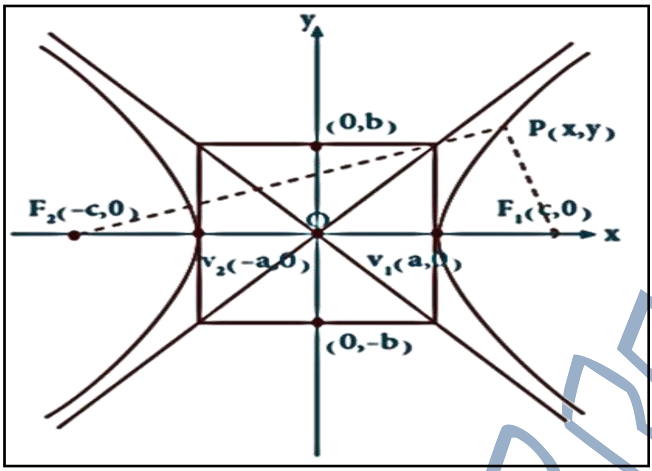
$\therefore$ المعادلة : $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

القطع الزائد

هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين " البؤرتان " يساوي عددا ثابتا .

وتوجد عدة حالات للقطع الزائد حسب موقع البؤرتين بالنسبة للمحورين الاحداثيين ومنها :

أو لا : القطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة



من خلال الشكل المجاور وتعريف القطع نلاحظ عدة امور منها :

1) نسمي كل من $F_1 (c , 0) , F_2 (- c , 0)$ باسم البؤرتان (من التعريف) حيث $c > 0$ و يرمز للبعد بين البؤرتين $2c$.

2) يسمى كل من $V_1 (a , 0) , V_2 (- a , 0)$ باسم الراسان حيث $a > 0$ و يرمز للبعد بين الراسين $2a$ و يسمى ايضا طول المحور الحقيقي و يمثل العدد الثابت في التعريف

لذا فلو فرضنا النقطة $p (x , y)$ تقع على القطع الزائد فمن التعريف فان :

$$| PF_1 - PF_2 | = 2a$$

3) كل من PF_1 , PF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين

4) النقطتان $(0 , b),(0 , -b)$ نهايتي المحور التخيلي (المرافق) $b > 0$ ويرمز لطول المحور التخيلي $2b$.

5) المحور الحقيقي (الذي يقع عليه البؤرتان والرأسان و مركز القطع) هو محور السينات ومعادلته $y = 0$

6) معادلة المحور التخيلي أو المرافق (عمودي على المحور الحقيقي عند مركز القطع) $x = 0$

ايجاد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل

لتكن كل من $F_1 (c , 0) , F_2 (- c , 0)$ البؤرتان و $p (x , y)$ نقطة تنتمي للقطع ونعلم ان :

$$| PF_1 - PF_2 | = 2a$$

وبعد التعويض والتبسيط (الاشتقاق غير مطلوب راجع الكتاب) نحصل على المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل وهي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث $c > a$, $c > b$ (لاحظ الشكل اعلاه) كما ان الاختلاف المركزي هو $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ (اكبر من 1)

كذلك يمكن استخدام العلاقة الاتية لإيجاد c : $c^2 = a^2 + b^2$

مثال أوجد إحداثيات البؤرتين والرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

الحل $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (على محور السينات) نقارن

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 8$ طول المحور الحقيقي

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$ (التخيلي) طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 = 25$

$\therefore c = 5 \quad \Rightarrow F_1 (5 , 0) , F_2 (-5 , 0)$ البؤرتان

$V_1 (4 , 0) , V_2 (-4 , 0)$ الرأسان

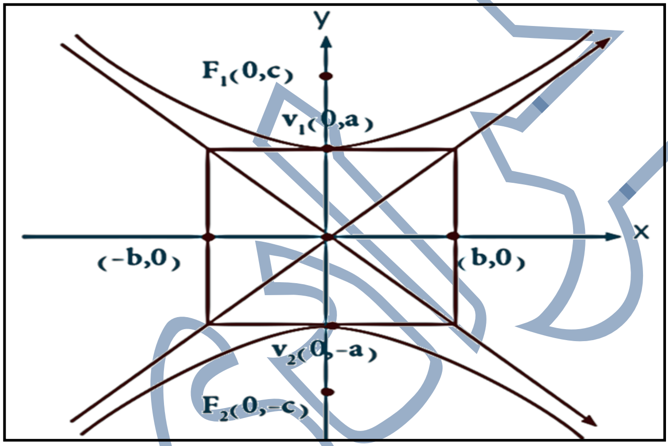
$(0 , 3) , (0 , -3) :$ (المرافق) نهايتي المحور التخيلي

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ (لاحظ ان الناتج اكبر من 1) الاختلاف المركزي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ثانيا : القطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل

من خلال الشكل المجاور وتعريف القطع نلاحظ عدة أمور منها :



1) $F_1 (0 , c) , F_2 (0 , -c)$ البؤرتان حيث $c > 0$

2) $V_1 (0 , a) , V_2 (0 , a -)$ الراسان حيث $a > 0$

3) النقطتان $(b , 0),(-b , 0)$ نهايتي المحور التخيلي (المرافق) $b > 0$.

4) المحور الحقيقي هو محور الصادات ومعادلته $x = 0$

5) معادلة المحور التخيلي أو المرافق $y = 0$

ايجاد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل

لتكن كل من $F_1 (0 , c) , F_2 (0 , -c)$ البؤرتان و $p (x , y)$ نقطة تنتمي للقطع ونعلم ان :

$$| PF_1 - PF_2 | = 2a$$

وبعد التعويض والتبسيط (الاشتقاق غير مطلوب راجع الكتاب) نحصل على المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي بؤرتيه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل وهي :

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

حيث $c > b \ , \ c > a$ (لاحظ الشكل اعلاه) كما ان كل القوانين الاخرى تنطبق على حالتي القطع .

مثال أوجد إحداثيات البؤرتين والرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

الحل نقارن (على محور الصادات) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

طول المحور الحقيقي $a^2=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow 2a=8$

طول المحور المرافق (التخيلي) $b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2b=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+4=20$

البؤرتان $\therefore c=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \Rightarrow F_1(0,2\sqrt{5}),\ F_2(0,-2\sqrt{5})$

الرأسان $V_1(0,4),\ V_2(0,-4)$

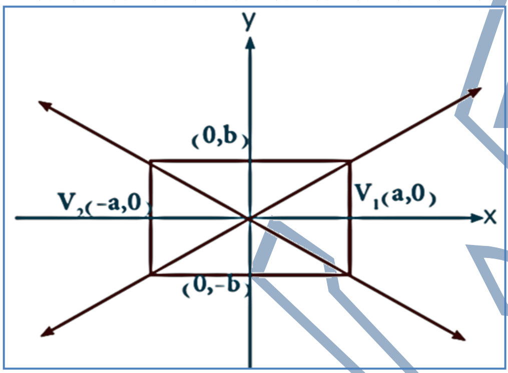
نهايتي المحور التخيلي (المرافق) $(2,0),(-2,0)$:

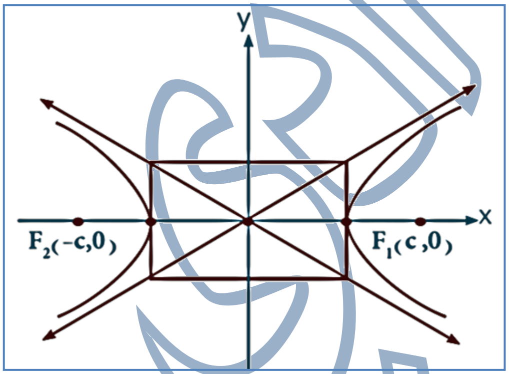
الاختلاف المركزي (لاحظ ان الناتج اكبر من 1) $e=\frac{c}{4}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

طريقة رسم القطع الزائد

لكي نرسم القطع الزائد نتبع الخطوات الاتية :





1) نجد كلا من البؤرتين والراسين ونهايتي المحور التخيلي (ومعادلتي المحورين في حالة الانسحاب) .
2) نعين على النظام الاحداثي المحورين (في حالة الانسحاب)
3) نعين كل من الرأسين ونهايتي المحور المرافق .
4) نرسم قطع مستقيمة توازي المحورين تمر من النقاط التي تمثل الرأسين ونهايتي المحور المرافق .
5) نكون مستطيلا من تقاطع هذه المستقيمات .
6) نرسم قطري المستطيل وهما يمثلان المحاذيان للقطع الزائد .
7) نعين البؤرتين ثم نرسم جزئي القطع الزائد على شكل منحنيين متعاكسين (اشبه بقطعين مكافئين) .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة المستطيل الذي رسمناه في الخطوة (5) يسمى المستطيل المركزي ويمكن ايجاد كلا من مساحته ومحيطه (ان طلبنا) حيث :

محيط المستطيل المركزي $= 4a + 4b$

مساحة المستطيل المركزي $= 4ab$

مثال 19 الكتاب عين البؤرتين والرأسين وإحداثيات نهايتي المحور المرافق وطول كل من المحورين للقطع الزائد $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ ثم ارسمه

الحل

نقارن (على محور السينات) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$

طول المحور المرافق (التخيلي) $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$

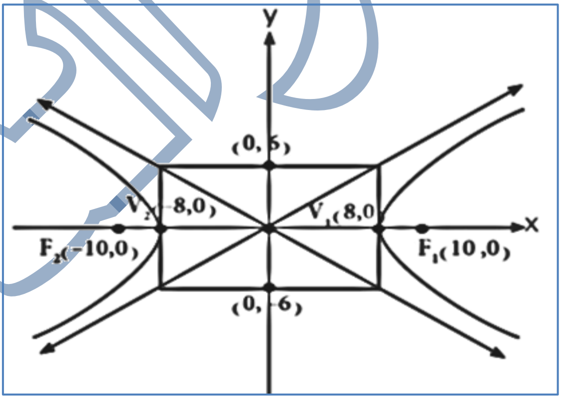
$c^2 = a^2 + b^2 = c^2 = 100$

$\therefore c = 10$

البؤرتان $\therefore F_1\ (10\ ,0\ )\ ,\ F_2\ (-10\ ,0\ )$

الرأسان $V_1\ (8\ ,0\ )\ ,\ V_2\ (-8\ ,0\ )$

نهايتي المحور التخيلي (المرافق) : $(0\ ,6\ )\ ,\ (0\ ,-6\ )$



* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2013 الدور الاول أوجد معادلة القطع الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F(\mp 4\ ,0\ )$ واختلافه المركزي 2

الحل

نعوض في الاختلاف المركزي) $c = 4$ $\Leftarrow$ البؤرتان $\because F_1\ (\mp 4\ ,0\ )\ ,\ F_2\ (\mp 4\ ,0\ )$)

$\because e = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow \therefore b^2 = 16 - 4 = 12$

∵ الاختلاف المركزي أكبر من (1) لذا القطع قطع زائد ومعادلته على محور السينات وهي :

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق 8 وحدة و البعد بين بؤرتيه 12 وحدة.

الحل

$\because 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ (طول المحور المرافق)

$\because 2c = 12 \Rightarrow c = 6$ (البعد بين بؤرتيه)

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow\ 36\ = a^2 + 16\ \Rightarrow\ \therefore a^2 = 36 - 16 = 20$

∴ المعادلة هي : $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحيط مستطيله المركزي = 28 واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 20y = 0$.

الحل

(في القطع المكافئ) $x^2 + 20y = 0 \Rightarrow x^2 = -20y$

$x^2 = -4py$ (من المقارنة) $\Rightarrow p = 5 \Rightarrow F(0, -5)$

(في القطع الزائد) $F(0, \mp 5) \Rightarrow c = 5$

(محيط مستطيله المركزي) $[4a + 4b = 28] (\div 4)$

$a + b = 7 \Rightarrow a = 7 - b \quad \ldots\ldots (1)$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = (7-b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 49 - 14b + b^2 + b^2$

$2b^2 - 14b + 49 - 25 = 0$

$[2b^2 - 14b + 24 = 0] (\div 2)$

$b^2 - 7b + 12 = 0 \Rightarrow (b-3)(b-4) = 0$

$\therefore b = 3$ نعوض في (1) $\Rightarrow a = 4$ or $b = 4$ نعوض في (1) $\Rightarrow a = 3$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ or $\therefore$ المعادلة هي : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ورأساه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$ ومساحة مستطيله المركزي = 40 وحدة مربعة

الحل

من القطع الناقص نجد بؤرتاه فهما رأسي القطع الزائد $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 34 - 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

$\therefore$ بؤرتي الناقص هما $F(\mp 5, 0)$

في القطع الزائد لدينا من الرأسان $V(\mp 5, 0) \Rightarrow \therefore a = 5$

مساحة المستطيل المركزي : $A = 4ab$

$40 = 4(5b) \Rightarrow b = 2$

$\therefore$ المعادلة $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتاه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 4\sqrt{13}y$ ومساحة مستطيله المركزي = 24 وحدة مربعة

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة * لاحظ أن a , b قد يكون اي واحد منهما هو الاكبر كذلك يمكن ان يكونان متساويان .

** في حالة تساوي كلا من a , b (أي ان طول المحور الحقيقي = طول المحور التخيلي) ويسمى هذا القطع باسم قطع زائد قائم أو (المتساوي الاضلاع) ويكون فيه المستطيل المركزي مربع كذلك الاختلاف المركزي له هو $e = \sqrt{2}$

مثال أوجد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي $\sqrt{2}$ وبؤرته بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = -8\sqrt{2}x$

الحل في القطع المكافئ نقارن لإيجاد البؤرة $y^2 = -8\sqrt{2}x$

$y^2 = -4p\,x \Rightarrow 4p = 8\sqrt{2}$

$p = 2\sqrt{2} \Rightarrow F(-2\sqrt{2}, 0)$

نلاحظ الان ان الاختلاف المركزي اكبر من واحد لذا القطع زائد ايضا $= \sqrt{2}$ اي القطع زائد قائم أي : $\therefore a = b$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 8 = a^2 + a^2 \Rightarrow 8 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 = b$

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة قطع الزائد القائم مركزه نقطة الأصل بؤرتيه على محور السينات وطول محوره الحقيقي $= 4\sqrt{2}$ وحدات

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة قطع الزائد مركزه نقطة الأصل و بؤرتيه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته هي $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{14} = 1$ وطولا نصفي قطريه البؤريين المرسومين من احدى نقاطه هما 12 ، 18 وحدة طول .

الحل من القطع الناقص نجد البؤرة $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{14} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ من المقارنة $\Rightarrow a^2 = 39 \;,\; b^2 = 14$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \therefore c^2 = 39 - 14 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

$\therefore F_1(5, 0), F_2(-5, 0)$

في القطع الزائد من البؤرتان $\Rightarrow \therefore c = 5$

∵ طولا نصفي القطر البؤريين هما 12 ، 18 أي أن :

حسب تعريف القطع الزائد $|18 - 12| = 2a$

$6 = 2a \Rightarrow a = 3$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow \therefore b^2 = 16$

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق 4 وحدات واحدى بؤرتيه هي النقطة $(0, \sqrt{8})$

مثال أوجد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي $= \frac{5}{3}$ ونصف طول محوره المرافق $= 4$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والذي البعد بين رأسيه ثلاثة امثال اختلافه المركزي واحدى بؤرتيه هي نقطة تقاطع المستقيم $2x + y = 6$ مع محور الصادات .

واجب

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -24x$ و رأسيه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

الحل <u>في القطع المكافئ</u> $y^2 = -24\,x$ بالمقارنة نجد

$$y^2 = -4p\,x \Rightarrow 4p = 24 \;\Rightarrow p = 6 \quad \therefore F\,(-6\,,0\,)$$

وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

<u>في القطع الناقص</u> بالمقارنة نجد $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow c^2 = 36-20 \Rightarrow c = 4$$

$\therefore$ البؤرتان $(\mp4\,,0\,)$ وهما رأسي القطع الزائد

<u>والان في القطع الزائد لدينا كل من</u>

البؤرتان $\therefore c = 6 \quad \Rightarrow (\mp 6\,,0\,)$

الرأسان $\therefore a = 4 \quad \Rightarrow (\mp 4\,,0\,)$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$$

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال ذكر في السؤال تماس بين قطع زائد وقطع ناقص فأن نقطة التماس اما قطب أو راس حسب اتفاق او اختلاف النقطة مع احداثي البؤرتين وأما اذا ذكر ان القطع الزائد يمر ببؤرة قطع ناقص هنا البؤرة في الناقص تمثل رأس للزائد .

كذلك لاحظ ان القطع الزائد يمس دليل المكافئ في نقطة تمثل رأس للقطع الزائد .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي $(\,0\,,5\,)$ ويمس القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$

الحل <u>في القطع الناقص</u> $a^2 = 49\,,\,b^2 = 9$

$\therefore$ الرأسان هما : $(\,7\,,0\,)\;(-7\,,0\,)$ والقطبان هما : $(\,0\,,3\,),(\,0\,,-3\,)$

<u>في القطع الزائد</u> $\because$ احدى بؤرتيه على محور الصادات وبما انه يمس القطع الناقص

$\therefore$ نقطتي التماس : $(\,0\,,3\,),(\,0\,,-3\,)$ وهما رأسي القطع الزائد

$$\therefore a = 3 \quad , \quad c = 5$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

وزاري 2006 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 16x = 0$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2016 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما يقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول . (مركزهما نقطة الاصل)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2007 الدور الاول لتكن $x^2 - L y^2 = 3$ معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ ، فأوجد قيمة L.

الحل __في القطع المكافئ__

$y^2 = 8x$ بالمقارنة نجد

$$y^2 = 4p\,x \Longrightarrow 4p = 8$$

$$p = 2 \quad \therefore F(2, 0)$$

وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

__في القطع الزائد لدينا__

البؤرتان $\therefore c = 2 \quad F(\mp 2, 0) \Longrightarrow$

__في معادلة القطع الزائد المعطاة__

$$[x^2 - L y^2 = 3] \div 3 \Longrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{L}} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة نجد $\Longrightarrow a^2 = 3 \;, b^2 = \frac{3}{L}$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 4 = 3 + \frac{3}{L} \Longrightarrow 4 - 3 = \frac{3}{L} \Longrightarrow 1 = \frac{3}{L} \Longrightarrow L = 3$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2003 الدور الاول ليكن $5y^2 - 4x^2 = h$ قطعا زائدا احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $4y - \sqrt{5}\,x^2 = 0$، فأوجد قيمة $h \in R$.

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2012 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ومجموع طولي محوريه = 16 وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1996 الدور الاول قطع زائد ينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق = 5 وحدات وبؤرتيه $(-3, 0)$ $(3, 0)$ ، أوجد معادلته .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل و رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9y^2 + 5x^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2008 الدور الاول أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$ ، $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق يساوي 8 وحدات طول.

وزاري 2007 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه = 8 وحدات طول وراساه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2000 الدور الاول أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه = $\frac{1}{2}$.

كل الاسئلة واجب

وزاري 2002 الدور الثاني أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه = $\frac{1}{2}$.

وزاري 2001 الدور الثاني أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x$ ، $y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق = 2 .

وزاري 2003 الدور الثاني أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل والذي يمر من بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ونسبة البعد بين بؤرتيه الى طول محوره المرافق = $\frac{5}{4}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1997 الدور الثاني أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل والذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2009 الدور الاول أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي يمر ببؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $9y^2-16x^2=144$ ويقطع من السينات جزأ طوله 12 وحدة طول .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

انسحاب المحاور للقطع الزائد

ذكرنا حالتين للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والان سنتطرق لقطع الزائد الذي مركزه (h, k) ، فلو فرضنا إن المركز O (0, 0) سينسحب بمقدار من الوحدات (h) للإحداثي السيني وبمقدار (k) للإحداثي الصادي فأن الرأسين والبؤرتين ومعادلة القطع الزائد سوف تتغير بسبب هذا الانسحاب (وهي ما يتطرق اليه المنهج في هذا الموضوع) .

أولا : المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي محوره الحقيقي يوازي محور السينات ومركزه (h, k) .

من الشكل المجاور نلاحظ أن :

المركز (اساس الحل) (h, k)

البؤرتان $\overline{F}_1 (h + c , k)$

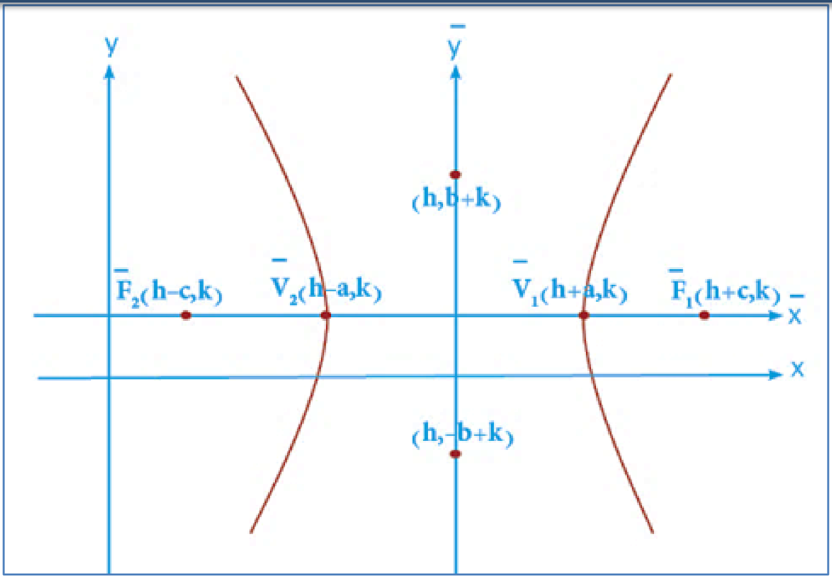
$\overline{F}_2 (h - c , k)$

الرأسان $\overline{V}_1 (h + a , k)$

$\overline{V}_2 (h - a , k)$

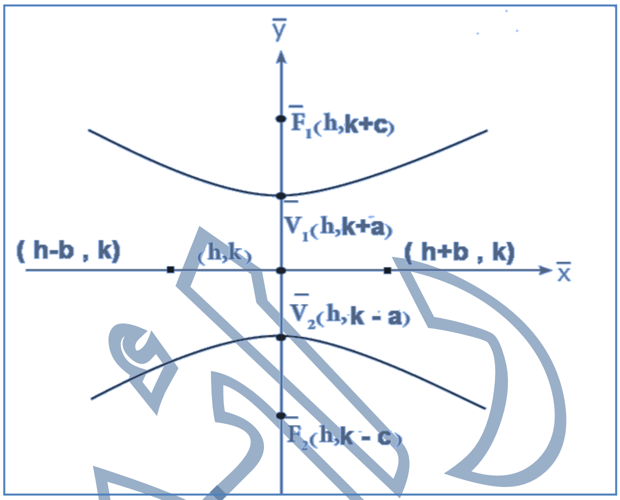
والمعادلة تصبح :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



ثانيا : المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي محوره الحقيقي يوازي محور الصادات ومركزه (h, k) .

من الشكل المجاور نلاحظ أن :



المركز (اساس الحل) (h, k)

البؤرتان $\overline{F_1}\ (h , k + c)$

$\overline{F_2}\ (h, k - c)$

الرأسان $\overline{V_1}\ (h, k + a)$

$\overline{V_2}\ (h, k - a\ )$

والمعادلة تصبح :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 17 الكتاب أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

** لاحظ ان كل من طول المحورين والاختلاف المركزي يمكن ايجادهما للقطع الزائد بنفس القوانين السابقة قبل الانسحاب

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة نحصل على

المركز (اساس الحل) $(h , k) = (-2 , \ 1)$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول

طول المحور المرافق $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$ وحدة طول

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 \Rightarrow \therefore c = \sqrt{13}$$

البؤرتان $\overline{F_1}\ (h + c , k) \Rightarrow \overline{F_1}\ (-2+\sqrt{13} , 1)$

$\overline{F_2}\ (h - c , k) \Rightarrow \overline{F_2}\ (-2-\sqrt{13} , 1)$

الرأسان $\overline{V_1}\ (h + a\ , k) \Rightarrow \overline{V_1}\ (1 , 1)$

$\overline{V_2}\ (h - a , k) \Rightarrow \overline{V_2}\ (- 5\ , 1)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

تمارين (3 – 2)

س1//عين كل من البؤرتين والرأسين ثم أوجد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة :

a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

$[\,12x^2 - 4y^2 = 48\,] \div 48$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ بالمقارنة نجد كلا من

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة طول   طول المحور الحقيقي

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{3}$ وحدة طول   طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow \therefore c = 4$

$F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$ البؤرتان هما

$V_1(2, 0), V_2(-2, 0)$ الرأسان هما

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

وزاري 2013 الدور التمهيدي

واجب $9x^2 - 16y^2 = 144$

b) $6x^2 - 9y^2 = 144$

$[16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ بالمقارنة نجد كلا من

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول   طول المحور الحقيقي

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة طول   طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow \therefore c = 5$

$F_1(5, 0), F_2(-5, 0)$ البؤرتان هما

$V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$ الرأسان هما , $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

c) $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

$[\,2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8\,] \div 8$

$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$ بالمقارنة نجد كلا من

$(h, k) = (1, -1)$: المركز (اساس الحل)

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة طول   طول المحور الحقيقي

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$ وحدة طول   طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 2 \Rightarrow c = \sqrt{6}$

$\overline{F_1}\ (h, k + c) \Rightarrow \overline{F_1}\ (1, -1 + \sqrt{6})$ البؤرتان

$\overline{F_2}\ (h, k - c) \Rightarrow \overline{F_2}\ (1, -1 - \sqrt{6})$

$\overline{V_1}\ (h, k + a) \Rightarrow \overline{V_1}\ (1, 1), \overline{V_2}\ (h, k - a) \Rightarrow \overline{V_2}\ (1, -3)$ الرأسان

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ الاختلاف المركزي

d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$

$16(x^2 + 10x + 25 - 25) - 9(y^2 - 2y + 1 - 1) = 185$

$16(x^2 + 10x + 25) - 400 - 9(y^2 - 2y + 1) + 9 = 185$

$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 185 + 400 - 9$

$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576\ ] \div 576$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$(h , k) = (-5 , 1)$: (اساس الحل) المركز

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ وحدة طول   طول المحور الحقيقي

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b = 16$ وحدة طول   طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 64 \Rightarrow c = 10$

$\overline{F_1}\,(h + c , k) \Rightarrow \overline{F_1}\,(5 , 1)\ ,\ \overline{F_2}\,(h - c , k) \Rightarrow \overline{F_2}\,(-15 , 1)$ البؤرتان

$\overline{V_1}\,(h + a , k) \Rightarrow \overline{V_1}\,(1 , 1)\ ,\ \overline{V_2}\,(h - a , k) \Rightarrow \overline{V_2}\,(-11 , 1)$ الرأسان

$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ الاختلاف المركزي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2// اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ)   البؤرتان هما النقطتان $(\mp 5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الأصل.

$\because$ البؤرتان $F(\mp 5 , 0) \Leftarrow c = 5 \ \therefore$

$\because$ القطع يتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ وكل نقطة على محور السينات الاحداثي الصادي لها صفر

$\therefore$ يمر بالنقطتين $(\mp 3 , 0)$ و يحققان معادلة القطع لذا نعوض احداهما في معادلة القطع :

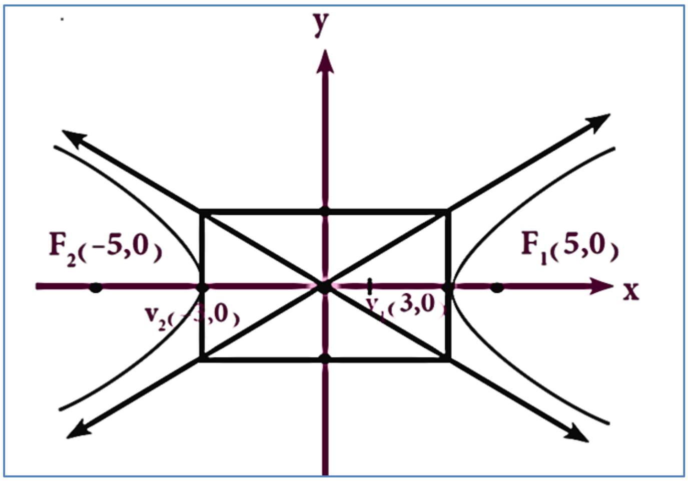
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$$

$\therefore V(\mp 3 , 0)$

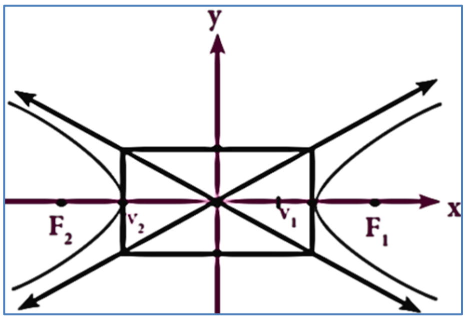
$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$



$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

ب) طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين



∵طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق(10)

$\therefore 2a = 12 \Longrightarrow a = 6$, $\therefore 2b = 10 \Longrightarrow b = 5$

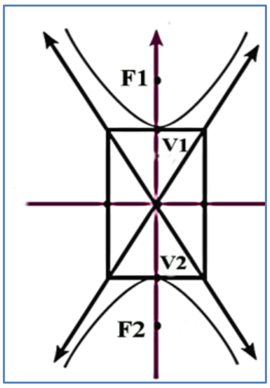
$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 36 + 25 \Longrightarrow c^2 = 61 \Longrightarrow c = \sqrt{61}$

يوجد احتمالين كونه لم يذكر موقع البؤرتين وهما :

1) البؤرتين ($F(\mp\sqrt{61}, 0)$) والرأسان ($V(\mp 6, 0)$) على محور السينات

فتصبح المعادلة :

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$



2) البؤرتين ($F(0, \mp\sqrt{61})$) والرأسان ($V(0, \mp 6)$) على محور الصادات

فتصبح المعادلة :

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

ج) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق ($2\sqrt{2}$) وحدة طول والاختلاف المركزي يساوي (3) .

