G10-Szinezes-EA-200404.tex, 200406.

10. Gráfok színezései

Dr. Szalkai István

2020.04.06.

"színezés" (coloring) $\approx$ "számozás" (numbering), DE $\neq$ célból

Csúcsszínezések

$G = (V, E)$ *tetszőleges egyszerű* gráf.

Definíció *Tetszőleges* $f : V \to \mathbb{N}$ **csúcsszínezés** (vertex coloring)**.**

k -színezés *ha* $f : V \to \{1, ..., k\}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 1)$.

jó(l)színezés (well coloring), *ha*

$$\forall x, y \in V \qquad \{x, y\} \in E \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y) \ . \qquad \square$$

Megjegyzés: Rögzített $k \in \mathbb{N}$ és $f : V \to \{1, ..., k\}$ *jól*színezés esetén

$$\left\{ f^{-1}(i) \subseteq V : i = 1, ..., k \right\}$$

a csúcsok egy partíciója: az egyes $f^{-1}(i)$ osztályok élt nem tartalmaznak:

Állítás: *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* G k *-pólusú* <=> *létezik* k -jól*színezése.* $\square$

<u>Definíció</u> G **<u>kromatikus szám</u>***<u>a</u>* (chromatic number) = $\underline{\chi(G)}$
= *a* legkisebb $k \in \mathbb{N}$: *létezik* k *-színnel jólszínezés*:

$$\chi(G) \quad := \quad \min \; \{k \in \mathbb{N} \;:\; \text{van} \;\; f : V \to \{1, ..., k\} \;\; \text{jólszínezés} \;\} \quad .$$

G **k -kromatikus** *ha* $\chi(G) = k$. $\square$

Megjegyzés: kromatikus szám (chromatic number) $\neq$ színezési szám = coloring number !!!

Algoritmus: van: *összes* $f : V \to \{1, ..., k\}$ csúcsszínezést ki kell próbálni az *összes* $k \le n$ számra!

DE ez exponenciálisan lassú: $\mathcal{O}\left(1^n + 2^n + ... + n^n\right)$!

Tétel: $\chi(G) =?$ $\mathcal{NP}$ -teljes probléma.
Még ha tudjuk is, hogy $\chi(G) \le k$, akkor is $\chi(G)$ *pontos* értéke még mindig $\mathcal{NP}$ -teljes.
Kivétel: $\chi(G) \stackrel{?}{=} 2$ -re van gyors algoritmus - következő fejezetben !!!
($\chi(G) = 1$ házi feladat)

Definíció: $\mathbf{D(G)} := G$ maximális *fokszáma.* $\square$

Tétel (Brooks, 1941)**:** *G összefüggő, nem páratlan kör és nem teljes gráf, akkor*

$$\chi(G) \le D(G) \; . \qquad \square$$

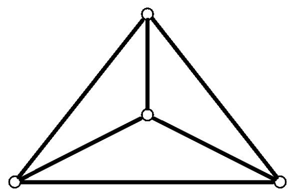
Egyéb kérdés pl: *nagy* kromatikus számának mi lehet az oka? DE :
Tétel: *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *létezik* G nem *tartalmaz* C_3 -at, de $\chi\,(G) \ge k$.
Erdős Pál (1959) valószínűségszámítási módszerrel. $\square$
Tétel: *Tetszőleges* $k, l \in \mathbb{N}$ *létezik* G : $g(G) \ge l$ és $\chi\,(G) \ge k$. $\square$
($g(G)$ = girth(G).)

Síkgráfok

Definíció: (*Síkbeli*) **térkép** = *a sík egészének / korlátos tartományának tetszőleges olyan partíciója, amelyben az osztályok szintén tartományok.*

Térkép **duális gráfja** = *csúcsok a térkép tartományai, élek a szomszédok.*

Térkép **színezése, kromatikus száma** = *duális gráfjának színezése, kromatikus száma.* □



Tétel (**Ötszíntétel**, Heawood 1890, Kempe 1879 ötletével):

Minden síkba rajzolható gráf kromatikus száma legfeljebb *öt.*

Bizonyítás: lásd tankönyv. □

Sejtés (Négyszínsejtés, Guthrie 1852): legfeljebb *négy.* □

A bizonyításhoz "csak" véges, de nagyon sok gráfot kell ellenőrizni.

