DELPRØVE 1 MATEMATIK A

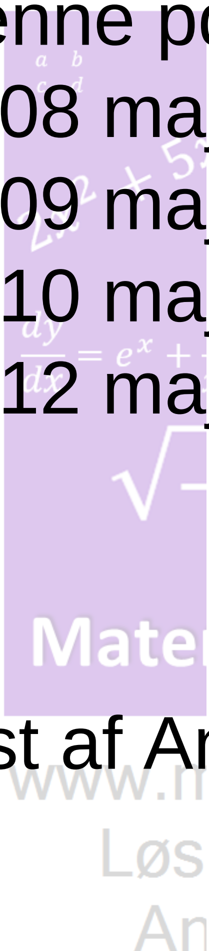
Denne pdf indeholder følgende:

2008 maj

2009 maj

2010 maj

2012 maj 25.



Løst af Anders J. & Mark K.

KUN TIL INSPIRATION!

Følgende opgaver i delprøve 1 er løst i hånden, hvorefter det er skrevet ind i Word, så det er lettere at læse og evt. kommentere på udregningerne.

Opgave 1:

I den her opgave skal vi bestemme de ortogonale vektorer.

$$\vec{a} = \binom{t-2}{5}, \qquad \vec{b} = \binom{3}{-3}$$

Dette gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned}
&(t-2)\cdot 3 + 5\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow \\
&3t - 6 - 15 = 0 \Leftrightarrow \\
&3t = 21 \Leftrightarrow \\
&t = 7
\end{aligned}$$

Vi indsætter tallet t ind i vektorerne.

$$\begin{aligned}
&(7-2)\cdot 3 = 15 \\
&5\cdot(-3) = -15 = 0 \\
&15 + (-15) = 0
\end{aligned}$$

Så vi kan nok ikke komme udenom, at det passer.

Opgave 2:

I den her opgave skal vi reducere. Det er en smal sag.

$$m = 1, \qquad n = 2$$

$$\frac{5\cdot 1}{2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2} = \frac{5}{2+6} = \frac{5}{8}$$

Nu skal vi reducere.

$$\frac{5m}{2m^2 + 3mn} = \frac{5m}{m(2m+3n)} = \frac{5}{2m+3n}$$

Som er løsningen.

Opgave 3:

I den her opgave skal vi lave monotoniforhold.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Vi differentiere funktionen og sætter den = 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Sættes = 0

$$3x^2 - 6x = 0$$

Kan løses ved hjælp af nulreglen.

$$x(3x - 6) = 0$$

$$x = 0$$

Vi løser førstegradsligningen.

$$3x - 6 = 0$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Vi kunne også løse den ved diskriminanten. Nu finder vi ud af hvornår funktionen er voksende samt aftagende. Jeg vælger følgende tal: -1,1,3 som jeg indsætter i $f'(x)$.

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^1 - 6 \cdot 1 = -3$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9$$

Så nu kan vi tegne monotonilinjen.

x		0		2	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Så hermed er konklusionen for f i følgende:

Funktionen f er voksende i intervallet $]-\infty; 0]$
Funktionen f er aftagende i intervallet $[0; 2]$
Funktionen f er voksende i intervallet $[2; \infty[$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 4:

Integralregning:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Her definerer vi t,

$$t = x^2 + 1$$

Vi isolerer dx i følgende og får;

$$dx = \frac{1}{2x}\,dt$$

Vi indsætter det i integralet igen.

$$\int_0^1 \frac{2x}{t} \cdot \frac{1}{2x}\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$$

Vi finder stamfunktionen til t samt nye grænseværdier ved indsættelse af 0 og 1 i t som vi definerede. Men først stamfunktion:

$$\ln(t)$$

Nu finder vi de nye grænseværdier.

$$0^2 + 1 = 1 \wedge 1^2 + 1 = 2$$

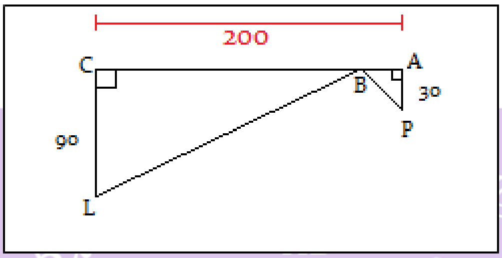
Så vi finder arealet.

$$[\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

Som er arealet og det ønskede.