∵ طول محوره المرافق ($2\sqrt{2}$) أي أن : $2b = 2\sqrt{2} \Longrightarrow b = \sqrt{2}$

من الاختلاف المركزي $\because e = \frac{c}{a} = 3 \Longrightarrow c = 3a$

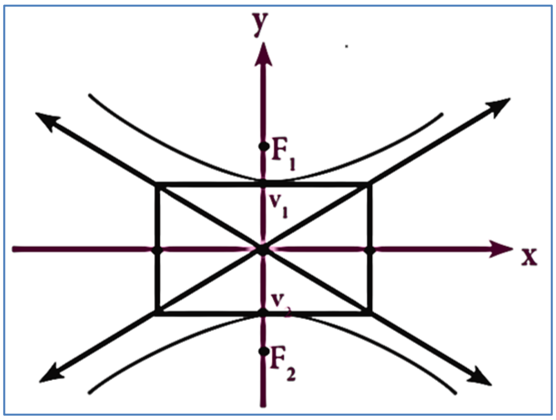
$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 9a^2 = a^2 + 2$

$8a^2 = 2 \Longrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \Longrightarrow V(0, \mp\frac{1}{2})$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{1}{4} + 2$

$c^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow c = \frac{3}{2} \Longrightarrow F(0, \mp\frac{3}{2})$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$



* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س3// اوجد باستخدام تعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه ($(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة عن بؤرتيه = 4 وحدات .

لنفرض أن النقطة (P (x , y) تنتمي للقطع الزائد لذا فحسب تعريف القطع فإن :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$|\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2}| = \mp 4$$ (للتخلص من القيمة المطلقة نضع ∓)

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2} = \mp 4 + \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2}$$ بالتربيع

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \mp 8\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$$

$$[\mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} = 16+8\sqrt{2}\,x\,] \div 8$$

$\mp\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} = 2+\sqrt{2}\,x$ بالتربيع نتخلص من الجذر والاشارة ∓

$$x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2 = 4+4\sqrt{2}\,x+2x^2$$

$$x^2+y^2-2x^2 = 4-8$$

$[-x^2+y^2 = -4\,](\div -4) \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ ∴ معادلة القطع هي :

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, -2\sqrt{5})$, $(1, 2\sqrt{5})$ فأوجد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .

نجد معادلة القطع المكافئ وبؤرته الاحداثي السيني متساوي في النقطتين $(1, -2\sqrt{5})$, $(1, 2\sqrt{5})$ اي ان محور السينات هو محور القطع وكونهما موجبان اي المعادلة بالاتجاه الموجب .

∴ معادلة القطع هي : $y^2 = 4px$

نعوض إحدى (يفضل الموجبة ان وجدت) النقطتين في معادلة القطع لإيجاد p $20 = 4p(1)$

$$4p = 20 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow F(5, 0)$$

∴ المعادلة : $y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 20x$

الان في القطع الزائد $F(\mp 5, 0) \Rightarrow c = 5$

$$\because 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow 25 = 9+b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

∴ معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س5// قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2 = 576$ فأوجد قيمة كل من h , k التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية .

في القطع الناقص $[9x^2+16y^2 = 576\,] \div 576$

من المقارنة نجد أن : $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

$$a^2 = 64 \quad , b^2 = 36$$

$$\because c^2 = a^2-b^2 \Rightarrow c^2 = 64-36$$

$$c^2 = 28 \Rightarrow c = 2\sqrt{7} \Rightarrow F_1(2\sqrt{7}, 0)\ , F_2(-2\sqrt{7}, 0)$$

في القطع الزائد نعود للمعادلة المعطاة وهي بحاجة للترتيب $[hx^2 - ky^2 = 90\,] \div 90$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$\because F_1(2\sqrt{7}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{7}, 0) \Longrightarrow c = 2\sqrt{7}$

$\because 2a = 6\sqrt{2} \Longrightarrow \therefore a = 3\sqrt{2}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 28 = 18 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 10$

∴ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$

وبالمقارنة مع المعادلة التي حصلنا عليها نجد أن :

$$\therefore a^2 = \frac{90}{h} \Longrightarrow 18 = \frac{90}{h} \Longrightarrow h = 5 \;, \therefore b^2 = \frac{90}{h} \Longrightarrow 10 = \frac{90}{h} \Longrightarrow k = 9$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س6// اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت إن احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

مجموع بعد احد الرأسين عن البؤرتين = البعد بين البؤرتين $2c = 9 + 1 \Longrightarrow 2c = 10 \Longrightarrow c = 5$

لإيجاد قيمة a نطرح من قيمة c التي اوجدناها العدد الاصغر بين 9 , 1 حيث أن ($a = c -$ الاصغر)

$a = c - 1 \Longrightarrow a = 5 - 1 \Longrightarrow a = 4$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 25 = 16 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 9$ (لاحظ ان محور القطع غير معلوم لذا توجد حالتين)

∴ معادلة القطع اذا كانت البؤرتان على محور السينات هي : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

∴ معادلة القطع اذا كانت البؤرتان على محور الصادات هي : $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س7// أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل.

في القطع الزائد نرتب المعادلة لتصبح $[\, x^2 - 3y^2 = 12 \,] \div 12$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$\therefore a^2 = 12 \;, \; b^2 = 4 \;, \; \because c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 16 \Longrightarrow c = 4 \Longrightarrow F(\mp 4, 0)$

في القطع الناقص

$\because F(\mp 4, 0) \Longrightarrow c = 4$

∵ النسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$

$\therefore \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Longrightarrow \quad 3a = 5b \Longrightarrow a = \frac{5b}{3} \quad .... (1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 16 = (\frac{5b}{3})^2 - b^2 \Longrightarrow [\, 16 = \frac{25b^2}{9} - b^2 \,] (9)$

$144 = 25b^2 - 9b^2 \Longrightarrow 16b^2 = 144 \Longrightarrow b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

نعوض في (1) $a = 5$

∴ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

س8// لتكن النقطة $p(6 , L)$ تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ فأوجد كلاً من:

أ) قيمة L .   ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P

أ) ∵ النقطة $p(6 , L)$ تنتمي للقطع الزائد لذا فهي تحقق معادلته : $x^2 - 3y^2 = 12$

$$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 12 = 3L^2 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \mp 2\sqrt{2}$$

∴ يوجد نقطتين هما $p_1(6 , 2\sqrt{2}) , p_2(6 , - 2\sqrt{2})$

ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P البعد بين النقطة p , F_1 لذا نجد إحداثيات F_1

$$[\, x^2 - 3y^2 = 12 \,] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow F_1(4 , 0) , F_2(- 4 , 0)$$

$$p_1F_1 = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$$ وحدة طول

$$p_2F_1 = \sqrt{(6 - 4)^2 + (-2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$$ وحدة طول

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س9// اوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$

في القطع المكافئ

$x^2 = - 12y$ نقارن

$$x^2 = - 4py \Rightarrow \therefore 4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

∴ نقطة التماس $(0 , 3)$ ⟹ ∴ معادلة الدليل : $y = p \Rightarrow y = 3$

في القطع الناقص

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow F_1(0 , 4) , F_2(0 , - 4)$$

في القطع الزائد

$$F_1(0 , 4) , F_2(0 , - 4) \Rightarrow c = 4$$

والنقطة (0 , 3) يمر بها لذا تحقق معادلته :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

∴ المعادلة هي : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

رياضيات

السادس العلمي

الأحيائي

الفصل الثالث : التفاضل

إعداد الأستاذ

رائد الكرادي

2017

يمكنكم متابعتنا على مواقع التواصل الأجتماعي

رحلة التفوق في السادس
رحلة التفوق في السادس

@rhlt_altafawK
@A_M_Z_F

DES : MOSTAFA KH

الفصل الثالث .. تطبيقات التفاضل ..

تعرف الطالب في الصف الخامس العلمي على موضوع المشتقة وقواعد الاشتقاق وهي اساس لعملنا خلال هذا الفصل ، و قلنا انه اذا كان لدينا دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق فأن مشتقتها هي دالة جديدة تختلف عن الدالة الاصلية واسميناها المشتقة الاولى .

وفي حال كانت دالة المشتقة الاولى تحقق شروط الاشتقاق فإن مشتقتها سميت المشتقة الثانية للدالة الاصلية وهكذا اذا كانت دالة المشتقة الثانية تحقق شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة وهكذا حتى المشتقة من الرتبة n وتسمى هذه المشتقات بدءا من المشتقة الثانية باسم المشتقات ذات الرتب العليا .

ايضا تعرف الطالب على بعض رموز المشتقة ومنها :

$$y', y'', y''', y^{(4)} \ldots\ldots, y^{(n)}$$

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots\ldots, f^{(n)}(x)$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

حيث $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$ تمثل المشتقة من الرتبة n كذلك لاحظ أن :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots\ldots.$$

وكمراجعة لما سبق وان درسه الطالب في المشتقة سنذكر مجموعة من القوانين والعلاقات التي سنحتاجها ضمن هذا الفصل وهي :

1) مشتقة الثابت = صفر

2) مشتقة x هي واحد اذا كان الاشتقاق بالنسبة الى x .

3) مشتقة x مضروبة بالثابت هي الثابت فقط .

4) مشتقة x مرفوعة لاس هي (ينزل الاس ويضرب بـ x وينقص الاس واحد .

5) المشتقة تتوزع على الجمع والطرح .

6) مشتقة حاصل ضرب دالتين هي : $y' =$ (الاولى) (مشتقة الثانية) + (الثانية) (مشتقة الاولى)

7) مشتقة قسمة دالتين هي : $y' = \dfrac{(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{\text{المقام تربيع}}$

8) (مهمة جدا) الدالة المرفوعة لاس

$y' =$ (اس الدالة) (اعد كتابة الدالة بانقاص الاس واحد) (مشتقة داخل القوس)

مشتقات الدوال الدائرية :

1) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

2) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

3) $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

4) $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \ \tan x$

5) $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$

6) $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$

**لاحظ انه في حال كون الزاوية دالة يجب ان نجد مشتقة الزاوية وتضرب في المشتقة كما موضح في الامثلة .

الاشتقاق الضمني : اذا كانت لدينا علاقة من متغيرين يصعب فصلهما (مثل معادلة الدائرة) مثلا ويراد اشتقاقها هنا نستخدم الاشتقاق الضمني كذلك اذا كنا نشتق بالنسبة لمتغير ثالث (دالة بمتغيرين ونشتقها بالنسبة للزمن مثلا)

وعند الاشتقاق بهذه الطريقة يجب ان نستخدم قواعد الاشتقاق اعلاه مع مراعات ان تكتب مشتقة اي متغير بالنسبة للمتغير الذي نشتق بالنسبة اليه مثلا : $y^3 + 4x^2 = 5$ عندما نشتقها بالنسبة الى x تصبح $3y^2 y' + 8x = 0$ أو تكتب $3y^2 \frac{dy}{dx} + 8x = 0$ أي اننا تعاملنا مع y **كدالة للمتغير** x وتم اشتقاقها كدالة مرفوعة لاس (حسب القاعدة 8) واما x فتم اشتقاقها بصورة اعتيادية .

ملاحظة لاحظ العلاقة بين الازاحة والسرعة والتعجيل هي علاقة مشتقة (في الصف الخامس) حيث إذا كانت لدينا الدالة : S (t) دالة الإزاحة بالنسبة للزمن t فأن :

1) $S'(t) = \frac{ds}{dt} = V(t)$ المشتقة الأولى لدالة الازاحة وتمثل سرعة الجسم

2) $S''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = V'(t) = a(t)$ المشتقة الثانية لدالة الازاحة وتمثل تغير السرعة أي التعجيل

3) $S'''(x) = \frac{d^3s}{dt^3} = V''(t) = a'(t)$ المشتقة الثالثة لدالة الازاحة تمثل المعدل اللحظي لتغير التعجيل

ملاحظة (ضمن المنهج فقط) في حالة الجذر التربيعي يمكن الاشتقاق حسب القاعدة :

$$y' = \frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2(\text{الجذر})}$$

امثلة منوعة محلولة أوجد y' لكل مما يأتي :

1) $y = x^3 + 2x^2 - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 4x$

2) $y = (2x^3 - 9)^4$

$y' = 4(2x^3 - 9)^3 (6x^2)$

3) $y = (3 - 2x)^5 (5x^3 + 2)^3$

$y' = (3 - 2x)^5 [3(5x^3 + 2)^2 (15x^2)] + (5x^3 + 2)^3 [5(3 - 2x)^4 (-2)]$

$y' = 45x^2 (3 - 2x)^5 (5x^3 + 2)^2 - 10(5x^3 + 2)^3 (3 - 2x)^4$

4) $f(x) = \frac{3x}{x-2} \quad , x \neq 2$

$f'(x) = \frac{(x-2)(3) - (3x)(1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$

5) $f(x) = \sqrt{3x - x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 - 3x^2}{2\sqrt{3x - x^3}}$

$y = \frac{1-3x}{(x-2)^3} \quad , x \neq 2$

واجب

امثلة منوعة اضافية أوجد $y^{/}$ لكل مما يأتي :

1) $y = \sin 3x^2 \Longrightarrow y^{/} = [\cos 3x^2](6x) \Longrightarrow y^{/} = 6x \cos 3x^2$

2) $y = \cos 2x^4 + 5x \Longrightarrow y^{/} = [-\sin 2x^4 + 5x](8x^3 + 5) \Longrightarrow y^{/} = -(8x^3 + 5) \sin 2x^4 + 5x$

3) $y = \tan 2x \Longrightarrow y^{/} = 2 \sec^2 2x$

4) $y = \cot \sqrt{x-2} \Longrightarrow y^{/} = [-\csc^2 \sqrt{x-2}\,]\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right) \Longrightarrow y^{/} = \left(\frac{-1}{2\sqrt{x-2}}\right) \csc^2 \sqrt{x-2}$

5) $y = \sec^3 2x \Longrightarrow y^{/} = 3 \sec^2 2x(\sec 2x \ \tan 2x)(2) \Longrightarrow y^{/} = 6 \sec^3 2x \ \tan 2x$

6) $y = \csc - 2x \Longrightarrow y^{/} = (-\csc - 2x \cot - 2x)(-2) \Longrightarrow y^{/} = 2 \csc - 2x \cot - 2x$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 1 الكتاب إذا كانت $y = \cos 2x$ فأوجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin 2x)(2) = -2\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(\cos 2x)(2) = -4\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-\sin 2x)(2) = 8\sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8(\cos 2x)(2) = 16 \cos 2x$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 2 الكتاب إذا علمت أن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن أن : $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

الحل نشتق العلاقة المعطاة اشتقاقاً ضمنيا بالنسبة للمتغير x ثلاث مرات كون العلاقة المراد اثباتها تحوي مشتقة ثالثة لـ y بالنسبة للمتغير x :

$[2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0] \div 2$ نشتق مرة اولى ثم نقسم على 2

ضرب دالتين

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ نشتق مرة ثانية ونرتب

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ نشتق ثالثا ونرتب

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

اي أن العلاقة صحيحة .

تمارين (1 – 3)

س1 // أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \sqrt{2 - x}$, $x < 2$

$$y = (2 - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2 - x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = \frac{-1}{2}(2 - x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}(2 - x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $y = \frac{2-x}{2+x}$, $x \neq -2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x)(-1) - (2-x)(1)}{(2+x)^2} = \frac{-2 - x - 2 + x}{(2+x)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = -4(2 + x)^{-2}$ **المشتقة الاولى**

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4[-2(2 + x)^{-3}(1)] = \frac{8}{(2+x)^3}$ **المشتقة الثانية**

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $2xy - 4y + 5 = 0$, $y \neq 0$, $x \neq 2$

$$[\, 2x\frac{dy}{dx} + 2y - 4\frac{dy}{dx} = 0 \,] \div 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + y - 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x - 2) = -y$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-2}$ **المشتقة الاولى**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-2)\left(\frac{-dy}{dx}\right) - (-y)(1)}{(x-2)^2}$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-2)\left(\frac{y}{x-2}\right) + y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$$

**** يمكن الحل بطريقة اخرى حيث**

$$2y(x - 2) + 5 = 0$$

$$\therefore y = \frac{-5}{2(x-2)} = \frac{-5}{2}(x - 2)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}(x - 2)^{-2}(1) = \frac{5}{2}(x - 2)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5}{2}[-2\ (x - 2)^{-3}(1)] = \frac{-5}{(x-2)^3}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2 // أوجد $f'''(1)$ لكل مما يأتي :

يمكن الحل بالطريقة المباشرة

a) $f(x) = 4\sqrt{6 - 2x}$, $x < 3$

$$f(x) = 4(6 - 2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6 - 2x)^{\frac{-1}{2}}(-2) = -4(6 - 2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f''(x) = -4\left(\frac{-1}{2}\right)(6 - 2x)^{\frac{-3}{2}}(-2) = -4(6 - 2x)^{\frac{-3}{2}}$$

$$f'''(x) = -4\left(\frac{-3}{2}\right)(6 - 2x)^{\frac{-5}{2}}(-2) = \frac{-12}{\sqrt{(6-x)^5}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2)^5}} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

b) $f(x) = \sin \pi x$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = \pi(-\sin \pi x)(\pi) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^2(\cos \pi x)(\pi) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi = -\pi^3(-1) = \pi^3$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $f(x) = \frac{3}{2-x} \quad , \; x \neq 2$

$$f(x) = 3(2-x)^{-1} \Longrightarrow f'(x) = 3[(-1)(2-x)^{-2}(-1)] = 3(2-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 3[(-2)(2-x)^{-3}(-1)] = 6(2-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 6[(-3)(2-x)^{-4}(-1)] = \frac{18}{(2-x)^4}$$

$$f'''(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = 18$$

يمكن الحل كحاصل قسمة دالتين

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س3// إذا كانت $y = \tan x$ فبرهن أن : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ حيث , $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \forall n \in Z$

$y = \tan x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ نشتق مرتين لوجود مشتقة ثانية في العلاقة المراد برهنة صحتها

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(\sec x)(\sec x \tan x)$$

$= 2 \tan x \sec^2 x$ نعوض العلاقة * هنا فتصبح

$$\boxed{* \tan^2 x + 1 = \sec^2 x}$$

$$= 2 \tan x(\tan^2 x + 1)$$

∴ العلاقة صحيحة أي : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// إذا كانت $y = x \sin x$ فبرهن أن : $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

نجد أولا المشتقة الرابعة للعلاقة ثم نعوض في الطرف الايسر من العلاقة المراد اثبات صحتها ونحاول التوصل للطرف الاخر .

ضرب دالتين

$$y = x \sin x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\cos x + \sin x$$

ضرب دالتين

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x = -x\sin x + 2\cos x$$

ضرب دالتين

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-x)(\cos x) + (\sin x)(-1) - 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (-x)(-\sin x) + \cos x(-1) - 3\cos x = x\sin x - 4\cos x$$

$$L.H.S : y^{(4)} - y + 4\cos x = x\sin x - 4\cos x - x\sin x + 4\cos x = 0 = R.H.S$$

المعدلات المرتبطة بالزمن

في بعض العلاقات التي تحوي على متغير أو اكثر تعتمد قيمة هذه المتغيرات على متغير واحد وهنا سنتطرق للعلاقات التي تعتمد قيمة متغيراتها على الزمن (t) وحيث ان العلاقات هي نوع من انواع الارتباط لذا سنسمي مثل هذه العلاقات بالمعدلات الزمنية أو المعدلات المرتبطة (بالزمن) .

وعند اشتقاق اي متغير بالنسبة للزمن (t) مثلا x فيكتب $\frac{dx}{dt}$ وهكذا اذا كان المتغير y عند اشتقاقه بالنسبة للزمن (t) فيكتب $\frac{dy}{dt}$ وبنفس الطريقة لباقي المتغيرات .

وكمثال بسيط لاحظ اشتقاق العلاقات الآتية بالنسبة للزمن (t):

1) $x^2 = y^3 - 6x$

$$2x\frac{dx}{dt} = 3y^2\frac{dy}{dt} - 6\frac{dx}{dt}$$

2) $5y - x\,y^2 = 3$

$$5\frac{dy}{dt} - x\left(2\,y\frac{dy}{dt}\right) + y^2\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \Longrightarrow 5\frac{dy}{dt} - 2\,x\,y\frac{dy}{dt} + y^2\frac{dx}{dt} = 0$$

3) $A = xy$ حيث A , x , y متغيرات

$$\frac{dA}{dt} = x\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

4) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ حيث كل من π , V ثوابت و كل من r , h متغيرات

$$0 = \frac{1}{3}\pi\left[r^2\left(\frac{dh}{dt}\right) + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right] \div \frac{1}{3}\pi$$

$$r^2\left(\frac{dh}{dt}\right) + 2r\,h\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة ولحل أي سؤال يتعلق بالمعدلات المرتبطة نحاول اتباع الخطوات الاتية :

a) نرسم مخططا مبسطا للسؤال (إن امكن الرسم او احتجنا الية) لتوضيح المسألة .

b) نحدد المتغيرات والثوابت ونرمز لها برموز مناسبة .

c) نحدد العلاقة الرئيسية في السؤال وغالبا هي (فيثاغورس ، حجم ، مساحة ، محيط ، وغيرها ....)

d) نجد(ان احتجنا) علاقة أخرى (ساندة) بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات.

e) نشتق العلاقة الرئيسية بالنسبة للزمن (t) (لاحظ ان مشتقة الثابت = 0).

f) نعوض عن المعطيات التي لدينا من السؤال بعد الاشتقاق .

g) نبسط لإيجاد قيمة المجهول المطلوب (لاحظ الامثلة الاتية).

رحلة التفوق
في
السادس

مثال 1 الكتاب خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها (2 m) يتسرب منه الماء بمعدل $0.4 \ m^3 / h$ فأوجد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t .

الحل نلاحظ ان السؤال يتكلم عن تسرب الماء اي ان حجم الماء يقل كذلك ارتفاع الماء يقل لذا فهما متغيران لذا

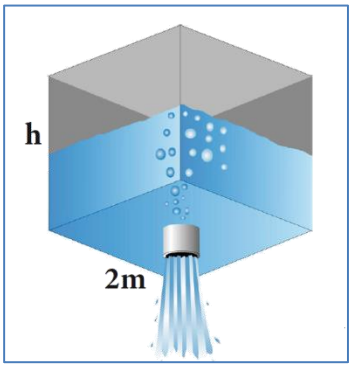
فلنفرض أن حجم الماء = V

لذا فان تغير الحجم (معدل التسرب) $\frac{dV}{dt} = -0.4$

يعطى اشارة سالبة للدلالة على النقصان

و نفرض ارتفاع الماء = h لذا فان تغير الارتفاع (انخفاض الماء) هو المطلوب $\frac{dh}{dt}$

وقاعدة الماء تأخذ شكل الاناء لذا هي مربعة طول ضلعها 2 ولنفرضها A لذا :



العلاقة الرئيسية هي علاقة حجم $V = A\,h$

$V = 2^2 h \Rightarrow V = 4h$ (القاعدة مربعة مساحتها طول الضلع تربيع)

$\frac{dV}{dt} = 4 \left(\frac{dh}{dt} \right)$ (بعد اشتقاق العلاقة نعوض المعلومات من السؤال)

$-0.4 = 4 \left(\frac{dh}{dt} \right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1 \ m / h$ معدل تغير انخفاض الماء

∴ معدل نقصان ارتفاع الماء $0.1 \ m / h$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 2 الكتاب صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي ($96 cm^2$) يتمدد طولها بمعدل (2cm/s) بحيث تبقى مساحتها ثابتة فأوجد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها (8cm).

الحل لنفرض أن الطول = x فإن التغير في الطول (تمدد) $\frac{dx}{dt} = 2$

و العرض = y فإن المطلوب $\frac{dy}{dt}$ (معدل النقصان في العرض)

ولنفرض المساحة هي A (وهي ثابتة)

العلاقة الرئيسية $A = x\,y$

ضرب دالتين

نعوض عن قيم y = 8 و A = 96 في العلاقة لإيجاد x في تلك اللحظة

$$96 = 8x \Rightarrow x = 12 \ cm$$

$0 = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$ (نشتق العلاقة الرئيسية ونعوض معلومات السؤال)

$0 = (12) \left(\frac{dy}{dt} \right) + (8)(2) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3} \ cm / s$

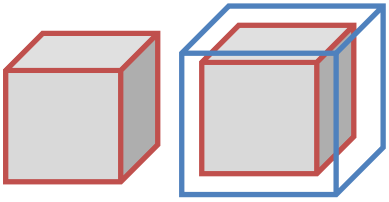
∴ معدل النقصان في العرض = $\frac{4}{3} \ cm / s$

مثال 3 الكتاب مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد المنتظم بحيث يبقى الشكل مكعب فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فأوجد معدل النقصان في سمك الجليد عندما يكون السمك 1cm .

الحل نفرض سمك الجليد في اي لحظة هو $= x$ فإن معدل النقصان في سمك الجليد $\frac{dx}{dt}$ هوالمطلوب

ولنفرض ان حجم الجليد فقط = V

الجديد 8 + 2x   الاصلي 8



∵ طول حرف المكعب الأصلي = 8 والجليد سيغطي المكعب من كل الاتجاهات

لذا فان حجمه = 8^3 (لان حجم الكعب = مكعب طول حرفه)

∴ طول حرف المكعب الجديد المغطى بالجليد = $8 + 2x$ فإن حجمه = $(8+2x)^3$

لذا فان حجم الجليد فقط = حجم المكعب الجديد – حجم المكعب الأصلي أي :

$\therefore V = (8+2x)^3 - 8^3$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

$$\frac{dV}{dt} = 3(8+2x)^2\ (2)\frac{dx}{dt} - 0$$

$$-6 = 6(8+2(1))^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01\ cm/s$$

∴ معدل نقصان السمك = 0.01 cm/s

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

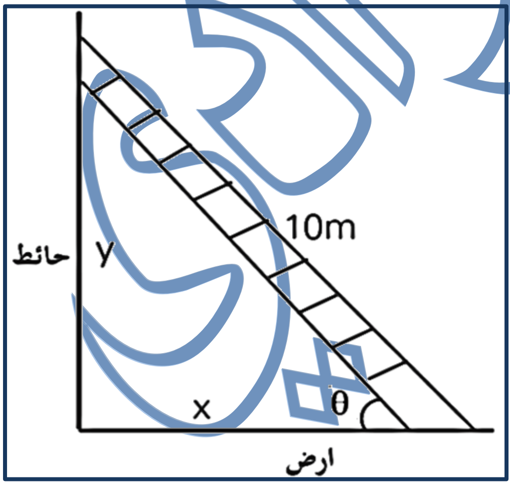
مثال 4 الكتاب سلم طوله (10m) يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل (2 m /s) فعندما يكون الطرف الأسفل على بعد(8m) عن الحائط فأوجد : 1) معدل انزلاق الطرف العلوي. 2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

الحل 1) لنفرض أن بعد الطرف الأسفل عن الحائط = x

لذا معدل ابتعاده عن الحائط هو $\frac{dx}{dt} = 2$

ولنفرض إن بعد الطرف الأعلى عن الأرض = y

لذا معدل انزلاقه للأسفل هو المطلوب $\frac{dy}{dt}$



كذلك طول السلم ثابت = 10 والعلاقة الرئيسية مبرهنة فيثاغورس

حيث سنجد اولا طول y في اللحظة التي يكون فيها x = 8

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 64 + y^2 = 100 \Rightarrow y = 6m$$

والآن نشتق ثم نعوض معلومات السؤال :

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(2)(8)(2) + (2)(6)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-32}{12} = \frac{-8}{3}\ m/s$$

2) لنفرض أن الزاوية بين السلم والأرض = θ فإن معدل سرعة تغيرها هو المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$

ولدينا من قانوني $\sin\theta , \cos\theta$:

(نشتق احداهما ونعوض الاخرى في المشتقة $\sin\theta = \frac{y}{10}$ ....(1) , $\cos\theta = \frac{x}{10}$ .....(2)

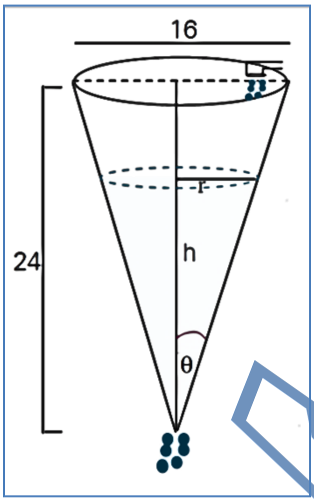
(نعوض العلاقة 2 المشتقة ومعلومات السؤال $\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \cos\theta\ (\frac{d\theta}{dt}) = \frac{1}{10}(\frac{dy}{dt})$

$$(\frac{x}{10})(\frac{d\theta}{dt}) = \frac{1}{10}(\frac{-8}{3}) \Rightarrow 8\frac{d\theta}{dt} = \frac{-8}{3} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3} \text{ rad / s}$$

∴ سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض هي $\frac{1}{3}$ rad / s

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال 5 الكتاب مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ارتفاعه يساوي (24 cm) وطول قطر قاعدته (16 cm) يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ فأوجد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm



الحل يصب السائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب السائل بمعدل $1cm^3/s$

وكلاهما يمثل تغير في الحجم لذا فاذا فرضنا ان حجم السائل = V

فإن معدل تغير الحجم يصبح $\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\ cm^3/s$

ولنفرض إن نصف قطر السائل = r و ارتفاع السائل = h

فإن معدل تغير عمق السائل هو المطلوب = $\frac{dh}{dt}$

من خلال الشكل نلاحظ انه لدينا مثلثين متشابهين احدهما صغير والاخر كبير و من تشابه المثلثات الاضلاع المتقابلة متناسبة لذا فإن :

العلاقة الساندة بين المتغيرات $\frac{r}{8} = \frac{h}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h$ ..... (1)

لدينا معدل تغير الحجم لذا فالعلاقة الرئيسية $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

نعوض قيمة $r = \frac{1}{3}h$: فتصبح العلاقة :

(نشتق ونعوض معلومات السؤال) $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{9}h^2\right)h \Rightarrow V = \frac{1}{27}\pi h^3$

$$\frac{dv}{dt} = 3\left(\frac{1}{27}\right)\pi h^2\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$4 = \pi\left(\frac{1}{9}\right)(12)^2\left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow 4 = \pi\left(\frac{144}{9}\right)\frac{dh}{dt}$$

$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}$ cm / s معدل تغير عمق السائل

مثال 6 الكتاب لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ حيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7 , 0)$ يساوي (0.2 unit / s) أوجد المعدل الزمني لتغير احداثيها السيني عندما يكون $x = 4$.

الحل لنفرض البعد بين النقطتين S فإن معدل التغير في البعد هو $\frac{ds}{dt} = 0.2$ والمعدل لتغير الاحداثي السيني $\frac{dx}{dt}$

ولنفرض ان احداثي النقطة $M (x , y)$ لذا يمكن ايجاد البعد بينها وبين النقطة $(7 , 0)$ حسب قانون البعد بين نقطتين حيث :

$$S = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2} \qquad (y^2 = 4x$$ نعوض من السؤال قيمة :)

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Rightarrow 0.2 = \frac{[2(4) - 10]}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-1}{5} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -1 \text{ unit/ s}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2000 الدور الثاني اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 0.5 cm / s بحيث يبقى حجمها ثابتا ويساوي $320 \pi \text{ cm}^3$ فأوجد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع 5 cm .

كذلك وزاري 2003 الدور الثاني و2006 تمهيدي

الحل لدينا الحجم ثابت ولنفرضه $V = 320 \pi$

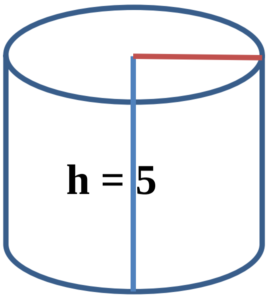
ولنفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$ لذا معدل تغير الارتفاع $\frac{dh}{dt} = 0.5$

ونصف قطر قاعدتها $= r$ لذا معدل تغير نصف قطر القاعدة هو المطلوب $\frac{dr}{dt}$

$V = \pi r^2 h$ (نعوض المعلومات من السؤال لإيجاد قيمة نصف القطر عندما الارتفاع $= 5$)

$$320 \pi = \pi r^2 (5) \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$$

$V = \pi r^2 h$ العلاقة الرئيسية علاقة حجم الاسطوانة



$$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \left(\frac{dh}{dt} \right) + h \left[2 \pi r \left(\frac{dr}{dt} \right) \right]$$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

$$0 = \pi (64) (0 .5) + 5 \left[\pi 16 \left(\frac{dr}{dt} \right) \right] \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-\pi (64)(0 .5)}{80 \pi}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = \frac{-2}{5} \text{ cm / s}$$

وزاري 1997 الدور الاول

سيارة تسير بسرعة 30 m / s ، اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها 3m عن سطح الارض ، وبعد ان ابتعدت عن عمود الاشارة مسافة $3\sqrt{3}$ m اصطدمت بسيارة اخرى فأوجد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية . (تلميح استخدم فيثاغورس ، ج: $15\sqrt{3}$ m /s) واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2009 الدور الاول

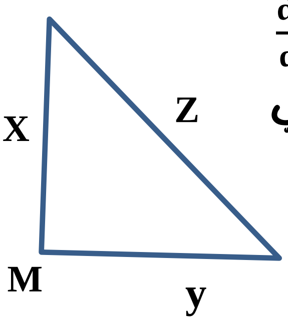
طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة M ، تحركت سيارتان من M كل منها في طريق الأولى معدل سرعتها (80 Km / h) و الثانية بمعدل (60 Km/h) فأوجد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة .

الحل

اذا فرضنا أن بعد السيارة الأولى عن M = x فإن معدل تغير سرعتها هو $\frac{dx}{dt} = 80$

ولنفرض إن بعد السيارة الثانية عن M = y فإن معدل تغير سرعتها هو $\frac{dy}{dt} = 60$

و لنفرض البعد بين السيارتين = Z فإن معدل الابتعاد بين السيارتين $\frac{dz}{dt}$ هو المطلوب



∵ الازاحة = السرعة (الزمن)

∴ الازاحة بالنسبة للسيارة الأولى : $x = 80\left(\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow x = 20$ km

∴ الازاحة بالنسبة للسيارة الثانية : $y = 60\left(\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow y = 15$ km

العلاقة الرئيسية مبرهنة فيثاغورس) $Z^2 = x^2 + y^2$

نعوض كل من: x = 20 , y = 15 لإيجاد Z

$$\therefore Z^2 = 400 + 225 \Longrightarrow Z^2 = 625 \Longrightarrow Z = 25 \text{ km}$$

نشتق ونعوض معلومات السؤال) $Z^2 = x^2 + y^2$

$$\left[\, 2Z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \,\right] \div 2$$

$$Z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$25\frac{dz}{dt} = 20(80) + 15(60)$$

$$25\frac{dz}{dt} = 1600 + 900 \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25} = 100 \text{ km / h}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2007 الدور الاول

صندوق على شكل متوازي السطوح المستطيلة قاعدته مربعة فاذا كان ارتفاعه يساوي ضعف طول قاعدته فأوجد معدل التغير في مساحته الكلية اذا كان طول ضلعه 8 cm والتغير في طول ضلعه $\frac{1}{2}$ cm / s . (ج/ 80) واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

خارجي

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ثلاث امثال طول قطرها إذا كان التغير في حجمها $21.6\,\pi$ cm^3 / s ومعدل التغير في نصف قطر قاعدتها 0.3 cm / s فأوجد طول نصف قطرها ؟ (ج/ 2) واجب

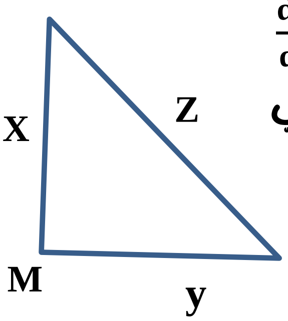
مثال خارجي على شارعين متعامدين انطلقت سيارتين كل واحدة في شارع من نقطة التقائهما سرعة الاولى 15 km / h والثانية 20 km / h فأوجد معدل التباعد بينهما بعد مرور ساعتين من موعد انطلاقهما .

الحل

اذا فرضنا أن بعد السيارة الأولى عن M = x فإن معدل تغير سرعتها هو $\frac{dx}{dt} = 15$

ولنفرض إن بعد السيارة الثانية عن M = y فإن معدل تغير سرعتها هو $\frac{dy}{dt} = 20$

و لنفرض البعد بين السيارتين = Z فإن معدل الابتعاد بين السيارتين $\frac{dz}{dt}$ هو المطلوب



∵ الإزاحة = السرعة (الزمن)

∴ الإزاحة بالنسبة للسيارة الأولى : $x = 15\,(2) \Rightarrow x = 30\ km$

∴ الإزاحة بالنسبة للسيارة الثانية : $y = 20\,(2) \Rightarrow y = 40\ km$

$Z^2 = x^2 + y^2$ (العلاقة الرئيسية مبرهنة فيثاغورس

نعوض كل من: $x = 30 , y = 40$ لإيجاد Z

$$\therefore Z^2 = 900 + 1600 \Rightarrow Z^2 = 2500 \Rightarrow Z = 50\ km$$

$Z^2 = x^2 + y^2$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

$$[\,2Z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\,] \div 2$$

$$Z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \Rightarrow 50\frac{dz}{dt} = 30\,(15) + 40\,(20)$$

$$50\frac{dz}{dt} = 450 + 800 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1250}{50} = 25\ km / h$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال يتساقط الرمل على الأرض فكون شكلا مخروطيا قائما ارتفاعه يساوي قطره فإذا علمت ان الرمل يتساقط بمعدل $(63\ \pi\ cm^3/s)$ فأوجد معدل التغير في ارتفاع الرمل عندما يكون الارتفاع يساوي (6 cm)

الحل

لنفرض إن حجم الرمل = V فإن معدل التغير في حجم الرمل $\frac{dV}{dt} = 63\ cm^3/s$

ولنفرض إن الارتفاع = h فإن معدل التغير في ارتفاع الرمل $\frac{dh}{dt}$ هو المطلوب

ولنفرض إن نصف القطر = r و لدينا ارتفاعه يساوي قطره أي : $\therefore h = 2r \Rightarrow r = \frac{h}{2}$ ..... (1)

$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h$ .... العلاقة الرئيسية نعوض فيها العلاقة السائدة

$V = \frac{1}{3}\pi\,(\frac{h^2}{4})\,h \Rightarrow V = \frac{1}{12}\pi\, h^3$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

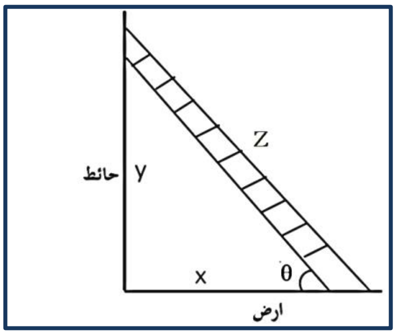
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\,(3\pi\, h^2)\frac{dh}{dt}$$

$$63\,\pi = \frac{1}{4}\,\pi(\,6)^2(\frac{dh}{dt}) \Rightarrow 63 = 9\,\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{63}{9} = 7\ m / s$$

تمارين (2 – 3)

س1 // سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل (2m/s) فأوجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي ($\frac{\pi}{3}$) .



لنفرض ان بعد الطرف الأسفل عن الحائط = x فمعدل انزلاقه $\frac{dx}{dt} = 2$

ولنفرض ان بعد الطرف الأعلى عن الأرض = y فمعدل انزلاقه $\frac{dy}{dt}$ هو المطلوب

ولنفرض ان طول السلم = Z حيث طوله ثابت

والعلاقة الرئيسية هنا علاقة فيثاغورس حيث $Z^2 = x^2 + y^2$

ولكن سنحتاج قيمة y وهي هنا من علاقة $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ حيث المقابل هو y والمجاور هو x والزاوية معلومة تساوي ($\frac{\pi}{3}$) لذا :

لماذا لم نعوض عن قيمة y قبل الاشتقاق لتسهيل المشتقة ؟؟؟؟

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3}\,x = y$

$Z^2 = x^2 + y^2$ ... . (نشتق العلاقة الرئيسية ونعوض معلومات السؤال)

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$[\,0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}\,] \div 2$$

$$0 = 2x + \sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2x}{\sqrt{3}\,x} \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\ \text{m / s}$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2 // عمود طوله (7.2 m) في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله (1.8 m) مبتعدا عن العمود وبسرعة (30 m /min) فأوجد معدل تغير طول ظل الرجل .

لو فرضنا بعد الرجل عن العمود = x فان معدل ابتعاده عن العمود هو $\frac{dx}{dt} = 30$

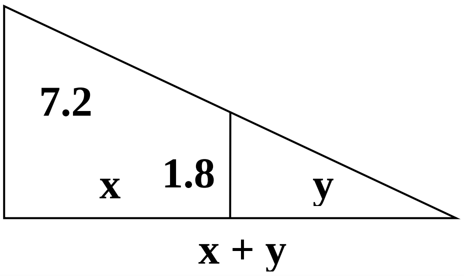
ولو فرضنا طول ظل الرجل = y فان معدل تغير طول ظله $\frac{dy}{dt}$ هو المطلوب

نلاحظ انه اصبح لدينا مثلثان متشابهان اضلاعهما متناسبة حيث (لاحظ الشكل) :

$\frac{1.8}{7.2} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$

$x + y = 4y \Rightarrow 3y = x$ (نشتق ونعوض معلومات السؤال

$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\frac{dy}{dt} = 30 \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dt} = 10$ m / min



س3// لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ فأوجد إحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(\frac{3}{2}\ ,\ 0)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M .

لنفرض البعد بين النقطتين S فإن معدل التغير في البعد هو $\frac{ds}{dt}$ والمعدل لتغير الاحداثي الصادي $\frac{dy}{dt}$ لذا فان

$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\ (\frac{dy}{dt})$ ولنفرض ان احداثي النقطة $M\ (x\ ,\ y)$ لذا يمكن ايجاد البعد بينها وبين النقطة $(\frac{3}{2}\ ,\ 0)$ حسب قانون البعد بين نقطتين حيث :

(لدينا من السؤال : $y = x^2$ ونشتق ونعوض المعلومات)

$$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{3}{2})^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow \therefore S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \Rightarrow [\ \frac{2}{3}\ (\frac{dy}{dt}) = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\ \frac{dy}{dt}\ \ ] \div \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \Rightarrow 2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3\ (y-1)$$ **بالتربيع**

$$4\ (y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9\ (y^2 - 2y\ + 1)$$

$$4\ y^2 - 8\ y + 9 = 9\ y^2 - 18\ y + 9$$

$$9y^2 - 4y^2 + 8y - 18\ y = 0 \Rightarrow 5\ y^2 - 10\ y = 0 \Rightarrow 5y\ (y-2) = 0$$

either $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ **تهمل $(0\ ,\ 0)$ النقطة ∴**

or $y = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}\ ,2)\ ,\ (-\sqrt{2}\ ,2)$ **النقاط ∴**

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4// أوجد النقاط التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t.

سنفرض ان احداثي النقطة $(x\ ,\ y)$

كذلك لدينا المعدل الزمني لتغير x هو $\frac{dx}{dt}$ يساوي المعدل الزمني لتغير y هو $\frac{dy}{dt}$

$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ ………… **نشتق العلاقة المعطاة ونعوض**

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$$

$[\ 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dx}{dt} = 0\ \ ] \div 2\frac{dx}{dt} \neq 0$ **نقسمه على**

$x\ + y\ + 2 - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 - x\ \dots\ (1)$ **علاقة بين المتغيرات تعوض في العلاقة المعطاة**

$$x^2 + (2-x)^2 + 4x - 8\ (2-x) = 108$$

$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x = 108$

$[\,2x^2 + 8x - 120 = 0\,] \div 2$

$x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$

either $x = -10 \Rightarrow y = 12$

or $x = 6 \Rightarrow y = -4$

∴ النقط هي : $(-10, 12), (6, -4)$

س5// متوازي السطوح المستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل (0.3cm/s) وارتفاعه يتناقص بمعدل (0.5 cm/s) أوجد معدل التغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة (4cm) والارتفاع (3cm) .

لنفرض ان طول ضلع القاعدة = x لذا فان معدل تغير طول الضلع هو $\frac{dx}{dt} = 0.3$

ولنفرض ان الارتفاع = h لذا فان معدل تغير الارتفاع هو $\frac{dh}{dt} = -0.5$

ولنفرض ان الحجم = V لذا فان معدل التغير في الحجم هو $\frac{dV}{dt}$ وهو المطلوب هنا

العلاقة التي يمكن ان نجد منها معدل التغير في الحجم هي حجم متوازي السطوح المستطيلة اي :

$V = x^2 h$ .... العلاقة الرئيسية

$$\frac{dV}{dt} = x^2\left(\frac{dh}{dt}\right) + h\left(2x\,\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = 16(-0.5) + 3\,(\,2(4)(\,0.3)\,)$$

$$\frac{dV}{dt} = -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$ معدل التغير في الحجم

∴ معدل التناقص في الحجم = $0.8\ cm^3/s$

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

قبل التطرق لمبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نحتاج التعرف على مفاهيم معينة كأساس لهاتين المبرهنتين وهي :

تعريف إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[\,a , b\,]$ فأن الدالة تأخذ قيمة :

1) عظمى عند (c) حيث $c \in (a , b)$ اذا وفقط اذا كانت صورتها لأي قيمة ضمن الفترة هي اصغر من صورة (c).

2) صغرى عند (c) حيث $c \in (a , b)$ اذا وفقط اذا كانت صورتها لأي قيمة ضمن الفترة هي اكبر من صورة (c) .

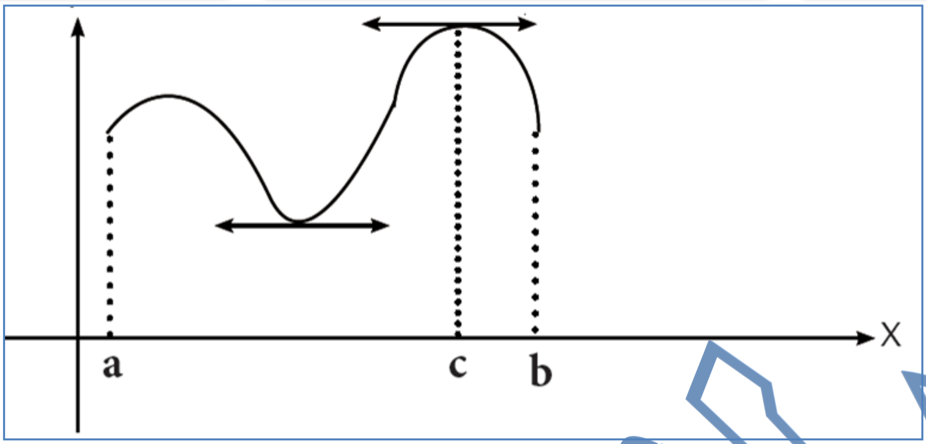
مبرهنة اذا كانت الدالة معرفة على الفترة المغلقة $[\,a , b\,]$ وكان :

للدالة قيمة عظمى أو صغرى عند (c) حيث $c \in (a , b)$ وان $f'(c)$ موجودة

فأن $f'(c) = 0$

* لاحظ انه عندما تكون مشتقة الدالة = صفر عند (c) فأن مماس الدالة عندها يوازي محور السينات .

لاحظ الشكل المجاور



المماس يوازي محور السينات ولما كان ميل محور السينات = (صفر) فأن المشتقة الأولى عند نقطة التماس تلك تساوي (صفر) أيضا لان للمستقيمات المتوازية الميل نفسه.

أي أن : ميل المماس = المشتقة الأولى

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

تعريف يسمى العدد $x = c$ الذي تكون عنده $f'(c) = 0$ أو عنده الدالة غير قابلة للاشتقاق بالعدد الحرج.

لذا يسمى c بالعدد الحرج والزوج المرتب الذي يمثل احداثي c وصورتها في الدالة $(c , f(c))$ بالنقطة الحرجة .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مبرهنة رول تستخدم هذه المبرهنة لإيجاد نقط تمثل النقاط الحرجة ضمن فترة محددة لدالة ما ، وتتلخص ويمكن معرفة ان مبرهنة رول تنطبق على دالة ما بالتحقق من الشروط الاتية:

1) التحقق من ان الدالة مستمرة في الفترة المغلقة المعطاة مثلا $[a , b]$.
2) التحقق من ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a , b) .
3) $f(a) = f(b)$ (صورة الدالة عند بداية الفترة يساوي صورتها عند نهاية الفترة).

وفي حال تحقق هذه الشروط الثلاثة يقال ان الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويمكن ايجاد قيمة واحدة على الاقل تنتمي للفترة (a , b) وتمثل نقطة حرجة للدالة أي : $f'(c) = 0$ حيث $c \in (a , b)$.

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة لإيجاد قيم (c) واحداثي النقاط الحرجة (ان طلبت) نتبع الخطوات الاتية (لاحظ الامثلة) :

1) نتحقق من ان الدالة تحقق شروط مبرهنة رول (اعلاه) على الفترة المعطاة (ان طلب ذلك في السؤال) .
2) نجد المشتقة الاولى للدالة .
3) نعوض c بدل كل x في المشتقة ونساوي المشتقة للصفر .
4) نجد قيم c ونلاحظ هل تنتمي للفترة المعطاة (تؤخذ فترة مفتوحة أي اطراف الفترة لا تؤخذ) .
5) في حال طلبت احداثيات النقطة نعوض قيمة c في الدالة الاصلية ونكتب النقطة $(c , f(c))$.

مثال الكتاب 2 بين هل إن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال ؟ وأوجد قيم c الممكنة :

1) $f(x) = (2-x)^2 \quad , \; x \in [0,4]$

الحل

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(4) = (2-4)2 = 4 \quad , \quad f(0) = (2-0)2 = 4$

$\therefore f(0) = f(4) = 4$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

نشتق المشتقة الاولى $f'(x) = 2(2-x)(-1) = -2(2-x)$

نعوض c بدل كل x في المشتقة ونساوي المشتقة للصفر ونجد قيم c $\therefore f'(c) = -2(2-c)$

$f'(c) = 0 \Rightarrow [-2(2-c) = 0] \div -2 \Rightarrow 2-c = 0 \Rightarrow \therefore c = 2 \in (0,4)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \quad , \; x \in [-1,1]$

وزاري

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(1) = 9+3-1 = 11 \quad , \quad f(-1) = -9+3+1 = -5$

$\therefore f(1) \neq f(-1)$

∴ الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يمكن ايجاد قيمة C الممكنة

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

الحل

$$3)\; f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \; x \in [-1,2] \\ -1 & , \; x \in [-4,-1) \end{cases}$$

أولا : نتحقق من استمرارية الدالة على الفترة $[-4,2]$ (فترة الدالة جزئت على دالتين اتحاد فترتيهما يعطي هذه الفترة) أي :

$$[-1,2] \cup [-4,-1) = [-4,2]$$

نتحقق من الاستمرارية فقط عند النقطة التي تغير فيها سلوك الدالة (شكل الدالة) وهي نقطة (الفجوة) أي عند $x = -1$ كون الدالة في اي عدد اخر مستمرة كونها كثيرة حدود على طرفي $x = -1$.

1) $f(-1) = 1 + 1 = 2$

2) $\lim_{x\to -1}(-1) = -1 = L_2$ الغاية من اليمين

$\lim_{x\to -1}(x^2+1) = 2 = L_1$ الغاية من اليسار

$\because L_1 \neq L_2$ ∴ الدالة غير مستمرة ضمن الفترة $[-4,-1)$

∴ لا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يمكن إيجاد قيم c التي تحقق مبرهنة رول .

الحل

4) $f(x) = k \quad , \quad k \in R \quad , [\, a , b \,]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\, a , b \,]$ لأنها دالة ثابتة .

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\, a , b \,)$ لأنها دالة ثابتة .

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(a) = k \quad , \quad f(b) = k$

$\therefore f(a) = f(b) = k$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

نشتق المشتقة الاولى $f^{/}(x) = 0 \Longrightarrow \therefore f^{/}(\, c \,) = 0$

لاحظ هنا ان c هي أي عدد يقع ضمن الفترة (a , b) كون الدالة هي خط مستقيم يوازي محور السينات .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال بين هل ان مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال ؟ وأوجد قيم c الممكنة :

1) $f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad x \in [\, 0 , 2 \,]$

الحل

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\, 0 , 2 \,]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\, 0 , 2 \,)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(0) = 0 - 2(0) = 0 \quad , \quad f(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

$\therefore f(0) = f(2) = 0$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

نشتق المشتقة الاولى $f^{/}(x) = 2x - 2$

نعوض c بدل كل x في المشتقة ونساوي المشتقة للصفر ونجد قيم c $\quad \therefore f^{/}(\, c \,) = 2c - 2$

$f^{/}(\, c \,) = 0 \Longrightarrow [\, 2c - 2 = 0 \,] \div 2 \Longrightarrow c - 1 = 0 \Longrightarrow \therefore c = 1 \in (\, 0 , 2 \,)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

واجب

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad , x \in [\, 1 , 3 \,]$

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 \quad , x \in [\, 0 , 6 \,]$

4) $f(x) = 3x - x^3 \quad , x \in [\, -2 , 2 \,]$

5) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x^3 \quad , x \in [\, 0 \, , \frac{1}{2} \,]$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , \quad x \in [\, -1 , 1 \,] \\ -3 & , \quad x \in [\, -2 , -1 \,) \end{cases}$

7) $f(x) = |x| \quad , \quad x \in [-2 \ , 2]$

الحل

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2 \ , 2]$

ثانيا : الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ لذا فهي غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2 \ , 2)$.

أي ان الشرط الثاني غير متحقق لذا فهي لا تحقق شروط مبرهنة رول.

(تعرف الطالب على الاستمرارية لدالة القيمة المطلقة وكذلك عدم قابليتها على الاشتقاق عند النقطة التي يتغير فيها شكل الدالة (الفجوة) كون المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار).

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة اذا ذكر في السؤال ان الدالة تحقق شروط مبرهنة رول يمكن الاستفادة منها ان صورتي الدالة على طرفي الفترة متساويان على طرفي الفترة اي نعوض طرفي الفترة في الدالة المعطاة ونساويهما ونجد قيمة الثابت المطلوب (لاحظ الامثلة الاتية).

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا علمت ان الدالة $f(x) = x^2 + hx - 1$ تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة $[0 , 3]$ فأوجد قيمة h ، ثم أوجد قيمة c الممكنة.

الحل الدالة تحقق شروط مبرهنة رول يمكن الاستفادة منها ان صورتي الدالة على طرفي الفترة متساويان على طرفي الفترة اي نعوض طرفي الفترة في الدالة المعطاة ونساويهما كما يأتي :

$f(0) = 0 + 0(h) - 1 = -1 \ , \ f(3) = 9 + 3h - 1$

$\because f(0) = f(3)$ كون الدالة تحقق مبرهنة رول

$\therefore 9 + 3h - 1 = -1 \Rightarrow 9 + 3h = 0 \Rightarrow 3h = -9 \Rightarrow h = -3$

$\therefore f(x) = x^2 - 3x - 1$

$f'(x) = 2x - 3$ والان نجد قيمة c الممكنة

$f'(c) = 2c - 3$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0 , 3)$

رحلة التفوق
في
السادس

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا علمت ان الدالة $f(x) = x^3 - hx^2$ تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة $[-1 , 2]$ فأوجد قيمة h ، ثم أوجد قيمة c الممكنة.

واجب

مثال إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 - 2$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[a , 1]$ أوجد قيمة a ثم أوجد قيمة c الممكنة

الحل الدالة تحقق شروط مبرهنة رول أي نساوي صورتي الدالة على طرفي الفترة .

$f(a) = a^2 - 2 \ , \ f(1) = 1 - 2 = -1$

$\because f(a) = f(1)$ كون الدالة تحقق مبرهنة رول

$a^2 - 2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ يهمل or $a = -1$

أي ان الفترة اصبحت $[-1 , 1]$ (حيث لا يمكن أن تكون الفترة $[1 , 1]$ لذا اهملنا قيمة $a = 1$)

$f'(x) = 2x$ والان نجد قيمة c الممكنة $\Rightarrow f'(c) = 2c$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-1 , 1)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x^3 - 3$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[0 , b]$ أوجد قيمة b ثم أوجد قيمة c الممكنة .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة في حال ذكر في السؤال دالة تحقق شروط مبرهنة رول واعطيت قيمة c الممكنة فإننا نشتق ونعوض في المشتقة عن قيمة c بقيمتها مع مساواة المشتقة للصفر ونجد قيمة الثابت المطلوب (لاحظ الامثلة الاتية) .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت الدالة $f(x) = 3x^2 - a x + 7$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0 , b]$ حيث $c = 2$ والتي تنتمي للفترة نفسها فأوجد قيمة كل من $a , b \in R$.