Opgave 5:

Geometri:



Vi regner forstørrelsesfaktoren:

$$k = \frac{|CL|}{|AP|} = \frac{90}{30} = 3$$

Nu regner vi det ukendte stykke, nemlig $|AB|$. Vi løser derfor en ligning.

$$\frac{|AC| - x}{3} = \frac{200 - x}{3}$$

Vi løser en ligning:

$$3x = 200 - x \Leftrightarrow$$
$$4x = 200 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{200}{4} \Leftrightarrow$$
$$x = 50$$

Så vi kender altså afstanden $|AB|$ ved at trække 50 fra $|AC|$. Dvs. $200 - 50 = 150$

Vi kan eftertjekke ved at gange $|AB|$ med k. Derfra vil vi få 150 som altså er $|BC|$.

Følgende opgaver i delprøve 1 er løst i hånden, hvorefter det er skrevet ind i Word, så det er lettere at læse og evt. kommentere på udregningerne.

Opgave 1:

I den her opgave skal vi bestemme de ortogonale vektorer.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Dette gøres på følgende måde:

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot t = 0 \Leftrightarrow$$
$$6 + 4t = 0 \Leftrightarrow$$
$$4t = -6 \Leftrightarrow$$
$$4t = -6 \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

Vi indsætter tallet t ind i vektorerne.

$$3 \cdot 2 = 6$$
$$4 \cdot (-1.5) = -6$$
$$6 + (-6) = 0$$

Så vi kan nok ikke komme udenom, at det passer.

Opgave 2:

I den her opgave skal vi reducere. Det er en smal sag.

$$(p - 2q)^2 + 4pq - (p - q)(p + q)$$

Jeg splitter den op.

$$(p - 2q)^2 + 4pq - (p - q)(p + q)$$

Først den røde:

$$p^2 - 4pq + 4q^2$$

Nu den blå:

$$-p^2 - pq + pq + q^2$$

Fortsættes næste side

Vi samler det op:

Den røde farve viser, at de går ud med hinanden.

$$p^2 - 4pq + 4q^2 + 4pq - p^2 + q^2 = 5q^2$$

Så svaret er $5q^2$.

Opgave 3:

I den her opgave skal vi finde en regneforskrift. Punkterne er givet ved:

$$f(4) = 3, \qquad f(6) = 27$$

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Vi beregner a.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[6-4]{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

Vi beregner b.

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{3^4} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$$

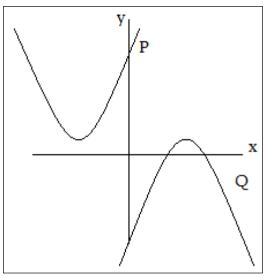
Så vores forskrift ser sådan ud:

$$f(x) = \frac{1}{27} \cdot 3^x$$

Opgave 4:

Parablerne P og Q.

Følgende for parabel P:



$$a > 0$$
$$c > 0$$
$$d < 0$$

Fortsættes næste side

P: Forklaring: $a > 0$ fordi parablens 'ben' vender opad, dvs. positiv værdi. $c > 0$ fordi parablen skærer y-aksen på den positive side. Altså positiv y-værdi. $d < 0$ fordi den ikke rammer x-aksen. Derved ingen rødder inden for alle reelle tal $\mathbb{R}$. Dette kan regnes inden for de komplekse tal $\mathbb{C}$.

Følgende for parabel Q:

$$a < 0$$
$$c < 0$$
$$d > 0$$

Q: Forklaring: $a < 0$ fordi parablens 'ben' vender nedad, dvs. negativ værdi. $c > 0$ fordi parablen skærer y-aksen på den negative side. Altså negativ y-værdi. $d < 0$ fordi den rammer x-aksen to steder. Derved er løsningen indenfor de reelle tal $\mathbb{R}$.