الحل (هنا اعطيت قيمة c الممكنة يمكن الاستفادة منها بأن نشتق ونعوض في المشتقة عن قيمة c بقيمتها مع مساواة المشتقة للصفر ونجد قيمة الثابت a).

$f'(x) = 6x - a \Rightarrow f'(c) = 6c - a \quad , \quad \because f'(c) = 0$ (كون الدالة تحقق مبرهنة رول)

$\therefore 6c - a = 0$ (نعوض عن قيمة $c = 2$ والتي اعطيت في السؤال)

$6(2) - a = 0 \Rightarrow 12 - a = 0 \Rightarrow a = 12$

أصبحت الان الدالة $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

الان صورتي الدالة على طرفي الفترة متساويان اي نعوض طرفي الفترة في الدالة المعطاة ونساويهما كما يأتي :

$f(0) = 0 - 0 + 7 = 7 \ , \ f(b) = 3b^2 - 12b + 7$

$\because f(0) = f(b)$ كون الدالة تحقق مبرهنة رول

$7 = 3b^2 - 12b + 7 \Rightarrow [\, 3b^2 - 12b = 0 \,] \div 3$

$b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b(b - 4) = 0 \Rightarrow b = 0$ تهمل or $b = 4$

أي ان الفترة اصبحت $[0 , 4]$ (حيث لا يمكن أن تكون الفترة $[0 , 0]$ لذا اهملنا قيمة $b = 0$)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت الدالة $f(x) = 5 + ax - 3x^2$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1 , b]$ حيث $c = \frac{1}{3}$ والتي تنتمي للفترة نفسها فأوجد قيمة كل من $a , b \in R$.

واجب

مبرهنة القيمة المتوسطة

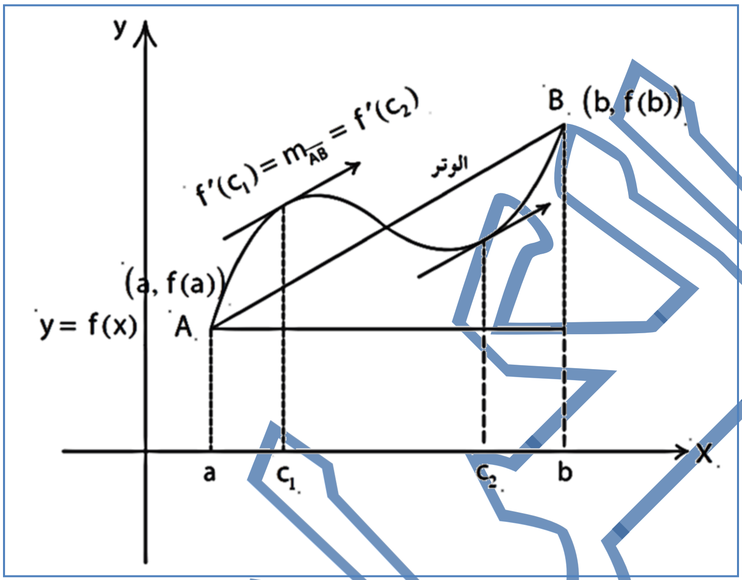
قبل التطرق الى هذه المبرهنة سنحتاج ان نذكر بعض المعلومات التي ستساعد في فهم اكثر ومنها :

1) قطعة المستقيم التي تصل بين نقطتين من نقاط منحني دالة ما تسمى وتر (لاحظ الشكل ادناه)

2) ميل الوتر يمكن إيجاده باستخدام النقطتين حسب العلاقة $\mathrm{m}\ \mathrm{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

3) نعلم ان المشتقة الاولى للدالة تمثل ميل المماس عند ايه نقطة لذا يمكن ايجاد ميل المماس عند نقطة لمنحني بان نشتق المشتقة الاولى للدالة عند تلك النقطة أي $f^{/}(c)$.

4) نعلم ان لكل مستقيمين متوازيين الميل نفسه لذا اذا كان مثلا المماس لدالة يوازي وترا فيها فان ميلاهما متساويان أي أن $f^{/}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ الاستنتاج الذي توصلنا اليه هو نفس الاستنتاج الذي توصلت اليه مبرهنة القيمة المتوسطة كما سنلاحظ من خلال التعريف ادناه والغاية منها انه يمكن ايجاد قيمة $x = c$ التي عندها يوجد مستقيم يمس الدالة وميله = ميل الوتر على فترة محددة.



* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

تعريف إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة المغلقة [a , b] وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b) فأنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي إلى (a , b) وتحقق : $f^{/}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

أو : $f(b) - f(a) = f^{/}(c)\,(b - a)$ (أي أن ميل المماس = ميل الوتر)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

لاحظ أن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة حيث اذا كان ميل الوتر صفرا كون $f(b) = f(a)$ (وهو الشرط الثالث من شروط مبرهنة رول)

وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة فان : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0$

وهي مبرهنة رول $f^{/}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f^{/}(c) = 0$

أي ان الوتر والماس كلاهما يوازيان محور السينات لذا فإن ميلاهما = صفر

اي بصورة عامة كل سؤال يحقق مبرهنة رول يمكن ان يحل باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

ملاحظة يمكن التحقق من ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة و نجد قيم c اذا حققت الشروط الاتية :

1) التحقق من ان الدالة مستمرة في الفترة المغلقة المعطاة مثلا [a , b] .

2) التحقق من ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a , b) .

3) نجد ميل المماس حيث نجد مشتقة الدالة ونعوض بدل كل x بـ c أي نجد $f'(c)$.

4) نجد ميل الوتر بان نجد صور حدود الفترة المعطاة $f(a), f(b)$ ثم نعوض في العلاقة : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5) نساوي الميلان (ميل المماس = ميل الوتر) ونجد قيم c .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 3 برهن أن الدوال الآتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة و أوجد قيم c :

1) $f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad , x \in [-1, 7]$

الحل

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 1 , 7] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 1 , 7) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(-1) = 1 - 6(-1) + 4 = 11 \quad , \quad f(7) = 7^2 - 6(7) + 4 = 11$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6$ (ميل المماس

نجد ميل الوتر $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)} = \frac{11-11}{8} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر $\therefore f'(c) = m \Rightarrow 2c - 6 = 0 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad , \quad x \in [-4, 0]$

الحل

أولا : لأثبات ان الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 4 , 0]

أ) اثبات الاستمرارية $(-4, 0)$ $\forall a \in$ حيث :

** مجال الدالة يمكن ايجاده للدالة الجذرية بجعل داخل الجذر اكبر او يساوي صفر ونحل المتباينة.

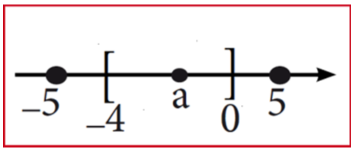
$$25 - x^2 \ge 0 \Rightarrow 25 \ge x^2$$

$$\therefore -5 \le x \le 5$$

1) $f(a) = \sqrt{25 - a^2} \in R$ (a ضمن مجال الدالة)

2) $\lim_{x \to a} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - a^2}$

3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$



ب) اثبات ان الدالة مستمرة على يمين (– 4) حيث :

اضافة الاشارة الصغيرة اعلى العدد في الغاية + للدالة على اليمين و – للدالة على اليسار كما تعلمت في الصف الخامس العلمي .

1) $f(-4) = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

2) $\lim_{x\to -4^{+}} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

3) $f(-4) = \lim_{x\to -4^{+}} f(x)$

ت) اثبات ان الدالة مستمرة على يسار (0) حيث :

1) $f(0) = \sqrt{25-0} = \sqrt{25} = 5$

2) $\lim_{x\to 0^{-}} \sqrt{25-x^2} == \sqrt{25-0} = \sqrt{25} = 5$

3) $f(0) = \lim_{x\to 0^{-}} f(x)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 4 , 0]

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 4 , 0) لان هذه الفترة هي مجموعة جزئية من مجال الدالة [– 5 , 5] (الدالة قابلة للاشتقاق في مجالها على الفترة (– 5 , 5))

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(0) = 5$, $f(-4) = 3$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس $f'(c)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(25-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ميل الوتر

$m = f'(x)$ ميل المماس = ميل الوتر أي

$\frac{1}{2} = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} \Rightarrow \sqrt{25-c^2} = -2c$ نربع الطرفين

$$25 - c^2 = 4c^2 \Rightarrow 25 = 5c^2 \Rightarrow c^2 = 5$$

$\therefore c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$ or $c = \sqrt{5} \notin (-4, 0)$

رحلة التفوق
في
السادس

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال برهن أن الدوال الآتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة و أوجد قيم c :

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x \in [4, 7]$

2) $f(x) = 2x^3 - 9x$, $x \in [-2, 1]$

واجب يحتاج حل؟!

3) $f(x) = \frac{x^3}{3}$, [– 1 , 2]

الحل

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [–1 , 2] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 1 , 2) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3}$, $f(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس : $f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f'(c) = c^2$

ميل الوتر : $m = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{\frac{8}{3}+\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{9}{3}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore c^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 2)$ or $c = -1 \notin (-1, 2)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة

(في الدالة الكسرية تكون غير مستمرة عند القيمة التي تجعل المقام = صفر لذا نجد هذه القيمة ونلاحظ اذا تنتمي الى الفترة المعطاة فالدالة غير مستمرة على هذه الفترة ولا تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة أما اذا كانت خارج الفترة فتعتبر مستمرة ضمن الفترة المعطاة .)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) $f(x) = \frac{5}{2-3x}$, [– 3 , 2]

الحل

أولا : لنتحقق من الاستمرارية على [– 3 , 2] (نجد القيمة التي تجعل المقام = صفر)

$$2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in [-3, 2]$$

∴ الدالة غير مستمرة و لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة .

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

5) $f(x) = \frac{1}{3x-4}$, [– 1 , 3]

6) $f(x) = \frac{3}{x}$, x ∈ [1 , 3]

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة

في حال ذكر في السؤال الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند c يمكن الافادة منها بتحقق الشرط الثالث اي ميل المماس = ميل الوتر مع التعويض عن قيمة c التي لدينا لإيجاد قيمة الثابت المجهول .

مثال الكتاب 4 إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$, $f : [\, 0 , b \,] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فأوجد قيمة $b \in R$.

الحل لكون الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لذا فإن ميل المماس = ميل الوتر عند $c = \frac{2}{3}$ لذا نجد كل منهما ونعوض حيث :

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 8c$$

$$m = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} = b^2 - 4b$$

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$$\therefore 3c^2 - 8c = b^2 - 4b \qquad (\text{نعوض قيمة } c = \tfrac{2}{3})$$

$$3\left(\frac{4}{9}\right) - 8\left(\frac{2}{3}\right) = b^2 - 4b \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = b^2 - 4b$$

$$\frac{-12}{3} = b^2 - 4b \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$, $f : [\, -1 , b \,] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند c = 2 فأوجد قيمة $b \in R$.

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة في الفترة $[\, a , b \,]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(\, a , b \,)$ ولنفرض أن : $b - a = h \ldots(1)$ حيث $h \in R , h \neq 0$ (h يمثل طول الفترة $[\, a , b \,]$)

$$\therefore b = a + h \ldots\ldots(2)$$

ولدينا من المبرهنة أن ميل المماس = ميل الوتر اي :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بتعويض العلاقة 1 و 2 نحصل على
$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\therefore f(a + h) \simeq f(a) + h\, f'(c)$$

وكلما كان طول الفترة h صغيرا اصبح طول الوتر صغيرا جدا أي كأن الوتر يبدأ وينتهي من نفس النقطة و المماس عند c سيكون مماسا للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة $x = a$ ولذلك سنعوض a بدل c فيصبح القانون :

$$\boxed{f(a + h) \simeq f(a) + h\, f'(a)}$$

ويقال للمقدار $h\, f'(c)$ (التغير التقريبي للدالة).

التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

من اهم استخدامات هذه النتيجة هو استخدامها في ايجاد قيم لمجاهيل في مختلف التطبيقات بصورة تقريبية وبخطوات بسيطة وهي :

1) نحدد القيمة المراد احتسابها بصورة تقريبية ويرمز لها b .

2) نكون دالة من السؤال (ان لم تكن موجودة) بوضع x بدل القيمة المراد احتسابها .

3) نختار قيمة (عدد) يمكن ايجاد ناتجه مباشرة اذا عوض في الدالة و يرمز لها a .

4) نجد قيمة $h = b - a$.

5) نجد كل من $f(a)$ و $f'(x)$ ومنها نعوض لنجد $f'(a)$ ثم نعوض في العلاقة :

$$f (a + h) \simeq f (a) + h f'(a)$$

6) ونبسط لإيجاد الناتج (لاحظ أن $f (a + h) = f (b)$) والان تابع الامثلة ادناه :

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 4 أوجد ناتج $\sqrt{26}$ بصورة تقريبية ومقربا إلى ثلاثة مراتب عشرية على الاقل

الحل

$b = 26$
$a = 25$
$h = b - a$
$\therefore h = 1$

$f (x) = \sqrt{x}$ (لا نستطيع ايجاد قيمة الجذر مباشرة لذا كوننا دالة)

$f (a) = \sqrt{25} = 5$ (نجد الصورة المباشرة للعدد الذي اخترناه)

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0.1$ (نشتق ونعوض)

$\therefore f(b) = f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a) = 5 + 1 (0.1) = 5.1$ (نعوض ونجد الناتج)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 6 إذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فأوجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل

$b = 1.001$
$a = 1$
$h = b - a$
$h = 0.001$

$f(a) = f(1) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$
$f'(a) = f'(1) = 3 + 6 + 4 = 13$
$\therefore f(1.001) = f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a) = 13 + (0.001)(13) = 13.013$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال واجب إذا علمت أن $f(x) = 3x + 2x^3$ أوجد وبصورة تقريبية $f(2.02)$

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 10 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة اوجد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية على الاقل لكل مما يأتي:

الحل

$b = 0.98$
$a = 1$
$h = b - a$
$h = -0.02$

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$ (نكون دالة)

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$ (نعوض في دالة)

$f(1) = \sqrt[5]{1^3} + 1 + 3 = 5$

$f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{-2}{5}} + 4x^3$ (نشتق الدالة)

$f^{/}(1) = \frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}} + 4\,(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{23}{5} \simeq 4.6$ (نعوض في المشتقة)

$\therefore f(0.98) = f(a + h) \simeq f(a) + h\,f^{/}(a)$

$\simeq 5 + (-0.02)\,(4.6) = 5 - 0.092 = 4.908$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $\sqrt[3]{7.8}$

وزاري 2011 الدور الاول

الحل

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ (نكون دالة

$f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$ (نعوض في دالة

$f^{/}(x) = \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (نشتق الدالة)

$f^{/}(8) = \frac{1}{2\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} \simeq 0.083$ (نعوض في المشتقة

$\therefore f(7.8) = f(a + h) \simeq f(a) + h\,f^{/}(a) = 2 + (-0.2)\,(0.083) = 2 - 0.0166 = 1.983$

$b = 7.8$
$a = 8$
$h = b - a$
$h = -0.2$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

الحل

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$ (نكون دالة

$f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 6$ (نعوض في دالة

$f^{/}(x) = \frac{1}{2}\ x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}\ x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ (نشتق الدالة)

$f^{/}(16) = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32} \simeq 0.156$ (نعوض في المشتقة

$\therefore f(17) = f(a + h) \simeq f(a) + h\,f^{/}(a) = 6 + 1\,(0.156) = 6.156$

$b = 17$
$a = 16$
$h = b - a$
$h = 1$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

وزاري 2004 الدور الاول

الحل

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ (نكون دالة

$f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$ (نعوض في دالة

$f^{/}(x) = \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}}$ (نشتق الدالة)

$f^{/}(0.125) = \frac{1}{3}(0.125)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}(0.5)^{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \simeq 1.333$

$\therefore f(0.12) = f(a + h) \simeq f(a) + h\,f^{/}(a) \simeq 0.5 + (-0.005)\,(1.333)$

$= 0.5 - 0.006665 \simeq 0.493$

$b = 0.120$
$a = 0.125$
$h = b - a$
$h = -0.005$

ملاحظة عند طلب مقدار تغير في الدالة او كان هنالك دلالة على تغير في الحجم او الارتفاع او نصف القطر . . . . وغيرها يقصد ان المطلوب هو فقط ايجاد $h\,f^{/}(a)$ لاحظ الامثلة الاتية .....

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 8 لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة .

الحل

b = 8.06
a = 8
h = b – a
h = 0.06

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f^{/}(x) = \frac{2}{3}\, x^{\frac{-1}{3}}$$ (نشتق الدالة)

$$f^{/}(8) = \frac{2}{3}\,(8)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}\,(2^3)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}\,(2)^{-1} = \frac{1}{3}$$ (نعوض في المشتقة

$$\therefore h\,f^{/}(a) = h\,f^{/}(8) = (\,0.06)\,(\,\frac{1}{3}\,) = 0.02$$ التغير التقريبي

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 9 يراد طلاء مكعب طول ضلعه (حرفه) 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm فأوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل) عند طلاء المكعب ينتج مكعب جديد حجمه = حجم المكعب الاصلي + حجم الطلاء

وبما ان المطلوب حجم الطلاء فانه يمثل تغير في الحجم اي المطلوب هو $h\,f^{/}(a)$ (

**حجم المكعب = مكعب طول حرفه أي :

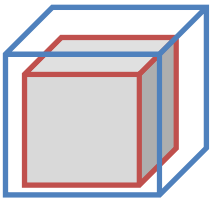
b = 10.3
a = 10
h = b – a
h = 0.3

$$f(x) = x^3$$

$$f^{/}(x) = 3\,x^2$$

$$f^{/}(a) = f^{/}(10) = 300$$

$$\therefore h\,f^{/}(a) \simeq (\,0.3)(300) = 90\ cm^3$$ حجم الطلاء بصورة تقريبية



طول حرف المكعب
الاصلي 10
طول حرف المكعب بعد
الصبغ
10+2(0.15) =10.3

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1996 الدور الاول مكعب حجمه $26\ cm^3$ أوجد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة طول ضلعة بصورة تقريبية .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2007 الدور الاول أوجد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة طول ضلع مربع مساحته $101\ m^2$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2010 الدور الاول أوجد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة $\sqrt[4]{82}$

واجب

مثال كرة حجمها ($37\frac{1}{3}\pi\ cm^3$) أوجد بصورة تقريبية طول قطرها باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل (نستخدم قانون حجم الكرة لإيجاد نصف القطر ثم نجد نصف القطر بالجذر ولكن سنواجه مشكلة ان الجذر لعدد ليس له جذر مباشر لذا نحتاج الى التقريب)

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow 37\frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{\frac{112}{3}(3)}{4} \Longrightarrow r^3 = \frac{112}{4} \Longrightarrow r^3 = 28$$

$$\therefore r = \sqrt[3]{28}$$

b = 28
a = 27
h = b – a
h = 1

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a) = f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ (نشتق الدالة

$$f'(8) = \frac{1}{3}(27)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}(3)^{-2}$$

$= \frac{1}{3(9)} = \frac{1}{27} \simeq 0.03$ (بالتعويض في المشتقة)

$$f(b) = f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a)$$

$\simeq 3 + (1)(0.03) = 3.03\ cm$ نصف القطر بصورة تقريبية

∴ طول قطرها بصورة تقريبية هو : $3.03(2) = 6.06\ cm$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال جهاز كهربائي على شكل مكعب طول ضلعه (30 cm) مغلف بصندوق خشب سمكه (0.8 cm) أوجد وبصورة تقريبية حجم الخشب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها $= 6\ cm$ وحجمها ($282\ \pi\ cm^3$) أوجد بصورة تقريبية طول نصف قطر قاعدتها .

واجب

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي ثلاث امثال نصف قطر قاعدته فإذا كان نصف قطر قاعدته 3.02cm ، فأوجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة .

واجب

تمارين (3 – 3)

س1 // أوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي:

a) $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-3 , 3]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 3 , 3] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 3 , 3) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة :

$$f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0 \quad , \quad f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$$

$$\therefore f(-3) = f(3) = 0$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(c) = 3c^2 - 9 \Rightarrow 3c^2 - 9 = 0$$

$$3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3$$

$$\therefore c = \sqrt{3} \in (-3 , 3) \text{ or } c = -\sqrt{3} \in (-3 , 3)$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad , \quad [\frac{1}{2} , 2]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\frac{1}{2} , 2]$ **لان** $0 \notin [\frac{1}{2} , 2]$ **(كونها دالة كسرية)**

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2} , 2)$ **لان** $0 \notin (\frac{1}{2} , 2)$ **(كونها دالة كسرية)**

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة :

$$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + \frac{2}{(\frac{1}{2})} = 1 + 4 = 5 \quad , \quad f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

$$\therefore f(\frac{1}{2}) = f(2) = 5$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$f(x) = 2x + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0$$

$$2 = \frac{2}{c^2} \Rightarrow c^2 = 1$$

$$\therefore c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2) \text{ or } c = -1 \notin (\frac{1}{2}, 2)$$

c) $f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad , \quad [- 1 , 1]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[- 1 , 1]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $(- 1 , 1)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$f(- 1) = ((- 1)^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = 4 \quad , \quad f(1) = ((1)^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = 4$$

$$\therefore f(- 1) = f(1) = 4$$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$f'(x) = 2 (x^2 - 3)(2x) \Longrightarrow f'(x) = 4 x (x^2 - 3)$$

$$f'(c) = 4 c (c^2 - 3) \Longrightarrow 4c (c^2 - 3) = 0$$

$$\therefore c = 0 \in (- 1 , 1) \quad or \quad c^2 - 3 = 0 \Longrightarrow c^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3} \notin (- 1 , 1) \quad or \quad c = -\sqrt{3} \notin (- 1 , 1)$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2// اوجد تقريباً لكل مما يأتي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$f (a) = f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[4]{64} = 8 + 4 = 12$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(a) = f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{4}{48} \simeq 0.083$$

$$\therefore f(b) = f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a) = 12 + (- 1)(0.083)$$

$$= 12 - 0.083 = 11.917$$

$b = 63$
$a = 64$
$h = b - a$
$h = -1$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

$$f(x) = x^3 + 3x^4$$

$$f(a) = f(1) = 1 + 3(1) = 4$$

$$f'(x) = 3 x^2 + 12 x^3$$

$$f'(a) = f'(1) = 3 + 12 = 15$$

$$\therefore f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a) = 4 + (0.04) (15)$$

$$= 4 + 0.6 = 4.6$$

$b = 1.04$
$a = 1$
$h = b - a$
$h = 0.04$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$f\ (a) = f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

$f(x) = x^{\frac{-1}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{-1}{3} x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$f^{/}(a) = f^{/}(8) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{48}$

$\therefore f(b) = f(\ a + h\ ) \simeq f(a) + h\ \ f^{/}(a) = \frac{1}{2} + (1)(\frac{-1}{48})$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{24-1}{48} = \frac{23}{48} = 0.479$

b = 9
a = 8
h = b – a
h = 1

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $\frac{1}{101}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(a) = f\,(100) = \frac{1}{100} = 0.01$

$f^{/}(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f^{/}(a) = f^{/}(100) = \frac{-1}{10000} = -\,0.0001$

$\therefore f\,(b) = f(\ a + h\ ) \simeq f(a) + h\ f^{/}(a)\ \ = 0.01 + 1\ (-\,0.0001\ )$

$= 0.01 - 0.0001 = 0.0099$

b = 101
a = 100
h = b – a
h = 1

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = f\,(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f^{/}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f^{/}(a) = f^{/}\ (0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} \simeq 0.71$

$\therefore f(b) = f(\ a + h\ ) \simeq f(a) + h\ f^{/}\ (a) = 0.7 + (\ 0.01)(\ 0.71)$

$= 0.7 + 0.0071 = 0.7071$

b = 0.50
a = 0.49
h = b – a
h = 0.01

س3 // كرة نصف قطرها 6 cm طليت بطلاء سمكه 0.1 cm أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

لاحظ ان حجم الطلاء يمثل تغير في الحجم

b = 6.1
a = 6
h = b – a
h = 0.1

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$v' = 4 r^2 \pi$$

$$v'(a) = v'(6) = 4\,(6)^2\pi = 144\,\pi$$

$\therefore h\,v'(a) \simeq (0.1)\,(144\pi) = 14.4\,\pi\ cm^3$ حجم الطلاء تقريبا

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4 // كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ أوجد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 84\,\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{84\,\pi(3)}{4\pi} \Rightarrow r^3 = 63 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f(a) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{48} \simeq 0.02$$

b = 63
a = 64
h = b – a
h = –1

$$\therefore f(b) = f(\,a + h\,) \simeq f(a) + h\,f'(a) = 4 + (–1)(\,0.02)$$

$$= 4 – 0.02 = 3.98\ cm$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س5 // مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm ، فأوجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة أو نتيجتها .

$$v = \frac{1}{3} r^2 h\,\pi \qquad \because 2r = h \Rightarrow r = \frac{h}{2}\ \ldots\ldots(1)$$

$$v = \frac{1}{12}\pi h^3$$

$$v = \frac{1}{12}\pi h^3$$

$$v(3) = \frac{1}{12}\pi\,(27) = \frac{9}{4}\ \pi = 2.25\,\pi$$

$$v' = \frac{1}{2}\ \pi(3x^2) = \frac{1}{4}\ \pi\,x^2$$

$$v'(3) = \frac{1}{4}\ \pi(3)^2 = \frac{9}{4}\pi = 2.25\,\pi$$

b = 2.98
a = 3
h = b – a
h = – 0.02

$$\therefore v(b) = f(\,a + h\,) \simeq f(a) + h\ \ f'(a) = 2.25\,\pi + (\,– 0.02)\,(2.25\pi)$$

$$= 2.250\,\pi\ – 0.045\,\pi = 2.205\,\pi$$

س6 // بين إن كل دالة من الدوال الاتية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم أوجد قيمة c :

a) $f(x) = (x-1)^4 \quad , [-1 , 3]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 1 , 3] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 1 , 3) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$f(-1) = (-1-1)^4 = 16 \quad , \quad f(3) = (3-1)^4 = 16$$

$$\therefore f(-1) = f(1) = 16$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$f'(x) = 4(x-1)^3$$

$$f'(c) = 4(c-1)^3 \Rightarrow 4(c-1)^3 = 0 \Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

b) $h(x) = x^3 - x \quad , [-1 , 1]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 1 , 1] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 1 , 1) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$h(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0 \quad , \quad h(1) = (1)^3 - (1) = 0$$

$$\therefore h(-1) = h(1) = 0$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$h'(x) = 3x^2 - 1$$

$$h'(c) = 3c^2 - 1 \Rightarrow 3c^2 - 1 = 0$$

$$3c^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1 , 1) \quad \text{or} \quad c = \frac{-1}{\sqrt{3}} \in (-1 , 1)$$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $f(x) = x^2 - 3x \quad , [-1 , 4]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [– 1 , 4] لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (– 1 , 4) لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$f(-1) = 1 + 3 = 4 \quad , \quad f(1) = 16 - 12 = 4$$

$$\therefore f(-1) = f(1) = 4$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(c) = 2c - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1 , 4)$$

d) $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \quad , [\,0 , 2\pi\,]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\,0 , 2\pi\,]$ (من معلومات الصف الخامس العلمي)

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\,0 , 2\pi\,)$ (من معلومات الصف الخامس العلمي)

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$f(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2(1) = 3$

$f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2(1) = 3$

$\therefore f(0) = f(2\pi) = 3$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا سنجد قيمة c الممكنة من المشتقة حيث :

$f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x$

$f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c$

$[-2\sin 2c - 2\sin c = 0] \div (-2)$

$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$

$\sin 2c + \sin c = 0$

$2\sin c\cos c + \sin c = 0 \Longrightarrow \sin c\,(2\cos c + 1) = 0$

either $\sin c = 0 \Longrightarrow \therefore c = 0 \notin (0, 2\pi)$ <u>or</u> $c = \pi \in (0, 2\pi)$ <u>or</u> $c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$

or $2\cos c = -1 \Longrightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$ (الناتج سالب أي اما في الربع الثاني او الربع الثالث)

$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ الربع الثاني ، $c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ الربع الثالث

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س7 // أختبر إمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة ، وان تحققت أوجد قيم c الممكنة

a) $f(x) = x^3 - x - 1 \quad , [-1 , 2]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1 , 2]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1 , 2)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة $f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1 = -1 \;,\; f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ميل المماس : $f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow f'(c) = 3c^2 - 1$

ميل الوتر : $m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore 3c^2 - 1 = 2 \Longrightarrow c^2 = \frac{3}{3} \Longrightarrow c = 1 \in (-1, 2) \quad \text{or} \quad c = -1 \notin (-1, 2)$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad , [-1 , 5]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1 , 5]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1 , 5)$ لأنها كثيرة الحدود

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 10 \ , \ f(5) = 5^2 - 4(5) + 5 = 10$$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس : $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(c) = 2c - 4$

ميل الوتر : $m = \frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)} = \frac{10-10}{6} = \frac{0}{6} = 0$

$\therefore 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2 \in (-1 , 5)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

c) $f(x) = \frac{4}{x+2} \quad , [-1 , 2]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1 , 2]$ لأن $-2 \notin [-1 , 2]$ (كونها دالة كسرية)

ثانيا : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1 , 2)$ لأن $-2 \notin (-1 , 2)$ (كونها دالة كسرية)

ثالثا : نجد صور طرفي الفترة

$$f(-1) = \frac{4}{-1+2} = 4 \ , \ f(2) = \frac{4}{2+2} = 1$$

نجد كلا من ميل المماس $f'(c)$ و ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس $f(x) = 4(x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$

ميل الوتر : $m = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{1-4}{3} = -1$

بجذر الطرفين $\therefore \frac{-4}{(c+2)^2} = -1 \Rightarrow (c+2)^2 = 4$

either $c + 2 = 2 \Rightarrow c = 0 \in (-1 , 2)$ or $c + 2 = -2 \Rightarrow c = -4 \notin (-1 , 2)$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \quad , [-2 , 7]$

أولا : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2 , 7]$ لأن الدالة جذر تكعيبي (في الاستمرارية تعامل ككثيرة حدود)

ثانيا : الدالة غير قابلة للاشتقاق لان : (نشتق ونلاحظ هل القيم التي تجعل المقام صفر في المشتقة تنتمي ام لا للفترة المعطاة)

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in (-2 , 7)$$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق و لا يمكن تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة .

اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة

من اهم تطبيقات المشتقة هي استخدام المشتقة لبيان سلوك الدوال ومنها اختبار التزايد والتناقص للدالة اي يمكننا من خلال دراسة المشتقة التعرف على المناطق (الفترات) التي تكون فيها الدالة متزايدة وعلى المناطق (الفترات) التي تكون فيها الدالة متناقصة فلو كانت لدينا f دالة مستمرة على [a , b] وقابلة للاشتقاق على (a , b) وكانت $f^{/}(x) > 0 , \forall x \in (a , b)$ فيقال ان f متزايدة ضمن تلك الفترة وان كانت $f^{/}(x) < 0 , \forall x \in (a , b)$ فيقال ان f متناقصة ضمن تلك الفترة .

ملاحظة يمكن ايجاد مناطق التزايد والتناقص للدالة من خلال الخطوات الاتية :

1) نشتق الدالة المعطاة.
2) نساوي المشتقة للصفر .
3) نجد قيم x (ان امكن)
4) نضع قيم x التي حصلنا عليها على خط الاعداد لكي نختبر اشارة المشتقة قبل وبعد كل قيمة
5) يتم اختبار اشارة المشتقة بان نختار عدد قبل اول قيمة لـ x ونعوض في المشتقة الاولى ونلاحظ اشارة الناتج وتوضع على خط الاعداد في موقع الجهة التي اخذنا العدد منها .
6) يعاد الاختبار قبل وبعد كل قيم x وتوضع الاشارات التي حصلنا عليها على خط الاعداد
7) كل منطقة موجبة الاشارة تمثل منطقة تزايد وكل منطقة سالبة الاشارة تمثل منطقة تناقص .

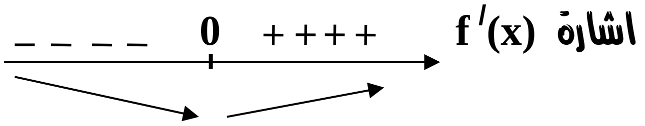
مثال الكتاب 1 لتكن $y = f(x) = x^2$ فأوجد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

$y = f(x) = x^2$

$y^{/} = 2 x$

$2 x = 0 \Longrightarrow x = 0$



مناطق التناقص : { x : x < 0 } و مناطق التزايد : { x : x > 0 }

مثال الكتاب 2 أوجد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين :

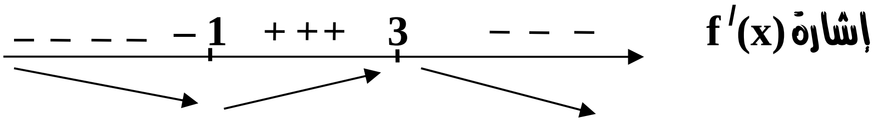
الحل

1) $f(x) = 9 x + 3x^2 - x^3$

$f^{/}(x) = 9 + 6x - 3 x^2 \Longrightarrow [9 + 6x - 3 x^2 = 0] \div 3 \Longrightarrow 3 + 2x - x^2 = 0$

$(3 - x) (1 + x) = 0$

$x = 3 \quad or\ x = - 1$



الدالة متزايدة في الفترة المفتوحة (–1 , 3) ، مناطق التناقص هي :{ x : x > 3 } , { x : x < – 1 }

المشتقة ≠ الصفر كون البسط خالي من المتغير لذا
نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا وهي هنا $x = 0$
ولكن كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال مشتقة الدالة

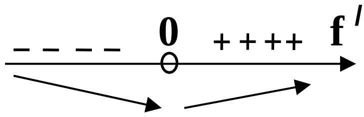
2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{3}\, x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$$

$\therefore$ المشتقة غير معرفة عند $x = 0$ ويسمى (كما قلنا سابقا) x عدد حرج   اشارة $f'(x)$



مناطق التزايد هي : $\{ x : x > 0 \}$ و مناطق التناقص هي : $\{ x : x < 0 \}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال أوجد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدوال الاتية :

1) $f(x) = 3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

f متزايدة ضمن مجالها لان المشتقة الاولى موجبة دائما

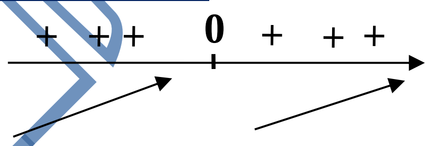
* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $f(x) = 3 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2 < 0$

f متناقصة ضمن مجالها لان المشتقة الاولى سالبة دائما

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com *ℜ * ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ*

3) $f(x) = 2x^3 + 9$
$f'(x) = 6x^2$
$6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$



مناطق التزايد : $\{ x : x > 0 \}$ ، $\{ x : x < 0 \}$ ولا توجد مناطق تناقص

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

4) $f(x) = 2(1 - 3x)^3$
5) $f(x) = (1 + x^2)^2$

واجب

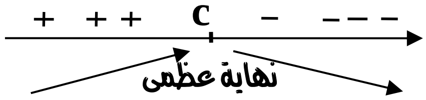
* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية

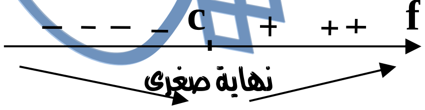
بعد ان أوجدنا مناطق التزايد والتناقص للدالة لاحظنا ان قيم $x = c$ لو عوضت في الدالة لنتج النقطة $(c , f(c))$ التي اختبرنا حولها سلوك الدالة كانت على عدة حالات وهي:

1) تقع بين تزايد ثم تناقص وتسمى نقطة نهاية عظمى محلية و $y = f(c)$ هي النهاية العظمى المحلية .

اشارة $f'(c)$



اشارة $f'(c)$



2) تقع بين تناقص ثم تزايد وتسمى نقطة نهاية صغرى محلية و $y = f(c)$ هي النهاية الصغرى المحلية .

3) اذا كانت الاشارة لا تتغير قبل وبعد $x = c$ فالنقطة $(c , f(c))$ نقطة حرجة (لا عظمى ولا صغرى).

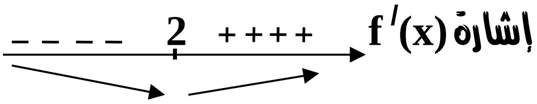
4) اذا كانت المشتقة ≠ الصفر لذا نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا ولكن كفجوة ومهما كانت الاشارة قبلها او بعدها تهمل ونأخذ منها مناطق التزايد والتناقص فقط (كما في مثال 2 اعلاه). (لاحظ الامثلة)

مثال الكتاب 2 أوجد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها اذا علمت إن :

الحل

1) $f(x) = 1 + (x-2)^2$

$f'(x) = 2(x-2) \Rightarrow 2(x-2) = 0\ ] \div 2$



$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في الدالة الاصلية (قبل الاشتقاق) لإيجاد احداثيات نقطة النهاية الصغرى المحلية :

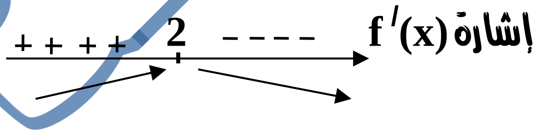
$\therefore f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1$ النهاية الصغرى المحلية $\Rightarrow$ (2, 1) نقطة النهاية الصغرى المحلية

كذلك لاحظ أن مناطق التزايد هي : $\{ x : x > 2 \}$ و مناطق التناقص هي : $\{ x : x < 2 \}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $f(x) = 1 - (x-2)^2$

$f'(x) = -2(x-2) \Rightarrow -2(x-2) = 0\ ] \div -2$



$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في الدالة الاصلية (قبل الاشتقاق) لإيجاد احداثيات نقطة النهاية العظمى المحلية :

$\therefore f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1$ النهاية العظمى المحلية $\Rightarrow$ (2, 1) نقطة النهاية العظمى المحلية

كذلك لاحظ أن مناطق التزايد هي : $\{ x : x < 2 \}$ و مناطق التناقص هي : $\{ x : x > 2 \}$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

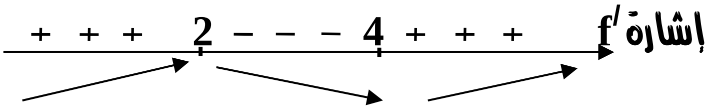
3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$[\ 3x^2 - 18x + 24 = 0\ ] \div 3$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = 4$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 20$



$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 16$

نقطة نهاية صغرى محلية (4 , 16) و نقطة نهاية عظمى محلية (2 , 20)

منطقتي التزايد : $\{ x : x > 4 \}$ ، $\{ x : x < 2 \}$ و مناطق التناقص هي الفترة المفتوحة (2 , 4)

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

واجبات اضافية

4) $f(x) = x^3 - 3x + 12$

5) $f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1$

6) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 1$

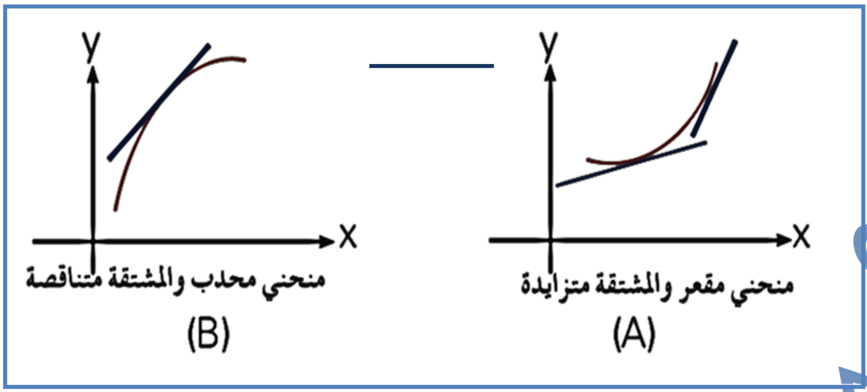
رحلة التفوق في السادس
عطاء بلا حدود
A. M. Z

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب

من التطبيقات الاخرى التي سنتطرق اليها هو علاقة المشتقة بتقعر وتحدب المنحنيات حيث يمكن الاستفادة من المشتقة الثانية في معرفة سلوك منحني الدالة ولتوضيح مفهوم التقعر للمنحنيات هو اتخاذها شكل مقوس للأسفل والتحدب تقوس للأعلى (لاحظ الاشكال ادناه)

** او المنحني مقعر في الفترة (a , b) إذا وفقط اذا كانت جميع مماسات المنحنى تحته (الشكل A)

** كذلك فالمنحني محدب في الفترة (a , b) إذا كانت جميع مماسات المنحني فوقه (الشكل B)



منحنى مقعر والمشتقة متزايدة (A)

منحنى محدب والمشتقة متناقصة (B)

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مبرهنة إذا كانت f معرفة في الفترة [a , b] ولها مشتقة أولى وثانية على الفترة (a , b) فإنها تكون مقعرة على الفترة (a , b) إذا تحقق الشرط الاتي :

$$f''(x) > 0 ,\forall x \in (a , b)$$

وتكون محدبة على الفترة (a , b) إذا تحقق الشرط :

$$f''(x) < 0 ,\forall x \in (a , b)$$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

ملاحظة وبصورة عامة يمكن التحقق من تقعر وتحدب الدالة من خلال الخطوات الاتية :

1) نجد المشتقة الثانية نساوي المشتقة للصفر و نجد قيم x (ان امكن).

2) نضع قيم x التي حصلنا عليها على خط الاعداد لكي نختبر اشارة المشتقة الثانية قبل وبعد كل قيمة.

3) يتم اختبار اشارة المشتقة الثانية بان نختار عدد قبل اول قيمة لـ x وتعوض في المشتقة الثانية ونلاحظ اشارة الناتج وتوضع على خط الاعداد في موقع الجهة التي اخذنا العدد منها .

4) يعاد الاختبار قبل وبعد كل قيم x وتوضع الاشارات التي حصلنا عليها على خط الاعداد .

5) كل منطقة موجبة الاشارة تمثل منطقة تقعر وكل منطقة سالبة الاشارة تمثل منطقة تحدب .

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 1 ادرس تقعر وتحدب كل من الدالتين :

a) $f(x) = x^2$

الحل

$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$

∴ الدالة مقعرة على مجالها كون المشتقة الثانية موجبة دائما.

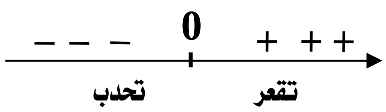
b) $f(x) = x^3$

الحل

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow f''(x) = 6x$

$6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

إشارة $f''(x)$



$\therefore f(0) = 3\,(0) = 0 \;\Rightarrow\; (\,0\,,\,0\,)$ نقطة انقلاب

نقطة الانقلاب من خلال المثال اعلاه لاحظنا ان قيمة x تفصل بين تحدب وتقعر وفي هذه الحالة تدعى النقطة بنقطة انقلاب كذلك اذا كانت تفصل بين تقعر و تحدب .

ملاحظة لإيجاد احداثيات نقط الانقلاب سنستخدم نفس خطوات اختبار التقعر والتحدب ثم نعوض قيم x (ان امكن وكانت تفصل بين اشارتين مختلفتين) في الدالة ثم نكتب النقطة .

مثال الكتاب 2 أوجد نقطة انقلاب للمنحني : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

الحل

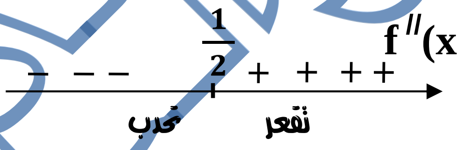
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 12x - 6$

$12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{-11}{2}$

إشارة $f''(x)$



مناطق التقعر هي: $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ و مناطق التحدب هي $\{x : x < \frac{1}{2}\}$

واحداثي نقطة انقلاب : $\therefore (\frac{1}{2}, \frac{-11}{2})$

مثال الكتاب 2 أوجد مناطق التحدب والتقعر و نقط الانقلاب ان وجدت للدوال الاتية :

الحل

a) $f(x) = 4x^3 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

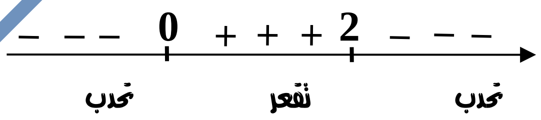
$[24x - 12x^2 = 0\,] \div 12$

$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 2$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ نقطة انقلاب

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 16 \Rightarrow (2, 16)$ نقطة انقلاب

إشارة $f''(x)$



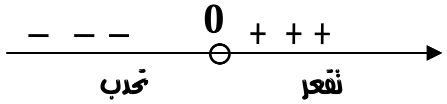
منطقة التقعر هي الفترة المفتوحة $(0, 2)$ و مناطق التحدب هي $\{x : x < 0\}$ ، $\{x : x > 2\}$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

$f(x) = x + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$\frac{2}{x^3} \neq 0$

إشارة $f''(x)$



المشتقة الثانية غير معرفة عند $x = 0$ لذا لا توجد نقط انقلاب لان $(x = 0)$ لا تنمي الى مجال الدالة.

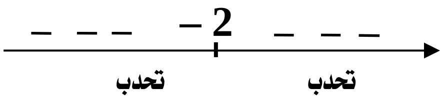
منطقة التقعر هي : $\{x : x > 0\}$ و منطقة التحدب هي : $\{x : x < 0\}$

c) $h(x) = 4 - (x + 2)^4$

$h'(x) = -4(x + 2)^3 \Rightarrow h''(x) = -12(x + 2)^2$

$[-12(x + 2)^2 = 0] \div (-12)$

إشارة $h''(x)$



$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

لا توجد نقاط انقلاب ولا توجد مناطق تقعر مناطق التحدب هي : $\{x : x < -2\}$ ، $\{x : x > -2\}$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

$f'(x) = -2 - 2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$

المشتقة الثانية سالبة اي ان الدالة محدبة ضمن مجالها و لا توجد نقط انقلاب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6 > 0$

المشتقة الثانية انتجت مجموع مربعين ومن المعلوم ان مجموع المربعين موجب دائما

لذا فالدالة مقعرة ولا توجد نقاط انقلاب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال واجب أوجد مناطق التحدب والتقعر و نقط الانقلاب ان وجدت للدوال الاتية :

1) $f(x) = x - 2x^3 + x^4$

2) $f(x) = 5x - 2x^{-3} \quad x \neq 0$

3) $f(x) = (2 - 3x)^4$

واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

اختبار المشتقة الثانية للنهايات العظمى والصغرى

كنا قد تطرقنا لطريقة ايجاد النهايات العظمى والصغرى من خلال اختبار إشارة $f'(x)$ على خط الأعداد ، وهنا سنعرض طريقة ثانية من خلال الاستعانة بالمشتقة الثانية و سنستخدم نفس خطوات الطريقة السابقة تقريبا حيث :

8) نشتق الدالة المعطاة.

9) نساوي المشتقة للصفر و نجد قيم x .

10) نجد المشتقة الثانية $f''(x)$.

11) نعوض قيم (x) التي اوجدناها من المشتقة الاولى في المشتقة الثانية وهنا توجد ثلاث حالات حيث :

a) اشارة ناتج التعويض موجبة فأن قيمة (x) التي عوضناها تمثل نهاية صغرى محلية .

b) اشارة ناتج التعويض سالبة فأن قيمة (x) التي عوضناها تمثل نهاية عظمى محلية .

c) اما اذا كانت المشتقة الثانية او ناتج التعويض = صفر او المشتقة الثانية غير معرفة ، فأن هذه الطريقة للاختبار غير صحيحة (يجب الرجوع إلى الطريقة السابقة أي إشارة المشتقة الاولى على خط الأعداد)

مثال الكتاب 1

باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن أوجد النهايات المحلية للدوال الآتية:

1) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$f'(x) = 6 - 6x \Rightarrow 6 - 6x = 0 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow x = 1$

نلاحظ ان المشتقة الثانية سالبة لأي قيمة اي $f''(x) = -6 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0$

عند $x = 1$ حصلنا على نهاية عظمى محلية فنعوضها في الدالة لنجد النهاية العظمى المحلية

النهاية عظمى محلية $f(1) = 6 - 3 - 1 = 2$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

2) $f(x) = x - \frac{4}{x^2} \quad , x \neq 0$

$f(x) = x - 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 1 + 8x^{-3}$

$1 + 8x^{-3} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

نعوض قيمة المتغير التي حصلنا عليها هنا ونلاحظ اشارة الناتج $f''(x) = -24x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$

نلاحظ ان المشتقة الثانية سالبة بعد التعويض اي $f''(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} < 0$

عند $x = -2$ حصلنا على نهاية عظمى محلية فنعوضها في الدالة لنجد النهاية العظمى المحلية

النهاية العظمى المحلية هي : $f(-2) = -2 - 1 = -3$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow [\, 3x^2 - 6x - 9 = 0 \,] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 \quad \text{or} \quad x = -1$

$f''(x) = 6x - 6$

نعوض اولا عن $x = 3$ في المشتقة الثانية لنحصل على $f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0$

عند $x = 3$ حصلنا على نهاية صغرى محلية فنعوضها في الدالة لنجد النهاية الصغرى المحلية

النهاية الصغرى المحلية : $f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

والان نعوض عن $x = -1$ في المشتقة الثانية لنحصل على $f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$

عند $x = -1$ حصلنا على نهاية عظمى محلية فنعوضها في الدالة لنجد النهاية العظمى المحلية

النهاية العظمى المحلية : $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

4) $f(x) = 4 - (x + 1)^4$

$$f'(x) = -4(x + 1)^3 \Rightarrow [-4(x + 1)^3 = 0] \div (-4)$$

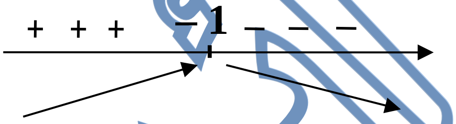
$$(x + 1)^3 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f''(x) = -12(x + 1)^2$$

$$f''(-1) = -12(-1 + 1)^2 = 0$$

بعد ان عوضنا قيمة $x = -1$ في المشتقة الثانية كان الناتج = صفر لذا لا تصلح هذه الطريقة و يجب أن نعود إلى إشارة $f'(x)$ على خط الأعداد

إشارة $f'(x)$



حصلنا عند $x = -1$ على نهاية عظمى محلية لذا نعوض في الدالة لإيجاد النهاية العظمى المحلية

النهاية العظمى المحلية : $f(-1) = 4 - (-1 + 1)^4 = 4$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

5) $f(x) = 3 + (x - 2)^3$

6) $f(x) = 8x^2 - x^4$

7) $f(x) = x^3 + 1$

واجبات اضافية

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

استخدام النهايات ونقط الانقلاب والتزايد والتناقص والتقعر والتحدب في ايجاد الثوابت المجهولة

بعد ان تعرفنا على كيفية ايجاد النقط الحرجة و النهايات و الانقلاب ومناطق التزايد والتناقص والتقعر والتحدب للدوال سنستخدمها في ايجاد الثوابت المجهولة في الدوال وسنذكر ادناه مجموعة ملاحظات لتسهيل الحل :

1) نلاحظ عدد الثوابت المجهولة في السؤال (نحتاج الى ايجاد عدد من العلاقات (المعادلات) بعدد الثوابت) .

2) من النقط الحرجة و نقط النهايات نجد المشتقة الاولى ونساويها للصفر مع تعويض قيمة x من النقطة لنحصل على معادلة.

3) من نقط الانقلاب نجد المشتقة الثانية ونساويها للصفر و نعوض قيمة x من النقطة لنحصل على معادلة.

4) اذا ذكر في السؤال تزايد وتناقص حول قيمة تعتبر القيمة نقطة نهاية .

5) اذا ذكر في السؤال تقعر وتحدب حول قيمة معينة تعتبر نقط انقلاب .

6) اذا ذكر تماس مع منحني (مستقيم غالبا) عند نقطة فان مشتقتيهما (ميلاهما) تتساوى بشرط ان نعوض عن قيمة x من نقطة التماس في مشتقة المنحني .

7) من كل النقاط اعلاه لاحظ ان كل نقطة تنتمي للدالة تحقق معادلتها.

مثال الكتاب 2 لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ حيث $x \neq 0$ ، أوجد قيمة a إذا علم إن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ، ثم بين إن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

الحل

$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f(x) = x^2 + ax^{-1}$ (لدينا نقطة انقلاب لذا نستخدم المشتقة الثانية)

$f'(x) = 2x - ax^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2 + 2ax^{-3} = 2 + \frac{2a}{x^3}$

(ولكون الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند$x = 1$ لذا نساوي المشتقة الثانية للصفر مع التعويض عن $x = 1$)

$\therefore 2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0 \Rightarrow [\,2a = -2\,] \div 2 \Rightarrow a = -1$ نعوض في الدالة

$\therefore f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ (نشتق مشتقة اولى ونجد قيم x)

$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = -2x \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ (نثبت انها لا تمتلك نهاية عظمى باختبار المشتقة الثانية)

$$f''\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2}{\frac{-1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$$

للدالة نهاية صغرى عندما $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ كون الاشارة بعد التعويض موجبة و لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 3 عين قيمتي الثابتين b , a لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم أوجد نقطة الانقلاب.

الحل

(لدينا نهايتين فنشتق مشتقة اولى ونساوي المشتقة للصفر ثم نعوض مرة $x = -1$ ومرة $x = 2$ لتصبح لدينا معادلتين تحل انيا لإيجاد المجاهيل)

$y = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$

$\because$ للدالة لها نهاية عظمى عند $x = -1$ نعوض في المشتقة

$\therefore 0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b \Rightarrow \quad 2a - b = 3 \;.......(1)$

$\because$ للدالة لها نهاية صغرى عند $x = 2$ نعوض في المشتقة

$\therefore 0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$

$4a + b = -12 \;............(2)$ (وبحل المعادلتين انيا)

$\underline{2a - b = 3 \;.......(1)}$

$6a \quad = -9 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$ نعوض في (1)

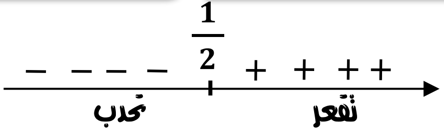
$2\left(\frac{-3}{2}\right) - b = 3 \Rightarrow -3 - b = 3 \Rightarrow b = -6$

$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ (أصبحت الدالة)

$y^{/} = 3x^2 - 3x - 6$

$y^{//} = 6x - 3 \Longrightarrow 6x - 3 = 0 \;\; \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

اشارة $y^{//}$



نعوض قيمة x في الدالة الاصلية لا يجاد احداثيات نقطة الانقلاب $\therefore y = (\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^2 - 6\,(\frac{1}{2}) = \frac{-13}{4}$

اصبحت نقطة انقلاب هي : $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال لتكن $y = ax^3 - 2x^2 + bx$ دالة لها نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ وتقطع محور السينات عند $x = 2$ فأوجد قيمتي $b , a \in R$.

واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال اذا كانت $y = x^2 - 2bx + c$ دالة النقطة $(2 , -2)$ هي نقطة حرجة للدالة فأوجد قيمتي $a , c \in R$ ثم بين نوع هذه النقطة .

واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 4 إذا كان منحني الدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر في $\{ x : x < 1 \}$ ومحدب في $\{ x : x > 1 \}$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3 , 1)$ فأوجد قيم الاعداد الحقيقية c , b , a

الحل (لدينا تقعر وتحدب عند $x = 1$ فتعتبر نقطة انقلاب لذا نجد المشتقة الثانية = صفر شرط تعويض $x = 1$)

$f^{/}(x) = 3ax^2 + 2bx \;\; \Longrightarrow f^{//}(x) = 6ax + 2b$

$0 = \;\; 6a\,(1) + 2b \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \;.....(1)$ (نساوي المشتقة الثانية للصفر عندما $x = 1$)

النقطة $(3 , 1)$ نقطة التماس لذا تحقق معادلة المنحني فنعوض $(3 , 1)$ في معادلة المنحني لنحصل على :

$1 = a\,(3)^3 + b\,(3)^2 + c \Longrightarrow \;\; 27a + 9b + c = 1 \;..............(2)$

(كذلك لدينا المستقيم $y + 9x = 28$ يمس المنحني عند $(3 , 1)$ لذا (ميلاهما) مشتقتهما متساوية عند $x = 3$)

$y + 9x = 28 \Longrightarrow y \;= 28 - 9x \Longrightarrow y^{/} = -9$ مشتقة المستقيم

$f^{/}(x) = 3ax^2 + 2bx$ مشتقة المنحني

$\therefore 3a\,(3)^2 + 2b\,(3) = \;\; -9$ (مشتقة المستقيم = مشتقة المنحني)

$[\, 27\,a + 6\,b = -9 \,] \div 3$

$9\,a + 2\,b = \;\; -3 \;\; .... (3)$ (نحل كل من 1 و 2 انيا)

$\underline{\mp 6a \mp 2b = 0}\;.................(1)$ بالطرح

$3\,a \qquad = -3 \;\; \Longrightarrow \;\; a = \; -1$ نعوض في (1)

$-6 + 2b = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; b = 3$ نعوض في (2) (a , b

$1 = -27 + 27 + c \;\; \Longrightarrow c = 1$

مثال الكتاب 5 إذا كان للدالة : $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فأوجد قيمة $a , c \in R$.