Opgave 5:

I den her opgave skal vi finde stamfunktion og arealet af følgende integraler.

$$\int (6x^2 + 2x)dx \ og \ \int_0^1 5x^4 \cdot e^{x^5+1}dx$$

Vi starter med den første. Vi omdøber den til $F(x)$.

$$F(x) = 2x^3 + x^2 + k$$

Vi går i gang med den anden integral.

$$\int_0^1 5x^4 \cdot e^{x^5+1}dx$$

Vi definerer $t = x^5 + 1$. Vi differentiere den.

$$dx = \frac{1}{5x^4}dt$$

Dette indsættes i integralet.

$$\int_0^1 5x^4 \cdot e^t \cdot \frac{1}{5x^4}dt \Leftrightarrow \int_0^1 e^t dt$$

Vi finder stamfunktion til t.

$$\frac{e^t}{\ln(e)} = \frac{e^t}{1}$$

Vi finder nye grænseværdier til integralet ved at indsætte 0 og 1 i t.

$$0^5 + 1 = 1 \wedge 1^5 + 1 = 2$$

Som er de nye værdier.

Fortsættes næste side

$$\left[\frac{e^t}{1}\right]_1^2 = \left[\frac{e^2}{1}\right] - \left[\frac{e^1}{1}\right] = e^2 - e^1 = e^2 - e$$

Som er løsningen.

Følgende opgaver i delprøve 1 er løst i hånden, hvorefter det er skrevet ind i Word, så det er lettere at læse og evt. kommentere på udregningerne.

Opgave 1:

I den her opgave skal vi reducere. Blot en smal sag.

$$(a+2b)^2-(a+2b)(a+b)$$

Jeg deler den op.

$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$$

$$-(a+2b)(a+b)=-a^2-ab-2ab-2b^2$$

Jeg samler dem op.

$$a^2+4ab+4b^2-a^2-3ab-2b^2=$$
$$ab+2b^2$$

Som er det ønskede.

Opgave 2:

Ligningssystemet:

$$x-2y=-2 \tag{1}$$

$$3x-y=9 \tag{2}$$

Vi starter med (1)

$$x=2y-2$$

Dette indsættes i (2)

$$\begin{aligned}
&3(2y-2)-y=9 \Leftrightarrow\\
&5y-6=9 \Leftrightarrow\\
&5y=15 \Leftrightarrow\\
&\frac{5y}{5}=\frac{15}{5} \Leftrightarrow\\
&y=3
\end{aligned}$$

Fortsættes næste side

Vi indsætter y i (1)

$$x - 2(3) = -2 \Leftrightarrow$$
$$x = 4$$

Så derfor er løsningerne til ligningssystemet:

$$x = 4 \wedge y = 3$$

Opgave 3:

Her skal vi differentiere $f(x)$:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} + 15x^2$$

Her ønskes $f'(2)$ bestemt. Vi indsætter 2 i $f'(x)$.

$$f'(2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot 2^2 = 61$$

Som er det ønskede.

Opgave 4:

Her skal vi finde koordinatsættet til kuglen.

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 = 6$$

Vi omformer

$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + (z-0)^2 = 6 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 16$$

Så koordinatsættet er følgende:

$$C(3,1,0) \text{ og } r = 4^2$$

Opgave 5:

Her skal vi finde ud af, om løsningen til differentialligningen passer.

$$y' = y + \frac{y}{x} - 3x$$

Hvor $f(x) = x \cdot e^x + 3x$

Her differentierer vi $f(x)$.

$$f'(x) = (x \cdot e^x) + (1 \cdot e^x) + 3 \Leftrightarrow x \cdot e^x + e^x + 3$$

Dette indsætter vi i y'. Hvor $f(x)$ indsættes i y.

$$x \cdot e^x + e^x + 3 = x \cdot e^x + 3x + \frac{x \cdot e^x + 3x}{x} - 3x \Leftrightarrow$$
$$x \cdot e^x + e^x + 3 = x \cdot e^x + \frac{x \cdot e^x + 3x}{x} \Leftrightarrow$$
$$x \cdot e^x + e^x + 3 = x \cdot e^x + \frac{x(e^x + 3)}{x} \Leftrightarrow$$
$$x \cdot e^x + e^x + 3 = x \cdot e^x + e^x + 3$$

Så den passer vidst meget godt.