الحل (لدينا نقطة انقلاب عند $x = 1$ لذا نجد المشتقة الثانية ونساويها للصفر بشرط التعويض بدل $x = 1$)

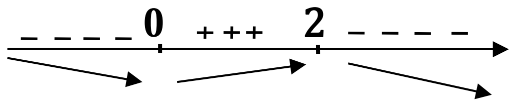
$$f^{/}(x) = 3ax^2 + 6x \Longrightarrow f^{//}(x) = 6ax + 6$$

$$0 = 6a(1) + 6 \Longrightarrow 6a = -6 \Longrightarrow a = -1$$

$\therefore f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$ (تصبح الدالة)

$f^{/}(x) = -3x^2 + 6x$ (للدالة نهاية عظمى محلية تساوي 8 لذا نشتق مشتقة اولى ونجد قيم x)

$$[-3x^2 + 6x = 0] \div 3 \Longrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x(-x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ or } x = 2$$



تختبر اشارة المشتقة لمعرفة اي النقطتين عظمى إشارة $f^{/}$

$\therefore$ نقطة نهاية عظمى(2 , 8) و تحقق الدالة نعوض فيها لإيجاد c

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c \Longrightarrow 8 = -8 + 3(4) + c \Longrightarrow c = 4$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1996 الدور الاول أوجد قيمة $b \in R$ إذا علمت ان للدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + b$ نقطة انقلاب قيمتها 2 . (المقصود بها قيمة y لنقطة الانقلاب)

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1997 الدور الثاني أذا كانت للدالة : $f(x) = 3 + ax + bx^2$ نقطة حرجة عند (1 , 4) فأوجد قيم a , $b \in R$, ثم بين نوع النقطة الحرجة.

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1999 الدور الثاني اذا كان المنحني $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة (– 2 , – 2) وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ فأوجد قيمتي $b, c \in R$ ثم اوجد نقطة النهاية العظمى المحلية للدالة.

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2001 الدور الاول لتكن $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ دالة ، فأوجد قيمتي $b, c \in R$ اذا علمت ان للدالة نقطة نهاية صغرى عند $x = 4$ ، ونقطة نهاية عظمى عند $x = 2$.

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2004 الدور الثاني اوجد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ حيث ان النقطة (– 1, 4) نقطة انقلاب وميل المماس عندها هو 1 .

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2009 الدور الاول اذا كانت $f(x) = ax^2 - (x + b)^2$ حيث (1 , – 2) نقطة حرجة ، ما نوعها وأوجد قيمتي $b, a \in R^{++}$. (R^{++} هي مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة).

تمارين (3 – 4)

س1// لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + 6$ حيث إن $b \in R$ ، $a \in \{-4 , 8\}$ ، فأوجد قيمة a إذا كانت :

أ) الدالة f محدبة. ب) الدالة f مقعرة .

(نعلم ان الدالة تكون محدبة اذا كانت اشارة المشتقة الثانية سالبة ومقعرة اذا كانت اشارة المشتقة الثانية موجبة لذا نجد المشتقة الثانية ونبحث بين القيم المعطاة ايها عند تعويضه بدل a يجعل المشتقة الثانية موجبة وايها يجعلها سالبة)

$$f(x) = ax^2 - 6x + 6 \Longrightarrow f'(x) = 2ax - 6 \Longrightarrow f''(x) = 2a$$

أ) لكي تكون اشارة المشتقة الثانية سالبة (اي الدالة محدبة) يجب ان تكون a سالبة أي $a = -4$

ب) لكي تكون اشارة المشتقة الثانية موجبة (اي الدالة مقعرة) يجب ان تكون a موجبة أي $a = 8$

* ℜ *ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2// إذا كانت (2 , 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة : $f(x) = a - (x - b)^4$ فأوجد $a , b \in R$ و بين نوع النقطة الحرجة.

(لدينا نقطة حرجة لذا المشتقة الاولى عندها = صفر بشرط التعويض عن قيمة $x = 2$ من النقطة الحرجة)

$$f'(x) = -4(x - b)^3(1)$$

$$\therefore [-4(2 - b)^3 = 0] \div (-4) \Longrightarrow (2 - b)^3 = 0 \Longrightarrow 2 - b = 0 \Longrightarrow b = 2$$

$f(x) = a - (x - 2)^4$ (اصبحت الدالة)

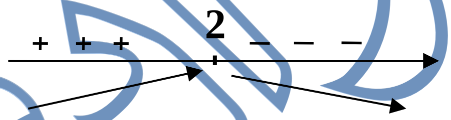
(لدينا نقطة حرجة فهي تنتمي لمنحني الدالة وتحقق معادلته لذا نعوضها في الدالة)

$$f(x) = a - (x - 2)^4 \Longrightarrow 6 = a - (2 - 2)^4 \Longrightarrow 6 = a - (0)^4 \Longrightarrow a = 6$$

$\therefore f(x) = 6 - (x - 2)^4$ (اصبحت الدالة)

$f'(x) = -4(x - 2)^3$ نختبر اشارة المشتقة للنقطة (2 ,6) على خط الأعداد لمعرفة نوع النهاية

إشارة $f'(x)$



∴ النقطة (2 , 6) هي نقطة نهاية عظمى محلية .

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س3// إذا كان : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي (1 , – 11) فأوجد قيمة الثوابت $a , b , c \in R$

(هنا نقطة التماس(1) هي نقطة انقلاب(2) و تنتمي(3) للمنحني)

(لدينا المستقيم $g(x) = 1 - 12x$ يمس المنحني عند (1 , – 11) لذا (ميلاهما) مشتقتهما متساوية عند $x = 1$)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ مشتقة المنحني , $g'(x) = -12$ مشتقة المستقيم

$\therefore 3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$ (مشتقة المستقيم = مشتقة المنحني عند نقطة التماس)

$$3a + 2b + c = -12 \quad .... (1)$$

(ولدينا(1 , – 11) نقطة انقلاب لذا نجد المشتقة الثانية = صفر عند $x = 1$)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$[6a + 2b = 0] \div 2 \Longrightarrow 3a + b = 0 \quad ...... (2)$$

(ولدينا (1 , – 11) نقطة تحقق معادلة المنحني f)

$-11 = a + b + c \Rightarrow a + b + c = -11$ ....(3)

$3a + 2b + c = -12$ ....(1)   نحل المعادلتين (1) و (3)

$\underline{\mp a \mp b \mp c = \pm 11}$ ....(3)   بالطرح

$2a + b = -1$ .... (4)   (حصلنا على معادلة جديدة تحل مع (2) انيا)

$\underline{\mp 3a \mp b = 0}$ ....(2)

$-a = -1 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (2) $\Rightarrow 3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$ نعوض قيم a , b في (3)

$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow c = -9$

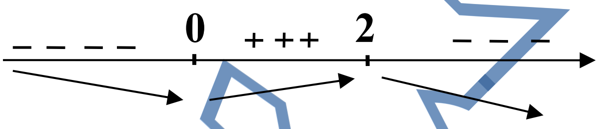
* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س4 // إذا كانت (6) تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة : $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فأوجد قيمة $c \in R$ ثم أوجد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه .

للدالة نهاية صغرى اي نساوي المشتقة الاولى للصفر ونجد قيم x لمعرفة احداثي نقطة النهاية كون (6) تمثل قيمة y وليس قيمة x)

$f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow [\, 6x - 3x^2 = 0 \,] \div 3$

$x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = 2$ نختبر على خط الأعداد



إشارة $f'(x)$ $\Leftarrow$ ∴ (0 , 6) نقطة نهاية صغرى محلية

وهي تحقق الدالة $6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c \Rightarrow c = 6$

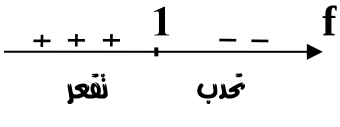
(اصبحت الدالة $\therefore f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$

(ولإيجاد معادلة المماس نحتاج الى نقطة وهي نقطة الانقلاب و ميل المماس وهو المشتقة الاولى)

$f''(x) = 6 - 6x \Rightarrow 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$ (نجد اولا النقطة اي نقطة الانقلاب

$\therefore f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 8 \Rightarrow (1, 8)$ نقطة انقلاب وهي نقطة التماس

اشارة $f''(x)$



ميل المماس وهو المشتقة الاولى عند $x = 1$

$\therefore f'(x) = 6 - 3 = 3$ ميل المماس

معادلة المستقيم هي : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 8 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - y + 5 = 0$

س5// اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي (– 1 , 5) فأوجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

(نعلم ان الدالة مقعرة : $\forall x > 1$ ومحدبة : $\forall x < 1$ لذا للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

$6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ ...(1)

(و نعلم ان النقطة $(-1, 5)$ هي نهاية عظمى محلية لذا المشتقة الاولى = صفر عند $x = -1$)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \;.....(2)$$

(و نعلم ان النقطة $(-1, 5)$ نهاية عظمى محلية لذا تحقق الدالة)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow 5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$$

$-a + b - c = 5 \;....\; (3)$ (وبحل المعادلتين (3) و (2) انيا)

$\underline{3a - 2b + c = 0} \;....\; (2)$ بالجمع

$[\, 2a - b = 5 \;..........(4) \,]\; (2)$ (وبحل المعادلتين (3) و (2) انيا)

$\underline{6a + 2b = 0} \;.........(1)$

$4a - 2b = 10 \;...........(4)$

$\underline{6a + 2b = 0} \;...........(1)$ بالجمع

$10a = 10 \Rightarrow a = 1$ نعوض في معادلة (4)

$2 - b = 5 \Rightarrow b = -3$ نعوض في (3) $\Rightarrow -1 - 3 - c = 5 \Rightarrow -1 - 3 - 5 = c \Rightarrow c = -9$

ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *

س6// لتكن : $f(x) = x^2 - \frac{a}{x},\; a \in R / \{0\},\; x \neq 0$ فبرهن إن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

$$f'(x) = 2x - \frac{x(0) - a(1)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$$ (نجد قيم x من المشتقة)

$$[\, 2x + \frac{a}{x^2} = 0 \,]\,(x^2) \Rightarrow 2x^3 + a = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2}$$

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لمعرفة نوع النهاية عظمى أو صغرى (ونعوض عن قيمة x^3 في المشتقة الثانية)

$$f''(x) = 2 + \frac{x^2(0) - a(2x)}{x^4} = 2 - \frac{2a}{x^3} = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$$

ولكون المشتقة الثانية موجبة لذا فالدالة تمتلك نهاية صغرى محلية و لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س7// المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2, -1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ فأوجد قيمة $a, b, c \in R$ وما نوع النهاية .

نقطة التماس $(2, -1)$ اولا تحقق معادلة المنحني أي : $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = 4a + 2b + c \;....(1)$

المستقيم $3x - y = 7$ والمنحني $y = ax^2 + bx + c$ مشتقتهما (ميلاهما) متساوية عند $x = 2$

مشتقة المستقيم $y = 3x - 7 \Rightarrow y' = 3$, مشتقة المنحني $y' = 2ax + b$

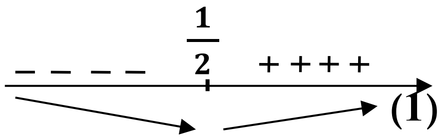
$\therefore 2a(2) + b = 3 \Rightarrow 4a + b = 3 \;......(2)$ (مشتقة المستقيم = مشتقة المنحني عند نقطة التماس)

(و نعلم ان للمنحني نهاية محلية لذا المشتقة الاولى = صفر عند $x = \frac{1}{2}$)

$y' = 2ax + b \Rightarrow 2a(\frac{1}{2}) + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \;....(3)$ (وبحل المعادلتين (3) و (2) انيا)

$\underline{\mp 4a \mp b = \mp 3} \;......(2)$ بالطرح

$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (3) $\Rightarrow b = -1$



نعوض a , b في (1) $\Rightarrow -1 = 4(1) + 2(-1) + c \Rightarrow \therefore c = -3$

ولمعرفة نوع النهاية نختبر اشارة المشتقة الاولى حيث ($y' = 2x - 1$) ونلاحظ انها تمثل نهاية صغرى .

رسم المخطط البياني للدالة

سبق وان تعلم الطالب كيفية رسم الدوال بصورة مبسطة بأخذ قيم لاحد متغيراتها مثلا x ونعوضها في الدالة ونجد قيم المتغير الاخر y ثم نعين النقط التي تنتمي للدالة على النظام الاحداثي ونصل بينها لنحصل على مخطط مبسط ولكن غير دقيق والان سنتطرق لمجموعة خطوات نقوم بها للحصول على مخطط اكثر دقة باستخدام معلوماتنا في التفاضل ومعلومات اخرى .

ولكي نرسم المخطط البياني للدالة نتبع الخطوات الاتية :

1) نحدد أوسع مجال للدالة حيث يوجد ضمن المنهج نوعان فقط من الدوال هما :

a) الدوال كثيرة الحدود أوسع مجال لها هو R .

b) الدوال النسبية (كسرية اي وجود متغير في المقام) فإن أوسع مجال لها هو R ما عدا القيم التي تجعل المقام صفرا لذا ناخذ المقام = صفر ثم نجد قيم x ثم نكتب اوسع مجال لها هو كل R عدا تلك القيم.

2) نجد نقاط تقاطع منحني الدالة مع المحاور (ان امكن) وذلك بأن :

أ) نعوض عن قيمة $x = 0$ ونجد قيم y ثم نكتب نقاط التقاطع مع محور الصادات .

ب) نعوض عن قيمة $y = 0$ ونجد قيم x (إن أمكن) ثم نكتب نقاط التقاطع مع محور السينات .

3) نجد نوع التناظر لمنحني الدالة حيث في الدوال يوجد نوعان فقط من التناظر (ضمن المنهج) وهما :

أ) تناظر حول محور الصادات

ب) تناظر حول نقطة الأصل و يمكن معرفة نوع التناظر بالطريقة الاتية :

اولا : نكتب الدالة الاصلية $f(x)$

ثانيا : نجد $f(-x)$ بأن نعوض عن كل (x) بـ $(-x)$ في الدالة ثم نبسط

و نلاحظ هل $f(-x) = f(x)$ فأن المنحني متناظر حول محور الصادات.

ثالثا : نجد $-f(x)$ أي نضرب الدالة الاصلية بإشارة سالبة ونبسط ثم

نلاحظ هل $f(-x) = - f(x)$ فإن المنحني متناظر حول نقطة الاصل .

طريقة لامنهجية: اذا كانت كل الاسس زوجية في الدالة فهي متناظرة حول الصادات ، واذا كانت كل الاسس فردية فهي متناظرة حول نقطة الاصل ، واذا زوجية وفردية فلا يوجد تناظر.

**(لا توجد دالة متناظرة حول محور السينات لأنها ستناقض تعريف الدالة اي لا تصبح دالة)

4) في الدوال النسبية نجد المستقيمات المحاذية (إن وجدت) و يوجد نوعان من المستقيمات المحاذية وهي:

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) نضع المقام = صفر و نجد قيم المتغير (كمعادلة مستقيم)

ب) المحاذي الافقي نضع الدالة بدلالة y وذلك باستخدام خاصية (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين) ثم نعزل الحدود التي تحوي x في نفس الجهة لكي نستخرجه كعامل مشترك ثم نقسم على القوس الناتج لتصبح العلاقة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير . (كمعادلة مستقيم)

5) نجد $f'(x) , f''(x)$ ومنها نجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها (نهايات عظمى أو صغرى) ومناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت .

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها ونجد نقاط إضافية إن احتجنا إلى ذلك.

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور .... والان لاحظ الامثلة الاتية :

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 1 ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة : $f(x) = x^5$

الحل

1) أوسع مجال = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث : $x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(0 , 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : احداثي نقطة التقاطع $y = 0 \Rightarrow (0 , 0)$

3) التناظر : $f (x) = x^5$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات . $f (-x) = (-x)^5 = - x^5$

نلاحظ ان $- f (x) = f (- x)$ لذا الدالة متناظرة حول نقطة الأصل . $- f (x) = - x^5$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) ** نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

اشارة $f'(x)$ $\quad + \; + \quad 0 \quad + \; +$ $\qquad f'(x) = 5x^4 \Rightarrow [5x^4 = 0] \div 5 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي النقطة الحرجة حيث : $f (0) = 0$

$(0, 0)$ النقطة الحرجة و مناطق التزايد $\{ x : x > 0 \} , \{ x : x < 0 \}$ و لا توجد مناطق التناقص

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

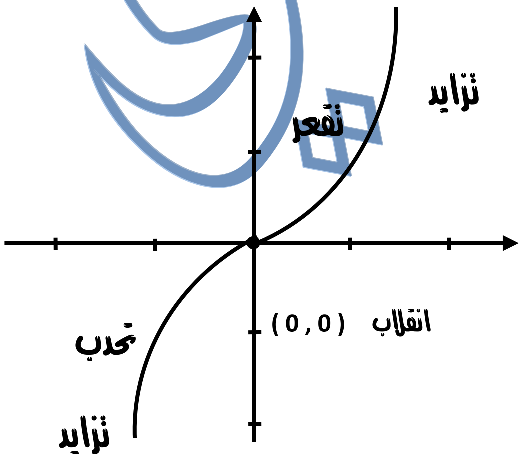
إشارة $f''(x)$ $\quad + + + + \quad 0 \quad - - -$ تقعر تحدب $\qquad f''(x) = 20x^3 \Rightarrow 20 x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

نجد صورة x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة نقطة الانقلاب حيث : نقطة انقلاب $f (0) = 0 \Rightarrow (0 , 0)$

مناطق التقعر $\{ x : x > 0 \}$ و مناطق التحدب $\{ x : x < 0 \}$

6) نعمل جدول بالنقاط التي حصلنا عليها ونقط اضافية:

x	0	1	−1	2	−2
y	0	1	−1	32	− 32



7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....

مثال الكتاب 2 ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل

1) أوسع مجال = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$x^2(x - 2) - (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) - (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$(x - 2)[x^2 - x + 2] = 0$$

$$(x - 2)[(x - 2)(x + 1)] = 0$$

$$x = 2 \quad \text{or} \quad x = -1$$

في حال من الصعوبة إيجاد قيم x نكتفي بنقاط التقاطع مع الصادات) و هذه الطريقة تم حذفها من منهج الثالث

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(2, 0), (-1, 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : نقاط التقاطع $y = 4 \Rightarrow (0, 4)$

3) التناظر : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات .

نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل . $-f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) ** نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow [3x^2 - 6x = 0] \div 3$$

$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 2$$

اشارة $f'(x)$: $+ + + \quad 0 \quad - - - \quad 2 \quad + + +$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية العظمى حيث :

نقطة النهاية العظمى $f(0) = 4 \Rightarrow (0, 4)$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية الصغرى حيث :

نقطة النهاية الصغرى $f(2) = 0 \Rightarrow (2, 0)$

منطقة التناقص الفترة المفتوحة $(0, 2)$ ، مناطق التزايد : $\{x : x < 0\}, \{x : x > 2\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

إشارة $f''(x)$: $- - - \quad 1 \quad + + +$

تحدب تقعر

نجد صورة x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة الانقلاب حيث :

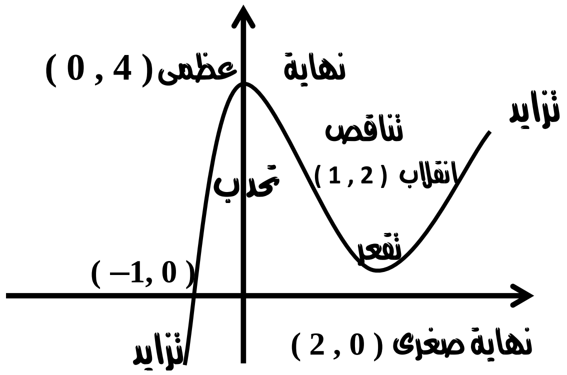
نقطة انقلاب $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 4 = 2 \Rightarrow (1, 2)$

مناطق التقعر $\{x : x > 1\}$ و مناطق التحدب $\{x : x < 1\}$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها :

X	2	−1	0	1
Y	0	0	4	2

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....



* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 3 بالإستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

الحل

1) أوسع مجال (نساوي المقام للصفر ونجد قيم x واوسع مجال هو كل R عدا قيم x لاحظ)

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R-\{-1\}$$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض y = 0 ونجد قيمة x حيث : $\frac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

نكتب احداثي نقطة التقاطع مع محور السينات $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

ب) مع محور الصادات نعوض x = 0 ونجد قيمة y حيث : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow y=\frac{3(0)-1}{(0)+1}=-1$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور الصادات $(0, -1)$

3) التناظر:

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات $f(-x)=\frac{-3x-1}{-x+1}$

نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x)=\frac{-3x+1}{x+1}$

4) المحاذيات:

أ) المحاذي العمودي نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ (معادلة مستقيم)

ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير):

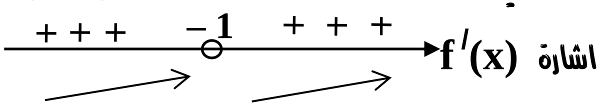
$$y=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow yx+y=3x-1 \Rightarrow yx-3x=-y-1 \Rightarrow x(y-3)=-y-1$$

$$\therefore x=\frac{-y-1}{y-3} \Rightarrow y-3=0 \Rightarrow y=3$$ (معادلة مستقيم

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2} \neq 0$$

نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا وهي هنا $x=-1$ ولكن كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة .



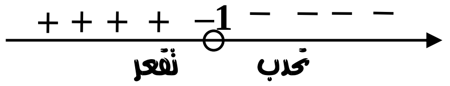
لا نجد صورة x (لا تنتمي لمجال الدالة) و لا توجد مناطق التناقص ومناطق تزايد : $\{x : x > -1\} , \{x : x < -1\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f'(x) = 4(x+1)^{-2} \Longrightarrow f''(x) = -8\,(x+1)^{-3} = \frac{-8}{(x+1)^3} \neq 0$$

نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا وهي هنا $x = -1$ ولكن كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة .

إشارة$f''(x)$

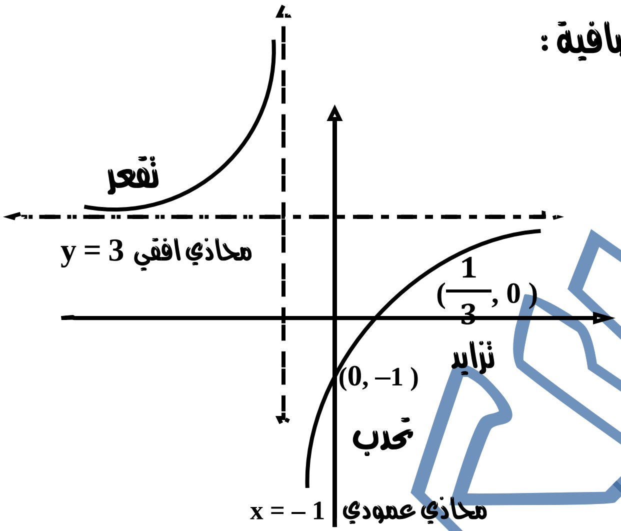


لا توجد نقطة انقلاب) مناطق التقعر $\{x : x < -1\}$ و مناطق التحدب $\{x : x > -1\}$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها ومجموعة اضافية :

x	0	$\frac{1}{3}$	1	–2	– 3
y	1	0	1	7	5

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....



* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 4

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل

1) أوسع مجال (المقام ≠ الصفر لان المقام مجموع مربعين لذا المجال كل R (R $\Longleftarrow x^2 + 1 \neq 0$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيم x : $x = 0 \Longleftarrow x^2 = 0 \Longleftarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0$

نكتب نقطة التقاطع مع محور السينات : (0 , 0)

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : $f(0) = y = \frac{0}{0+1} = 0$

نكتب نقطة التقاطع مع محور الصادات : (0 , 0)

3) التناظر :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$ $f(x) = f(-x)$ اي الدالة متناظرة مع الصادات

$$-f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{-x^2}{x^2+1}$$ $-f(x) \neq f(-x)$ لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل

4) المحاذيات :

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) لا يمكن أن نضع المقام = صفر لذا لا يوجد محاذي عمودي .

ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير) :

$$y = \frac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow y\,x^2 + y = x^2 \Longrightarrow y\,x^2 - x^2 = -y \Longrightarrow x^2(y-1) = -y \Longrightarrow x^2 = \frac{-y}{y-1}$$

$y = 1$ (معادلة مستقيم

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$- \; - \; - \quad 0 \quad + \; + \; +$ اشارة $f'(x)$

نجد صورة x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة نقطة النهاية الصغرى حيث : $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

منطقة تناقص $\{x : x < 0\}$ و مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(2)-(2x)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[2x^2+2-8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{6} \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$- \; - \; - \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad + + + + \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad - \; - \; -$ اشارة $f''(x)$

تحدب ‏ تقعر ‏ تحدب

نجد صور قيم x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقطة الانقلاب حيث :

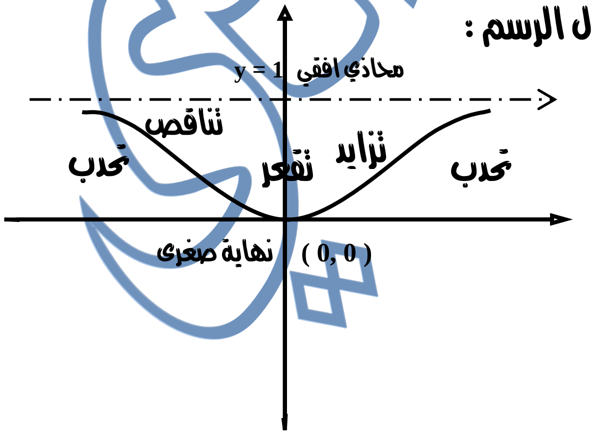
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$ نقطة انقلاب

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$ نقطة انقلاب

منطقة التقعر الفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ، مناطق التحدب $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

6) نعمل جدول بمجموعة من النقاط ونقط اضافية لإكمال الرسم :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاريات

ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل كل من الدوال الاتية :

واجب

1) $f(x) = x^3 - 3x$ ‏ 2005 تمهيدي و 99 دور اول

2) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ ‏ الدور الثاني 2000

3) $f(x) = \frac{2-x}{x}$ ‏ الدور الثاني 2004

4) $f(x) = x^3 + 3x^2$ ‏ 2001 الدور الثاني

تمارين (3 – 5)

ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل بالاستعانة الدوال الاتية :

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

1) أوسع مجال للدالة هو = R لأنها كثيرة حدود

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

$$10 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (5 + x)(2 - x) = 0 \Rightarrow x = -5 , x = 2$$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(2 , 0) , (-5 , 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : نقطة التقاطع $y = 10 \Rightarrow (0 , 10)$

3) التناظر : $f(x) = 10 - 3x - x^2$

$$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات .

نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x) = -10 + 3x + x^2$

لاحظ ان اسس الحدود زوجية وفردية لذا لا يوجد أي تناظر .

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) ** نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f'(x) = -3 - 2x \Rightarrow -3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

اشارة $f'(x)$: $+ \; + \; + \quad \frac{-3}{2} \quad - \; - \; -$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية العظمى حيث :

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{-3}{2} , 12\frac{1}{4}\right)$$ نقطة النهاية العظمى

مناطق التزايد : $\{x : x < \frac{-3}{2}\}$ و مناطق التناقص : $\{x : x > \frac{-3}{2}\}$

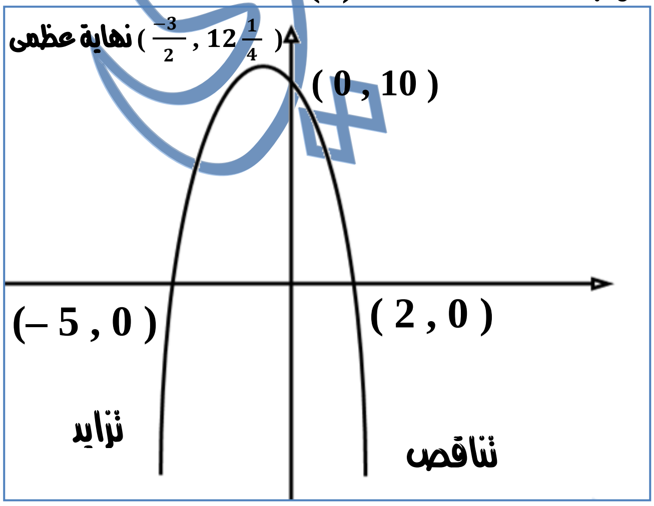
** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$f''(x) = -2 < 0$ أي ان الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها

$\frac{-3}{2}$	0	– 5	2	x
$12\frac{1}{4}$	10	0	0	y

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....



2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

1) أوسع مجال للدالة هو $R =$ لأنها كثيرة حدود

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

$$x^2 + 4x + 3 \Longrightarrow (x + 3) (x + 1) = 0 \Longrightarrow x = -3 , x = -1$$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(-3 , 0) , (-1 , 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث نقطة التقاطع: $y = 3 \Longrightarrow (0 , 3)$

3) التناظر : $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3 = x^2 - 4x + 3$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات .

نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x) = -x^2 - 4x - 3$

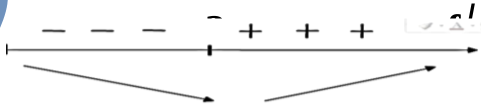
لاحظ ان اسس الحدود زوجية وفردية لذا لا يوجد أي تناظر .

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$f'(x) = 2x + 4 \Longrightarrow 2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -2$

اشارة $f'(x)$



نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقطة النهاية الصغرى حيث :

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Longrightarrow (-2 , -1)$ نقطة نهاية صغرى

مناطق التزايد : $\{ x : x > -2 \}$ ، مناطق التناقص : $\{ x : x < -2 \}$

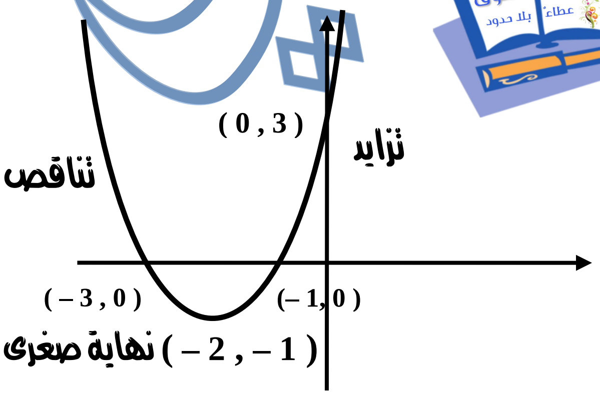
** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$f''(x) = 2 > 0$ أي ان الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها (لاحظ ان قيم x لها سالبة لذا نأخذ واحدة اضافية)

x	−3	−1	− 2	0	1
y	0	0	−1	3	8

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....



3) $f(x) = (1 - x)^3 + 1$

1) أوسع مجال = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

$(1 - x)^3 + 1 = 0 \Longrightarrow (1 - x)^3 = -1$ نجذر الطرفين $\Longrightarrow 1 - x = -1 \Longrightarrow x = 2$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(2 , 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث نقطة التقاطع : $y = 2 \Longrightarrow y = 1 + 1 \Longrightarrow (0 , 2)$

لاحظ ان اسس الحدود زوجية وفردية لذا لا يوجد أي تناظر .

3) التناظر : $f (x) = (1 - x)^3 + 1$

$f (-x) = (1 - (-x))^3 + 1 = (1 + x)^3 + 1$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات .

نلاحظ ان $-f (x) \neq f (- x)$ لذا لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f (x) = -(1 - x)^3 - 1$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$f'(x) = 3(1 - x)^2 (-1) = -3 (1 - x)^2$

$-3 (1 - x)^2 = 0 \Longrightarrow 1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$

اشارة $f'(x)$ _ _ _ _ 1 _ _ _ _ _

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي النقطة الحرجة حيث :

$f (1) = (1 - 1)^3 + 1 = 1 \Longrightarrow (1 , 1)$ نقطة حرجة

لا توجد مناطق تزايد و مناطق التناقص : $\{ x : x < 1 \} , \{ x : x > 1 \}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$f''(x) = -6(1 - x)(-1) \Longrightarrow f''(x) = 6(1 - x) \Longrightarrow 6(1 - x) = 0$

$1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$ إشارة $f''(x)$ + + + + 1 – – – –

تقعر تحدب

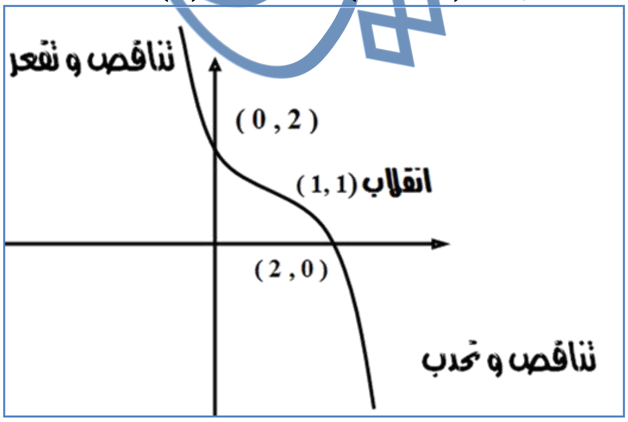
نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة الانقلاب حيث :

مناطق التحدب $\{ x : x > 1 \}$ ومناطق التقعر $\{ x : x < 1 \}$ نقطة انقلاب $(1 , 1)$ $f (1) = 1 \Longrightarrow$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها و واحدة اضافية

–1	1	0	2	x
9	1	2	0	y

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور .



4) $f(x) = 6x - x^3$

1) أوسع مجال $= R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث : $x(6 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = \mp\sqrt{6}$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(0, 0), (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث نقطة التقاطع: $y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

3) التناظر: $f(x) = 6x - x^3$

$$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات .

نلاحظ ان $-f(x) = f(-x)$ لذا الدالة متناظرة حول نقطة الأصل. $-f(x) = -6x + x^3$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

اشارة $f'(x)$ $- - -$ $\sqrt{2}$ $+++$ $-\sqrt{2}$ $- - - - -$

$$f'(x) = 6 - 3x^2 \Rightarrow [6 - 3x^2 = 0] \div 3$$

$$2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقطة النهاية العظمى حيث :

$f(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نقطة النهاية العظمى

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقطة النهاية الصغرى حيث :

$f(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقطة النهاية الصغرى

منطقة تزايد الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، مناطق التناقص : $\{x : x > \sqrt{2}\}, \{x : x < -\sqrt{2}\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

إشارة $f''(x)$ $- - - - -$ 0 $+ + + +$
تحدب تقعر

$$f''(x) = -6x \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

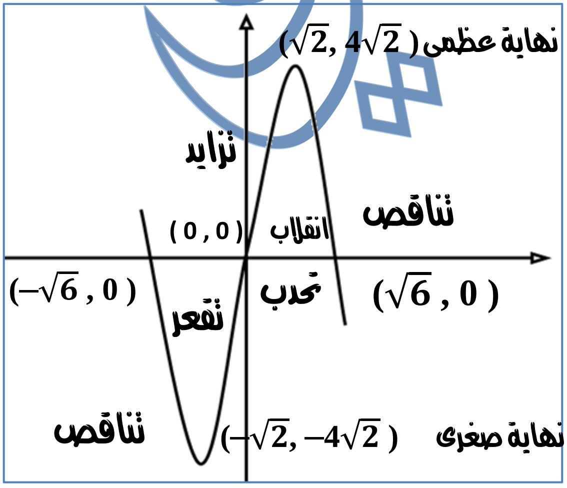
نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقطة الانقلاب حيث : $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

مناطق التقعر $\{x : x < 0\}$ ، مناطق التحدب $\{x : x > 0\}$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها :

$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	0	x
$-4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	0	0	0	y

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....



5) $f(x) = \frac{1}{x}$

1) أوسع مجال (نساوي المقام للصفر لنجد قيم x واوسع مجال R عدا قيم x لاحظ) $x = 0 \Longrightarrow R - \{ 0 \}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين .

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x ولكن: $\frac{1}{x} \neq 0$ لذا لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y ولكن: $x \neq 0$ ، 0 لا ينتمي لمجال الدالة و لا توجد نقاط تقاطع.

3) التناظر: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(-x) = \frac{1}{-x}$ نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات

$-f(x) = -\frac{1}{x}$ نلاحظ ان $-f(x) = f(-x)$ لذا الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) المحاذيات :

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير : $x = 0$ (معادلة مستقيم)

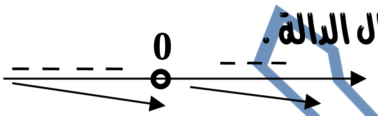
ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير):

$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow y\,x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{y} \Longrightarrow y = 0$ (معادلة مستقيم

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x) = x^{-1} \Longrightarrow f'(x) = -1\,x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \neq 0$

نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا وهي هنا $x = 0$ ولكن كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة .



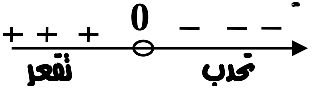
اشارة $f'(x)$

لا نجد صورة x (لا تنتمي لمجال الدالة) و لا توجد مناطق تزايد ، مناطق التناقص : $\{ x : x < 0 \} , \{ x : x > 0 \}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \neq 0$

نختبر القيمة التي تجعل المقام صفرا وهي هنا $x = 0$ كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة (لا توجد نقطة انقلاب)



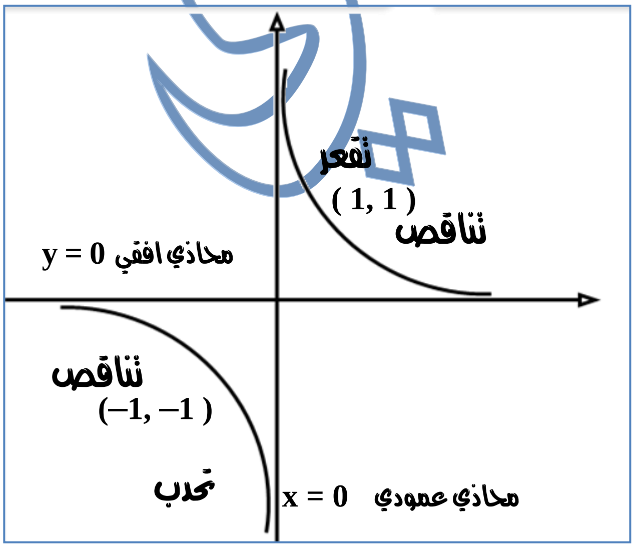
إشارة $f''(x)$

مناطق التقعر $\{ x : x < 0 \}$ ومناطق التحدب $\{ x : x > 0 \}$

6) نعمل جدول بمجموعة من النقاط :

x	1	–1	2	–2
y	1	–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....



6) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

1) أوسع مجال (نساوي المقام للصفر ونجد قيم x لنستثنيها) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R-\{-1\}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث : $\frac{x-1}{x+1}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1\,,0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : $f(0)=y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow (0\,,-1)$

3) التناظر : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}$$

نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع محور الصادات

$-f(x)=-\frac{x-1}{x+1}=\frac{-x+1}{x+1}$ لذا لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x) \neq f(-x)$

4) المحاذيات :

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير : $x=-1$ (معادلة مستقيم)

ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير) :

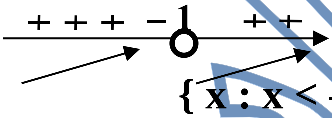
$$y=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx+y=x-1 \Rightarrow yx-x=-y-1 \Rightarrow x(y-1)=-y-1$$

$x=\frac{-y-1}{y-1} \Rightarrow y=1$ (معادلة مستقيم

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$$

نختبر (نجعل المقام صفر) $x=-1$ كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة . اشارة $f'(x)$

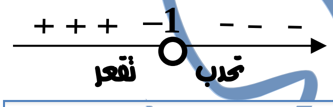


لا نجد صورة x و لا توجد مناطق التناقص ، مناطق تزايد: $\{x : x<-1\}, \{x : x>-1\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f'(x)=2(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-4(x+1)^{-3}=\frac{-4}{(x+1)^3} \neq 0$$

نختبر (نجعل المقام صفر) $x=-1$ كفجوة لأنها لا تنتمي لمجال الدالة اشارة $f'(x)$

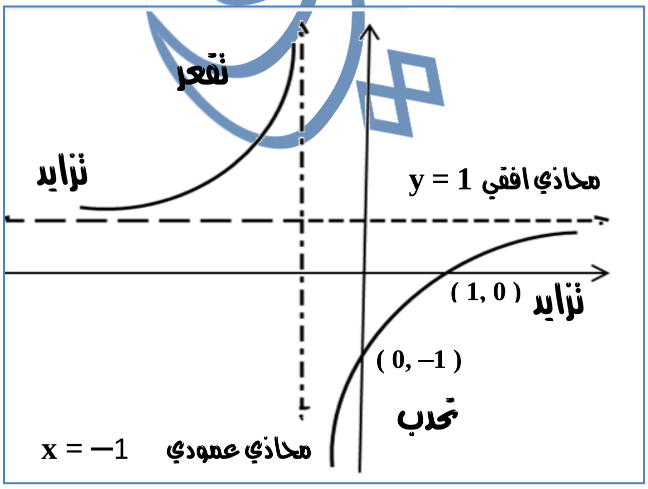


مناطق التحدب $\{x : x>-1\}$ و التقعر $\{x : x<-1\}$

6) نعمل جدول بمجموعة من النقاط ونقط اضافية:

−3	−2	2	0	1	x
2	3	$\frac{1}{3}$	−1	0	y

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....



$7)\ f(x) = (x+2)(x-1)^2$

1) أوسع مجال $= R$ كون الدالة كثيرة حدود

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

نقاط التقاطع $(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow x = -2 \text{ or } x = 1 \Rightarrow (-2, 0), (1, 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث : $y = (2)(-1)^2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

3) التناظر : $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

أ) نلاحظ ان $f(x) \neq f(-x)$ لذا لا يوجد تناظر مع الصادات $f(-x) = (-x+2)(-x-1)^2$

ب) كذلك $-f(x) \neq f(-x)$ فلا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x) = (-x-2)(x-1)^2$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f'(x) = (x+2)2(x-1) + (x-1)^2(1) = (x-1)[2x+4+x-1]$$
$$= (x-1)[3x+3] = 0 \Longrightarrow \therefore x = 1 \text{ or } x = -1$$

اشارة $f'(x)$: $+ + +$ $\quad -1 \quad$ $- - $ $\quad -1 \quad$ $+ + +$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية العظمى حيث :

نقطة النهاية العظمى $f(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = 4 \Longrightarrow (-1, 4)$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية الصغرى حيث :

نقطة النهاية الصغرى $f(1) = (1+2)(1-1)^2 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$

منطقة تناقص الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، مناطق التزايد : $\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f''(x) = (x-1)(3) + (3x+3)(1) = 3x - 3 + 3x + 3 = 6x \Longrightarrow 6x = 0 \ \Longrightarrow x = 0$$

إشارة $f''(x)$: $- - -$ $\quad 0 \quad$ $+ + +$

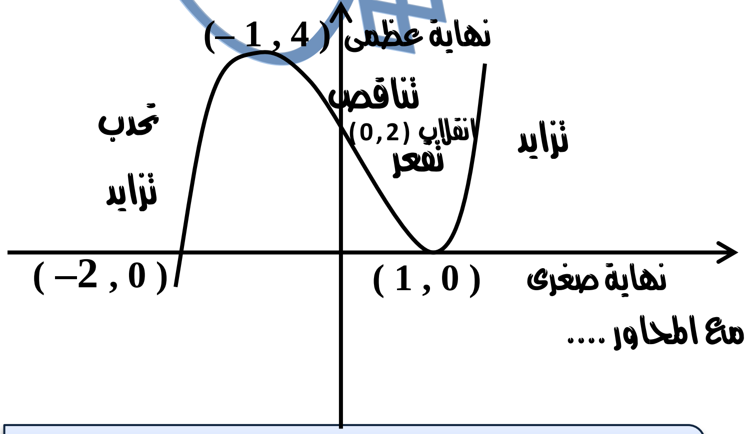
تحدب تقعر

نجد بالتعويض نقطة الانقلاب : $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 2)$ ، مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$ و التحدب $\{x : x < 0\}$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها :

x	0	1	– 2	– 1
y	2	0	0	4

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب والنهايات والانقلاب ونقاط التقاطع مع المحاور ....



$8)\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

1) أوسع مجال (المقام ≠ الصفر لان المقام مجموع مربعين لذا المجال كل R) $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيم x : $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

نكتب نقاط تقاطع مع محور السينات: $(-1, 0), (1, 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث نقطة تقاطع: $f(0) = y = \dfrac{0-1}{0+1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

3) التناظر: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $f(x) = f(-x)$ اي الدالة متناظرة مع الصادات

$-f(x) = -\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{-x^2+1}{x^2+1}$ لا يوجد تناظر حول نقطة الأصل $-f(x) \neq f(-x)$

4) المحاذيات:

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) لا يمكن أن نضع المقام = صفر لذا لا يوجد محاذي عمودي .

ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير):

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow y x^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow y x^2 - x^2 = -y - 1 \Rightarrow x^2(y-1) = -y-1$$

$x^2 = \dfrac{-y-1}{y-1} \Rightarrow y = 1$ (معادلة مستقيم

5) ** نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

اشارة $f'(x)$ $\quad - \ - \ - \ - \ 0 \ + \ + \ + \ +$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية الصغرى حيث:

$f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$ نقطة النهاية الصغرى

منطقة تناقص $\{x : x < 0\}$ و منطقة التزايد $\{x : x > 0\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث:

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4)-(4x)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[4x^2+4-16x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$x^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

إشارة $f''(x)$ $\quad - \ - \ - \ - \ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \ + \ + \ + \ + \ + \ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ - \ - \ -$

تحدب $\quad$ تقعر $\quad$ تحدب

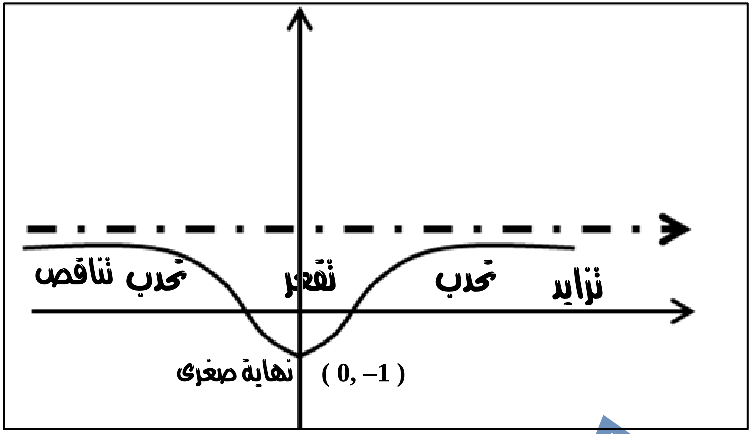
نجد صور قيم x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة الانقلاب حيث:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right),\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-1}{2}\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right)$$

منطقة التقعر الفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و مناطق التحدب $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ، $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

6) نعمل جدول بمجموعة من النقاط ونقط اضافية لإكمال الرسم :

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–1	1	x
$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	–1	0	0	y



8) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ...

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

1) أوسع مجال $R =$ لانها دالة كثيرة حدود

3) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x حيث :

$$2x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{or} \quad x = \mp\sqrt{2}$$

نكتب احداثي نقاط التقاطع مع محور السينات $(0 , 0) , (\sqrt{2} , 0) , (-\sqrt{2} , 0)$

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث نقاط التقاطع: $(0 , 0) \Leftarrow y = 0$

3) التناظر: $f(x) = 2x^2 - x^4$

نلاحظ ان $f(x) = f(-x)$ لذا الدالة متناظرة مع محور الصادات $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4$

نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل $-f(x) = -2x^2 + x^4$

4) لا توجد محاذيات لأنها دالة كثيرة حدود (ليست دالة نسبية) .

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$f'(x) = 4x - 4x^3$ اشارة $f'(x)$: $+ + + \; -1 \; - - - - \; 0 \; + + + + + \; 1 \; - - - -$

$$4x[1 - x^2] = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{or} \quad 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

نجد صور العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقط النهايات العظمى حيث :

نقطتي النهاية العظمى $f(-1) = 2(1) - 1 = 1 \Rightarrow (-1 , 1),\ f(1) = 2(1) - 1 = 1 \Rightarrow (1 , 1)$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لذا فاحدثي نقطة النهاية الصغرى : $f(0) = 0 \Rightarrow (0 , 0)$

مناطق التزايد $\{x : x > -1\}$ والفترة $(0 , 1)$ ومناطق التناقص $\{x : x < -\sqrt{2}\}$ والفترة $(-1 , 0)$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f''(x) = 4 - 12x^2 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

إشارة $f''(x)$

$$- - - \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad + + + \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad - - -$$

تحدب   تقعر   تحدب

نجد صور قيم x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احدثي نقط الانقلاب حيث :

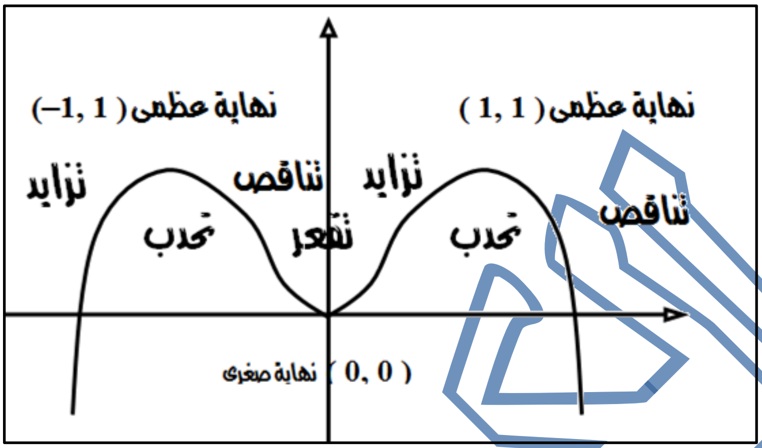
نقط الانقلاب $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2(\frac{1}{3}) - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ ، $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{5}{9} \Rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$

منطقة التقعر الفترة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ، مناطق التحدب $\{ x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \}, \{ x : x > \frac{1}{\sqrt{3}} \}$

6) نعمل جدول بكل النقاط التي حصلنا عليها :

x	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	–1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
y	0	0	0	1	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$

7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعات سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....



* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

$$10)\ f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

1) أوسع مجال (المقام ≠ الصفر لان المقام مجموع مربعين لذا المجال كل R) $x^2 + 3 \neq 0 \Rightarrow R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

أ) مع محور السينات نعوض $y = 0$ ونجد قيمة x وهنا غير ممكن لان: $\frac{6}{x^2+3} \neq 0$

لذا لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات .

ب) مع محور الصادات نعوض $x = 0$ ونجد قيمة y حيث $f(0) = \frac{6}{0+3} = 2$

لذا نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (0 , 2)

3) التناظر: $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

$$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3}$$ نلاحظ ان $f(x) = f(-x)$ لذا الالة متناظرة مع محور الصادات

$$-f(x) = \frac{-6}{x^2+3}$$ نلاحظ ان $-f(x) \neq f(-x)$ لذا الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل

4) المحاذيات :

أ) المحاذي العمودي (الشاقولي) لا يمكن لان : $\frac{6}{x^2+3} \neq 0$ (لا يوجد محاذي شاقولي)

ب) المحاذي الافقي (نضع الدالة بدلالة y ثم نضع المقام = صفر ونجد قيم المتغير):

$$y = \frac{6}{x^2+3} \Rightarrow y\,x^2 + 3y = 6 \Rightarrow y\,x^2 = 6 - 3y \Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y} \Rightarrow y = 0$$ (معادلة مستقيم

5) **نجد المشتقة الاولى ومنها مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ان وجدت

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3} = 6\,(x^2+3)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -6\,(x^2+3)^{-2}(2x)$$

$$\frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$+ + + \quad 0 \quad - - -$ اشارة $f'(x)$

نجد صورة العدد x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقطة النهاية العظمى حيث :

$f(0) = 2 \Rightarrow (0\ ,2)$ نقطة النهاية العظمى

مناطق التزايد $\{x : x < 0\}$ و مناطق التناقص $\{x : x > 0\}$

** نجد المشتقة الثانية ومنها مناطق التقعر والتحدب و نقاط الانقلاب ان وجدت حيث :

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)[2(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)[(-12(x^2+3)+(48x^2)]}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{[-12x^2-36+48x^2]}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0 \Rightarrow 36x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$+ + + \ -1 \ - - - \ 1 \ + + +$ إشارة $f''(x)$

تقعر تحدب تقعر

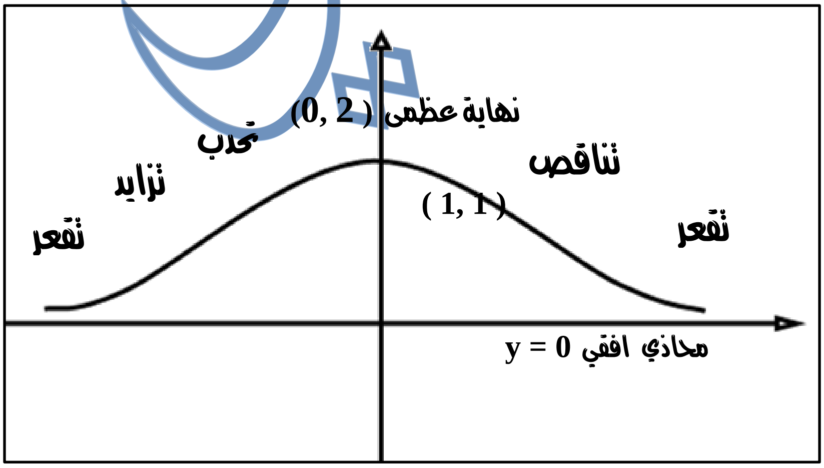
نجد صور قيم x بالتعويض بالدالة الاصلية لمعرفة احداثي نقط الانقلاب حيث :

$f(1) = \frac{6}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow (1, \frac{3}{2}), f(-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow (-1, \frac{3}{2})$ نقط انقلاب

مناطق التقعر $\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$ ، منطقة التحدب الفترة $(-1\ ,1)$

6) نعمل جدول بمجموعة النقاط :

X	0	−1	1
Y	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$



7) نرسم المخطط ونعين النقط مع مراعاة سلوك الدالة قبل وبعد كل نقطة حسب التزايد والتناقص والتقعر والتحدب مع المحاور ....

تطبيقات عملية حول القيم العظمى أو الصغرى

بعد أن تعرفنا على ايجاد النهايات (القيم) العظمى والصغرى واستخدمناها في رسم الدوال الان سنتطرق لوجه اخر من التطبيقات حول النهايات في مختلف العلوم والصناعات حيث لو اردنا رسم يأخذ اصغر مساحة او في حساب اقل كلفة او اقل زمن او اكبر حجم وغيرها من التطبيقات وسنتطرق لبعض هذه الحالات عبر مجموعة من الامثلة اضافة للتمارين ، ولحل اي سؤال من هذا النوع يجب مراعاة:

1) نتعرف على هذا النوع من الاسئلة اذا لاحظنا فيه احدى الكلمات التي تدل على (اكبر او اصغر).
2) نحاول ان نرسم مخططا مبسطا لتوضيح السؤال (ان امكن) نعين عليه معلومات السؤال.
3) نسمي المعلومات والمجاهيل بحروف مناسبة (الفرضية).
4) نكون دالة ترتبط بالقيمة المراد ايجادها (مساحة او حجم او بعد ..... و غيرها).
5) نكون علاقة تربط بين المتغيرات (ان احتجنا لذلك) للتقليل من عدد المجاهيل حيث تعوض في الدالة.
6) نشتق الدالة ونسوي المشتقة للصفر لإيجاد قيم المتغير المطلوب.
7) نختبر القيم لإشارة المشتقة الاولى أو اختبار المشتقة الثانية للنهايات (اذا كان هنالك اكثر من قيمة).
8) نعوض مرة اخرى في الدالة لإيجاد المطلوب . (وقد تختلف الامثلة عن بعضها قليلا)

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 1

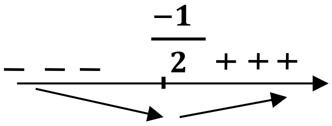
أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى مربعة يكون الناتج أصغر ما يمكن .

الحل لنفرض ان العدد المطلوب = x ، لذا فإن مربعه = x^2 ، والدالة التي ستكونها هي العدد + مربعة = اكبر ما يمكن

أي: $f(x) = x + x^2$

نشتق الدالة $f'(x) = 1 + 2x$

إشارة $f'(x)$



$1 + 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ (نساوي المشتقة للصفر ونجد قيم x) $\Rightarrow$ اي العدد هو = $\frac{-1}{2}$

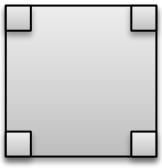
* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 2

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها ، ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟

الحل نفرض طول ضلع المربع الذي سنقتطعه من جوانب قطعة النحاس = x

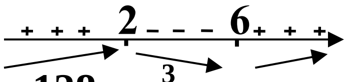
الصندوق على شكل شبه مكعب بلا غطاء قاعدته مربعة طولها بعد القص والطوي هو طول القطعة منقوصا منها لكل ضلع قطعتين طول كل منهما x فيصبح الطول $12 - 2x$ والارتفاع يمثل طول الجزء المطوي وهو $h = x$



$V = Ah \Rightarrow V = x\,(12 - 2x)^2$
$V' = x\,[\,2\,(12 - 2x)(-2)] + (12 - 2x)^2\,(1)$
$(12 - 2x)\,[-4x + (12 - 2x)] = 0 \Rightarrow (12 - 2x)\,(12 - 6x) = 0$

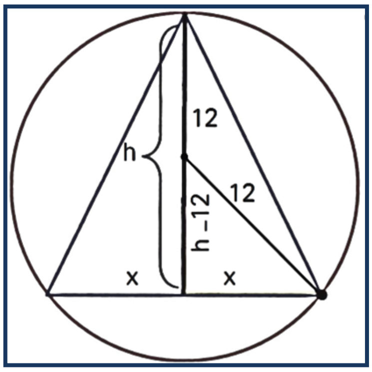
either $12 = 2x \Rightarrow x = 6$ تهمل or $12 = 6x \Rightarrow x = 2$

إشارة V'



$\therefore x = 2$ cm طول ضلع المربع المقطوع $\Rightarrow \therefore V = 2(12 - 4)^2 = 128$ cm^3

مثال الكتاب 3 أوجد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12 cm ثم برهن إن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.