Opgave 6:

Her skal vi finde k.

$$2x^2 - 3x + k = 0$$

Vi sætter $d = 0$, pga. en løsning.

$$(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \Leftrightarrow$$
$$9 - 8k = 0 \Leftrightarrow$$
$$-8k = -9 \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{9}{8}$$

Så

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$$

Er løsningen.

Følgende opgaver i delprøve 1 er løst i hånden, hvorefter det er skrevet ind i Word, så det er lettere at læse og evt. kommentere på udregningerne.

Opgave 1:

I den her opgave skal vi reducere. Blot en smal sag.

$$(a-b)(a+b)-2a^2+b^2$$

Vi reducerer.

$$a^2+ab-ab-b^2-2a^2+b^2$$

Vi forkorter den.

$$-a^2$$

Hvilket er løsningen.

Opgave 2:

I den her opgave skal vi løse ligningssystemet.

$$l: 2x-3y=1 \tag{1}$$

$$m: x+6y=8 \tag{2}$$

Vi starter med (2)

$$x+6y=8 \Leftrightarrow x=8-6y$$

Vi indsætter det i (1)

$$\begin{aligned}
&2(8-6y)-3y=1 \Leftrightarrow\\
&16-12y-3y=1 \Leftrightarrow\\
&16-15y=1 \Leftrightarrow\\
&-15y=-15 \Leftrightarrow\\
&15y=15 \Leftrightarrow\\
&y=1
\end{aligned}$$

Vi indsætter $y=1$ i (2)

Fortsættes næste side

$$2x - 3 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$2x - 3 = 1$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Så vi kan regne efter ved at sætte tallene ind.

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 6y = 8$$

Vi indsætter hhv. x og y.

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$$
$$2 + 6 \cdot 1 = 8$$

Hvilket passer, så koordinatsættet er som følgende:

$$x = 2, \qquad y = 1$$

Som er løsningen.

Opgave 3:

I den her opgave skal vi finde afstanden. Ved aflæsning er afstanden fra punkt A til midten = 2. Fra midten til C er afstanden 2. Herved en total længde på 4. Vi kender hypotenusen som er 5. Vi benytter Pythagoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi indsætter de relevante tal i formlen.

$$a^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 = 5^2 - 4^2 \Leftrightarrow$$
$$a = \sqrt{25 - 16} \Leftrightarrow$$
$$a = \sqrt{9} \Leftrightarrow$$
$$a = 3$$

Som er den totale højde, når vippen rammer jorden. Målt i meter.

Opgave 4:

Andengradsligningen er givet ved:

$$3x^2 - 2x + c = 0$$

De kræver én løsning. Dvs.

$$d = 0$$

Vi løser den ved indsættelse af tallene a, b og c.

Fortsættes næste side

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0 \Leftrightarrow$$
$$4 - 12c = 0 \Leftrightarrow$$
$$12c = 4$$
$$\frac{12c}{12} = \frac{4}{12} \Leftrightarrow$$
$$c = \frac{4}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3}$$

Vi indsætter c.

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

Opgave 5:

Vi løser differentialligningen og ser, om den passer med $f(x)$.

Lad $f(x) = (x+1) \cdot e^x$ være givet. Differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}$$

Vi undersøger, om løsningen passer. Først differentierer vi $f(x)$.

$$f'(x) = (x+1) \cdot e^x + 1 \cdot e^x \Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x + e^x$$

Vi indsætter det på $\frac{dy}{dx}$'s plads samt $f(x)$ ind på y's plads.

$$(x+1) \cdot e^x + e^x = (x+1) \cdot e^x + \frac{(x+1) \cdot e^x}{x+1} \Leftrightarrow$$
$$(x+1) \cdot e^x + e^x = (x+1) \cdot e^x + e^x$$

Den passer.

Opgave 6:

Ved aflæsning af figuren, ses det, at f er voksende, aftagende og voksende. Derved skal den afledte kunne passe til f, dvs. den eneste der gør det er g idet den er aftagende og voksende.