الحل لنفرض إن بعدي المثلث و هما ارتفاعه = h وطول قاعدته = b = 2x

(المطلوب اكبر مثلث (مساحة) ولو استخدمنا دالة المساحة لوجدنا متغيرين هما القاعدة والارتفاع لذا وجب ايجاد علاقة بينهما للتخلص من احدهما لكي نشتق)

(من الشكل نلاحظ) نوجد علاقة بين المتغيرين وهي مبرهنة فيثاغورس حيث :

$$(12)^2 = (h-12)^2 + x^2 \Rightarrow 144 = h^2 - 24h + 144 + x^2$$

$$x^2 = 24h - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{24h - h^2} \ ....(1)$$ (علاقة)

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) \Rightarrow \therefore A = x\,h \ ....(2)$$ دالة المساحة نعوض (1)

$$A = h\sqrt{24h - h^2} \Rightarrow A = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

$$A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

$$\therefore \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0 \Rightarrow [\,72h^2 - 4h^3 = 0\,] \div 4$$

$$18h^2 - h^3 = 0 \Rightarrow h^2(18 - h) = 0$$

$h = 0$ يهمل or $h = 18 \Rightarrow \therefore h = 18$ cm نعوض في العلاقة (1) لإيجاد طول القاعدة

غالبا الاختبار على خط الاعداد غير ضروري
خصوصا واننا حصلنا على قيمة واحدة
للمتغير حيث لا يمكن ان يكون الارتفاع صفر

$$x = \sqrt{24(18) - (18)^2} = \sqrt{18(24-18)} = 6\sqrt{3}\ \text{cm} \Rightarrow \therefore b = 2x = 12\sqrt{3}$$ طول القاعدة

$$A_{\text{للمثلث}} = x\,h = (6\sqrt{3})(18) = 108\sqrt{3} \ ,\ A_{\text{للدائرة}} = r^2\pi = (12)^2\pi = 144\pi$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1999 الدور الثاني اذا كان نصف قطر كرة يساوي نصف قطر قاعدة اسطوانة قائمة وكان مجموع حجمي الكرة والاسطوانة $90\pi\ cm^3$ فأوجد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتي الكرة والاسطوانة اقل ما يمكن .3

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2000 الدور الاول abc مثلث فيه $ab = ac$ ، $ad \perp bc$ ، $bc = 12$ ، $ad = 20$ أوجد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث.

أسئلة وزارية واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

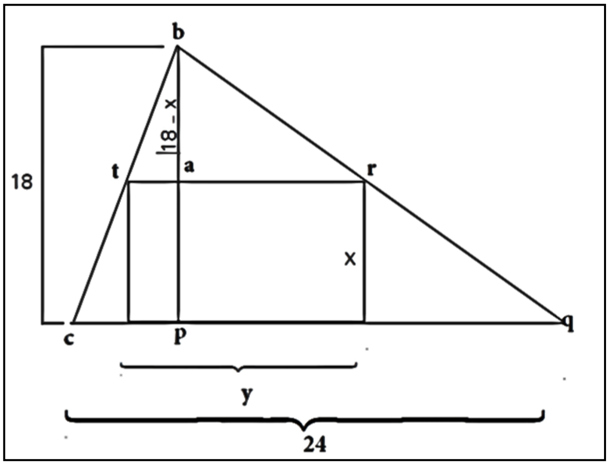
وزاري 2001 الدور الاول علبة اسطوانية الشكل مسدودة من نهايتيها ومساحتها السطحية $24\pi\ cm^2$ فأوجد ابعادها عندما يكون حجمها اكبر ما يمكن .

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 2007 الدور الاول اوجد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20 cm وارتفاعه 12 cm .

مثال الكتاب 4

أوجد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه يقعان على القاعدة والرأسين الباقيين يقعان على ساقيه.



الحل لنفرض ان بعدي المستطيل هما : x , y cm

(المطلوب اكبر مستطيل مساحة وعند ضرب الطول في العرض يكون لدينا دالة بمتغيرين نحاول ايجاد علاقة بينهما نعوض في الدالة ثم نشتق والعلاقة هنا هي تناسب الاضلاع في مثلثين متشابهين)

الدالة $A_{\text{المستطيل}} = x\,y$ ……..(1)

سنحاول ايجاد علاقة بين x , y ومن تشابه المثلثين $\Delta\, btr$, $\Delta\, bcq$

(يتشابه المثلثان لتساوي زواياهما المتناظرة (ثالث متوسط)) تتناسب ابعاد المثلثين أي :

$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bp} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{18-x}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18 - x) \ldots(2)$$ العلاقة نعوض في الدالة

$$A = x\,[\tfrac{4}{3}(18 - x)] \Rightarrow A = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

$$A' = \frac{4}{3}(18 - 2x) \Rightarrow \frac{4}{3}(18 - 2x) = 0\,] \div \frac{4}{3}$$

$$18 - 2x = 0 \Rightarrow x = 9\text{ cm}$$ نعوض في (2)

إشارة A' + + + 9 - - -

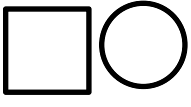
الاختبار غير ضروري خصوصا واننا حصلنا على قيمة واحدة للمتغير

$$y = \frac{4}{3}(18 - 9) = 12\text{ cm} \Rightarrow$$ ∴ ابعاد المستطيل هي 9 cm , 12 cm

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

مثال الكتاب 5

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 cm أثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.



الحل لنفرض ان طول ضلع المربع = x ونصف قطر الدائرة = r و الدالة دالة مجموع مساحتيهما = A

العلاقة (محيطي الدائرة والمربع = (60)

$$[\,4x + 2r\,\pi = 60\,] \div 2$$

$$2x + r\,\pi = 30$$

$$\therefore r = \frac{30-2x}{\pi} \ldots(2)$$

$$A = A_{\text{الدائرة}} + A_{\text{المربع}} \Rightarrow A = r^2\pi + x^2 \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A = \frac{(30-2x)^2}{\pi^2}\pi + x^2$$ نعوض (2) في (1) فنحصل:

$$A = \frac{1}{\pi}(30 - 2x)^2 + x^2$$

$$A' = \frac{2}{\pi}(30 - 2x)(-2) + 2x$$

$$\frac{-4}{\pi}(30 - 2x) + 2x = 0 \Rightarrow \frac{4}{\pi}(30 - 2x) = 2x$$

$$[\,4\,(30 - 2x) = 2x\,\pi\,] \div 2$$

$$60 - 4x = \pi\,x \Rightarrow x\,(4 + \pi) = 60$$

$$\therefore x = \frac{60}{4+\pi}\text{ cm}$$ نعوض في (2)

$$r = \frac{(30-(2)\frac{60}{4+\pi})}{\pi} = \frac{(30-\frac{120}{4+\pi})}{\pi} = \frac{(\frac{120+30\pi-120}{4+\pi})}{\pi} = \frac{\frac{30\pi}{4+\pi}}{\pi} = \frac{30}{4+\pi}\text{ cm} \Rightarrow \therefore x = 2r$$

مثال الكتاب 6

أوجد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ حيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة (0 , 4).

الحل لنفرض أن احداثي النقطة المطلوبة p (x , y) وهي تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$

$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$ .... (1) (قانون البعد بين نقطتين

$y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = y^2 - 3$ ....(2) (العلاقة معادلة القطع

$$S = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$S' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$$

$$\therefore \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0 \Rightarrow 4y-8=0 \Rightarrow y = 2$$

نعوض قيمة y في معادلة (2) لنجد قيم x

$x^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \therefore x = \mp 1 \Rightarrow (1,2), (-1,2)$ النقاط ∴

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1996 الدور الاول لتكن $y = \sqrt{x^2 - 3}$ فأوجد نقطة تنتمي للمنحني بحيث تكون اقرب ما يمكن من النقطة (0, 4)

أسئلة وزارية واجب

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

وزاري 1996 الدور الثاني مخروط دائري قائم طول مولده $54\sqrt{3}$ cm فأوجد ارتفاعه ليكون حجمه اكبر ما يمكن . 54

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

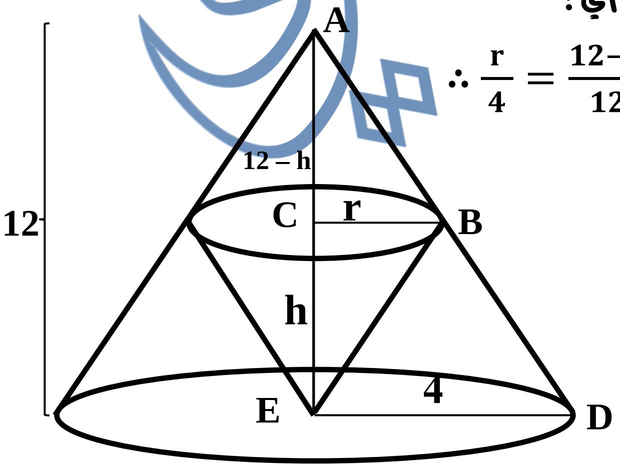
وزاري 2010 الدور الاول مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4 cm وارتفاعه 12 cm ، يراد قطع مخروط دائري منه يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الاصلي وقاعدته توازي قاعدة المخروط الاصلي فأوجد ابعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر ما يمكن .

الحل (الدالة هي دالة حجم المخروط ولكن لدينا متغيرين لذا نحاول ايجاد علاقة بينهما)

لنفرض ان نصف قطر المخروط المقطوع = r وارتفاعه = h وحجمه = V لذا فالدالة هي :

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ....(1) (الدالة

ومن تشابه المثلثين : Δ ADE ,Δ ABC نحصل على تناسب الابعاد اي :



$$\therefore \frac{r}{4} = \frac{12-h}{12} \Rightarrow r = \frac{12-h}{3} \Rightarrow 3r = (12-h) \Rightarrow h = 12-3r \ ...(2)$$

نعوض العلاقة (2) في الدالة (1) ونشتق أي:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 (12-3r) = \frac{\pi}{3}[3(4r^2 - r^3)] = \pi(4r^2 - r^3)$$

$$V' = \pi(8r - 3r^2) = 0 \,] \div \pi \Rightarrow r(8-3r) = 0$$

$\therefore r = 0$ تهمل or $r = \frac{8}{3}$ نعوض في العلاقة (2)

$$\therefore h = 12 - 3\left(\frac{8}{3}\right) = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$$

تمارين (6 – 3)

س1//أوجد عددين موجبين مجموعهما (75) وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

لنفرض ان العدد الاول = x والثاني = y و الدالة هي دالة حاصل ضربهما = K

(العلاقة : لدينا مجموعهما = 75) $K = xy^2$ ....(1)

$x + y = 75 \Longrightarrow x = 75 - y$ ....(2)

نعوض في الدالة $K = (75 - y)\, y^2 \Longrightarrow K = 75y^2 - y^3$

$K' = 150\, y - 3y^2 \Longrightarrow [150\, y - 3y^2 = 0\,] \div 3 \Longrightarrow y\,(\,50 - y\,) = 0$

نعوض في العلاقة $y = 50$ or $y = 0$ يهمل

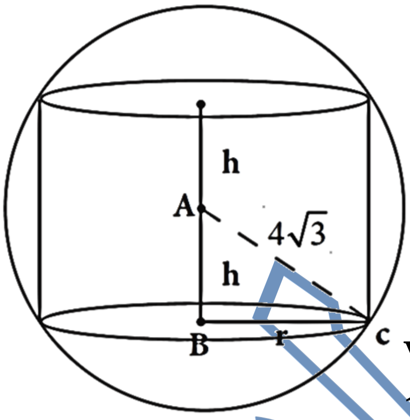
∴ العددين هما: $x = 75 - 50 = 25 \Longrightarrow 25\ ,\ 50$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س2//أوجد ارتفاع أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$ cm .

لنفرض ان ارتفاع الاسطوانة = 2h و نصف قطرها = r والدالة دالة حجم الاسطوانة = V أي :

الدالة $V = 2\pi r^2 h$ ....(1)



نجد علاقة بين المتغيرات (مبرهنة فيثاغورس) على المثلث ABC القائم في B :

نطبق مبرهنة فيثاغورس $h^2 + r^2 = (4\sqrt{3})^2$

نعوض في الدالة ونشتق $r^2 = 48 - h^2$ ....(2)

$V = 2\pi\,(\,48 - h^2)\, h \Longrightarrow V = 2\pi\,(\,48h - h^3\,)$

$V' = 2\pi\,(\,48 - 3h^2) \Longrightarrow 6\pi\,(\,16 - h^2) = 0\,] \div 6\pi$

∴ ارتفاع الاسطوانة هو : $16 - h^2 = 0 \Longrightarrow h = 4 \Longrightarrow \therefore 2h = 8cm$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

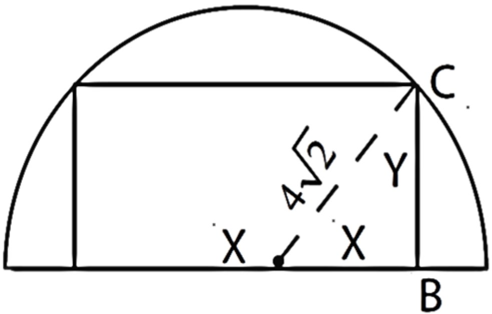
س3//أوجد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$ cm .

لنفرض ان طول المستطيل = 2x و عرض المستطيل = y والدالة دالة مساحة المستطيل = A أي :

الدالة $A = 2xy$ ....(1)

نجد علاقة بين المتغيرات (مبرهنة فيثاغورس) على المثلث القائم في B :

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2 \Longrightarrow y^2 = 32 - x^2$



نعوض في الدالة $y = \sqrt{32 - x^2}$ ....(2)

$A = 2x\,\sqrt{32 - x^2} = 2\,\sqrt{x^2[32 - x^2]} = 2\,\sqrt{32x^2 - x^4}$

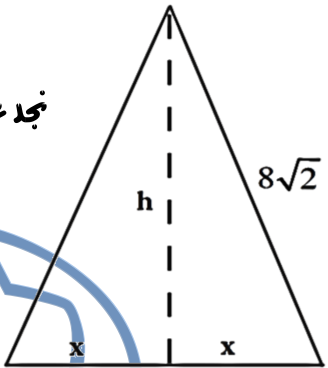
$A' = \dfrac{64x - 4x^3}{\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0 \Longrightarrow [\ 64\,x - 4x^3 = 0\ ] \div 4$

$16\,x - x^3 = 0 \Longrightarrow x(\,16 - x^2\,) = 0 \Longrightarrow x = 0$ يهمل or $x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$

∴ الطول $2x = 8$ cm $\Longrightarrow$ العرض $y = \sqrt{32 - 16} = 4$ cm

س4//أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}$ cm .

لنفرض ان طول قاعدة المثلث = $2x$ و ارتفاعه = h والدالة دالة مساحة المثلث ا = A أي :



$A = \frac{1}{2}(2x)(h) \Longrightarrow A = x\,h \;........(1)$ الدالة

$h^2 + x^2 = (8\sqrt{2})^2$: نجد علاقة بين المتغيرات (مبرهنة فيثاغورس) على المثلث القائم

$h^2 = 128 - x^2 \Longrightarrow h = \sqrt{128 - x^2} \;......(2)$ العلاقة

$A = x\sqrt{128 - x^2} \Longrightarrow A = \sqrt{128x^2 - x^4}$ نعوض العلاقة في الدالة

$A' = \frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} \Longrightarrow \frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} = 0 \Longrightarrow [\, 256x - 4x^3 = 0 \,] \div 4$

$64x - x^3 = 0 \Longrightarrow x\,(\,64 - x^2\,) = 0$

$\therefore x = 0$ يهمل $\quad$ or $x^2 = 64 \Longrightarrow x = 8$ نعوض في العلاقة

$\therefore A = (8)(8) = 64 \text{ cm}^2$ أكبر مساحة للمثلث

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س5//أوجد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته 16 cm^2

لنفرض ان بعدي المستطيل x , y ومحيط المستطيل = p والدالة دالة مساحة المستطيل = A أي :

$p = 2\,(x + y\,) \;..............(1)$ الدالة

$A = xy \Longrightarrow 16 = xy \Longrightarrow y = \frac{16}{x} \;........(2)$ $\quad$ العلاقة نعوض في (1)

$p = 2\,(x + \frac{16}{x}) \Longrightarrow p' = 2\,(\,1 + \frac{x(0) - (16)(1)}{x^2}\,)$

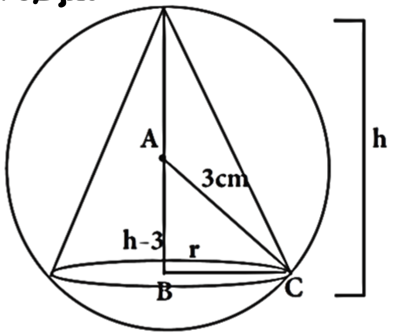
$[\, 2(\,1 + \frac{-16}{x^2}\,) = 0\,] \div 2 \Longrightarrow 1 = \frac{16}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4 \;\; (2)$ نعوض في

$y = \frac{16}{4} = 4 \Longrightarrow p = 2\,(4 + 4) = 16 \text{ cm}$ $\quad$ $\therefore$ محيط المستطيل هو :

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س6//أوجد حجم أكبر مخروط قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm

لنفرض ان ارتفاع المخروط = h و نصف قطره = r والدالة دالة حجم المخروط = V



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \;............(1)$ الدالة

$9 = (\,h - 3\,)^2 + r^2 \Longrightarrow 9 = h^2 - 6h + 9 + r^2$ العلاقة

$r^2 = 6h - h^2 \Longrightarrow r = \sqrt{6h - h^2} \;......(2)$ $\quad$ نعوض في (1)

$V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h \Longrightarrow V = \frac{\pi}{3}\;(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) \Longrightarrow [\, \frac{3\,\pi}{3}(4h - h^2) = 0 \;\,] \div \pi \Longrightarrow h\,(4 - h) = 0$

$\therefore h = 0$ يهمل $\quad$ or $h = 4$ $\quad$ نعوض في (2)

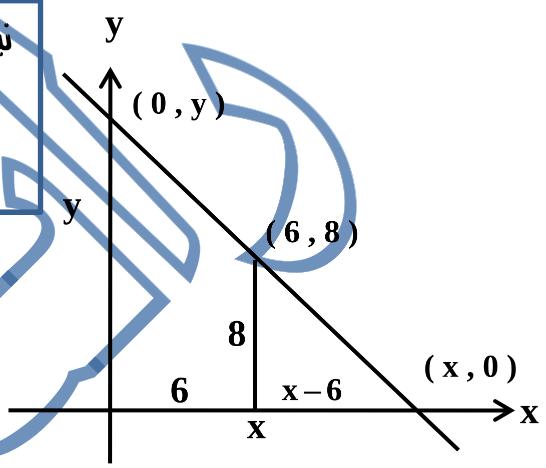
$\therefore r = \sqrt{24 - 16} = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \therefore V = \frac{1}{3}\pi\,(2\sqrt{2}\,)^2(4) = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$

س7//أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (8 , 6) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث

(لإيجاد معادلة مستقيم نحتاج نقطة وهي لدينا وميل المستقيم وهو غير متوفر لذا سنحاول ايجاده بتوفير نقطة اخرى تنتمي للمستقيم لنجد الميل من خلال نقطتين)

سنفرض ان نقطتي التقاطع بين المستقيم والمحورين هما $(0 , y)$ ، $(x , 0)$ لذا فان قاعدة المثلث $= x$ و ارتفاعه $= y$ والدالة دالة مساحة المثلث A أي :

نبحث عن علاقة بين المتغيرين
وهي علاقة تشابه مثلثات
ومن التشابه ينتج أن :



$A = \frac{1}{2}\ x\ y$ ....الدالة

$\frac{x}{x-6} = \frac{y}{8} \Rightarrow y\ (x - 6\ ) = 8x$

$\therefore y = \frac{8x}{x-6}$ .... العلاقة نعوض في الدالة

$A = \frac{1}{2}(\ x\ )\frac{8x}{x-6} \quad \Rightarrow A\ = \frac{4x^2}{x-6}$

$A^{/} = \frac{(x-6)(8x)-4x^2}{(x-6)^2} \quad \Rightarrow \frac{8x^2-48x-4x^2}{(x-6)^2} = 0$

$\frac{4x^2-48x}{(x-6)^2} = 0 \Rightarrow [4x^2 - 48x = 0\ ]\div 4 \Rightarrow x(x - 12\ ) = 0$

$\therefore x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ يهمل $\ or\ x = 12 \Rightarrow \therefore (\ x\ , 0\ ) = (\ 12\ , 0\ )$

اصبح لدينا نقطة جديدة يمر بها المستقيم
لذا نجد الميل باستخدام النقطتين

$m\ = \ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{8\ -0}{6\ -12} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

$y - y_1 = m\ (\ x - x_1\ )$: معادلة المستقيم هي

$y - 8\ = -\frac{4}{3}(\ x - 6\ ) \Rightarrow 3y - 24\ = - 4x + 24 \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س8//أوجد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم أوجد محيطه .

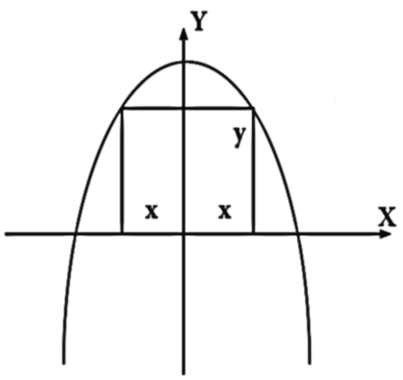
لنفرض إن بعدي المستطيل $2x$, y والدالة دالة مساحة المستطيل $A =$ ومحيطه $P =$

$A = 2xy$ …….(1) الدالة

$y = 12 - x^2$ العلاقة نعوض في (1)

$A = 2x\ (\ 12 - x^2\ ) \Rightarrow A = 24\ x - 2\ x^3$

$A^{/} = 24 - 6\ x^2 \Rightarrow [\ 24 - 6x^2 = 0\ ] \div 6 \Rightarrow 4 - x^2 = 0$



$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \ 2x=4$ cm البعد الأول نعوض قيمة x في (2)

$y = 12 - 4 \Rightarrow y = 8$ cm

$\therefore P = 2\ (2x + y) \Rightarrow P = 2\ (\ 4 + 8\ ) = 24$ cm المحيط

س9//أوجد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 cm و طول قطر قاعدته 12 cm .

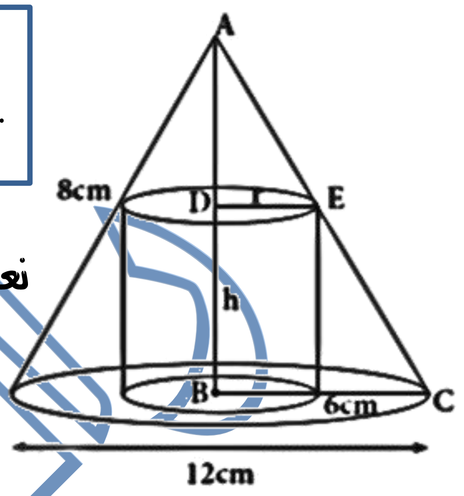
لنفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h و نصف قطرها = r والدالة دالة حجم الاسطوانة = V

$V = \pi r^2 h$ ....(1) (دالة)

طول قطر قاعدته 12 cm
∴ نصف قطر قاعدته 6 cm

من تشابه المثلثين Δ ABC ,Δ ADE

تتناسب اضلاعهما أي : $\therefore \frac{r}{6} = \frac{8-h}{8}$



$8r = 6(8-h) \Rightarrow r = \frac{3}{4}(8-h)$......(2) نعوض في (1)

$V = \pi\left[\frac{3}{4}(8-h)\right]^2 h = \frac{9\pi}{16}\ h(64 - 16h + h^2)$

$V = \frac{9\pi}{16}(64h - 16h^2 + h^3)$

$V' = \frac{9\pi}{16}(64 - 32h + 3h^2) = 0\ ] \div \frac{9\pi}{16}$

$3h^2 - 32h + 64 = 0 \Rightarrow (3h-8)(h-8) = 0$

$\therefore h = 8$ تهمل or $3h = 8 \Rightarrow h = \frac{8}{3}$ cm نعوض في (2)

$r = \frac{3}{4}\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{24-8}{3}\right) = \frac{16}{4} = 4$ cm

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

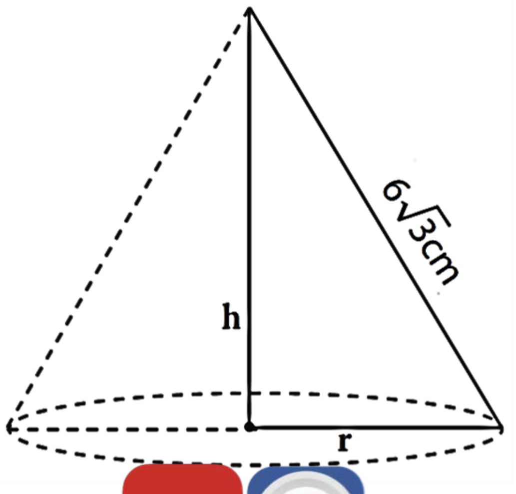
س10//أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين .

لفرض ان ارتفاع المخروط = h نفرض نصف قطر المخروط = r وحجمه = V لذا فالدالة هي :

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ....(1) (الدالة)

$(6\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2$ العلاقة مبرهنة فيثاغورس

$r^2 = 108 - h^2$ ......(2) نعوض في (1)



$V = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) \Rightarrow \left[\frac{\pi}{3}(3)(36 - h^2) = 0\ \right] \div \pi$

$36 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$ cm

$r^2 = 108 - h^2 = 108 - 36 = 72$ نعوض في (1)

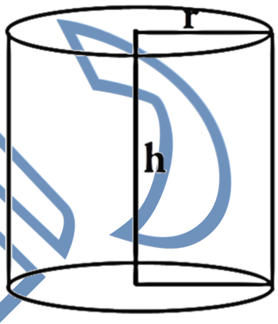
$\therefore V = \frac{\pi}{3}(72)(6) = 144\pi$ cm^3

س11//علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi)cm^3$ فأوجد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها أقل ما يمكن .

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h و نصف قطرها = r والدالة دالة مساحة جانبية + قاعدة الاسطوانة = P

$P = 2\pi r h + \pi r^2$ ....الدالة

$V = \pi r^2 h \Rightarrow 125\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{125}{r^2}$ .... العلاقة حجم (السعة) نعوض في الدالة



$P = 2\pi r \frac{125}{r^2} + \pi r^2 \Rightarrow P = 2\pi \frac{125}{r} + \pi r^2$

$P' = 2\pi \frac{-125}{r^2} + 2\pi r \Rightarrow [\, 2\pi \frac{-125}{r^2} + 2\pi r = 0 \,] \div 2\pi$

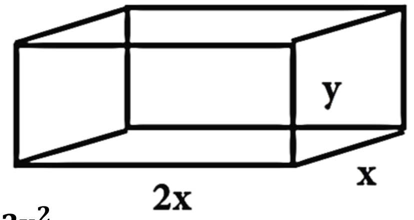
$\frac{-125}{r^2} + r = 0 \,]\, (r) \Rightarrow -125 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = 125$

$\therefore r = 5\text{ cm} \Rightarrow h = \frac{125}{25} = 5\text{ cm}$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

س12//خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته 108 cm^2 فأوجد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علما أن الخزان ذو غطاء كامل .

نفرض ان العرض = x لذا فطول القاعدة = 2x و الارتفاع = h والدالة حجم متوازي السطوح المستطيلة = V



$V = (2x)(x)\,h \Rightarrow V = 2x^2 h$ .... الدالة

$A = 2(\,2x + x\,)\,h + 4x^2$ العلاقة المساحة الكلية

$[\, 108 = 6xh + 4x^2 \,] \div 2 \Rightarrow 3xh + 2x^2 = 54$

$3xh = 54 - 2x^2 \Rightarrow h = \frac{54-2x^2}{3x}$ .....(*) نعوض في الدالة

$V = 2x^2 \left(\frac{54-2x^2}{3x}\right) \Rightarrow V = \frac{2}{3}(\,54x - 2x^3\,)$

$V' = \frac{2}{3}(\,54 - 6x^2\,) \Rightarrow \frac{2}{3}(\,54 - 6x^2\,) = 0 \,] \div \frac{2}{3}$

$54 = 6x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ نعوض في (*)

$h = \frac{54-2(3)^2}{3(3)} = \frac{54-18}{9} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow$ ∴ طول القاعدة $2x = 6cm$ وعرضها $3cm$ والارتفاع $4cm$

* ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ *ℜ * ℜ *http://raeed.mathsboard.com * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ * ℜ

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...

رحلة التفوق في السادس

رحلة التفوق في السادس

telegram.me/A_M_Z_F

رحلة التفوق في السادس

www.instagram.com/rt_edu

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود

ا.د مينا الاحمد

ا.د اشرف الوائلي