1976 egy szuperszámítógép több mint 1000 órás futtatásával sikerült.

Azóta több javítás matematikai és számítástechnikai részről, több szakember !!!

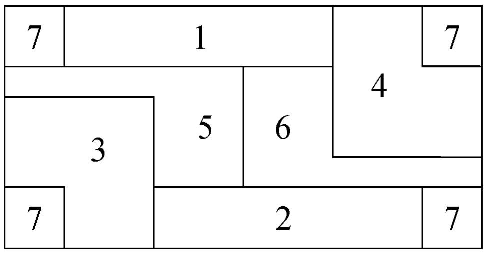
https://hu.wikipedia.org/wiki/Négyszín-tétel

Tétel (**Négyszíntétel**, Kenneth Appel-Wolfgang Haken, 1976):

Minden síkba rajzolható gráf kromatikus száma legfeljebb *négy.* □

Algoritmusok: $\mathcal{O}(n^2)$, 1996-ban Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour és Robin Thomas

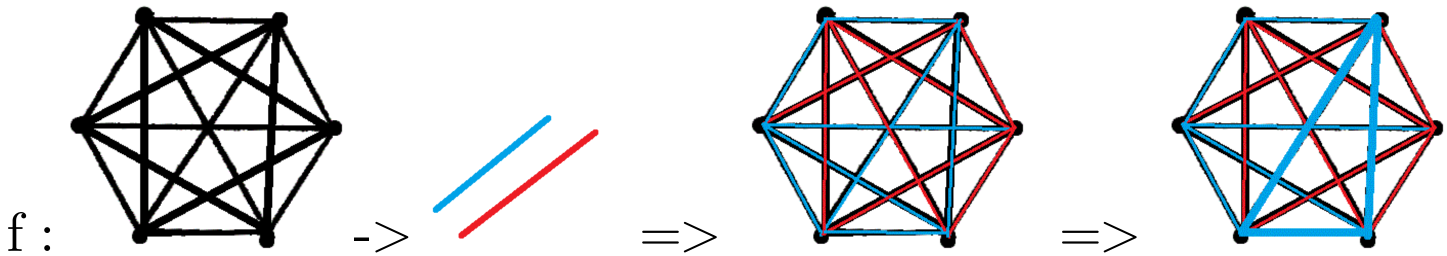
Egyéb felületek (tórusz, Moebius-szalag, perec stb.) -re rajzolható gráfok kromatikus száma már a XIX szd. végén ismert volt, például tóruszra rajzolható $\chi(G) \leq 7$.



Élszínezések

Ramsey-elmélet

" *Minden hattagú társaságban* vagy *van 3 fő, akik közül egyikük sem ismeri a másik kettőt,* vagy *van olyan 3 fő, akik közül bármely kettő ismeri egymást.* "



$$K_6 \to (K_3, K_3)_k^2$$

Definíció: i) $G = (V, E)$, *tetszőleges* $f : E \to \mathbb{N}$ **élszínezés,**

k -színezés *ha* $f : E \to \{1, ..., k\}$ $(k \in \mathbb{N}$ *rögzített*$)$.

ii) $H\,(W, F) \subseteq G$ **homogén részgráf** (f -re nézve, i_0 színben),

ha H *éleinek színe ugyanaz*:

$$\forall e \in F \qquad f(e) = i_0\ .$$

iii) **Erdős-féle nyíl** (arrow) *reláció*:

$$G \to (H_1, ..., H_k)_k^2$$

" *G gráf tetszőleges k -színezése esetén létezik* valamely $i \le k$ *színre a H_i gráffal izomorf, az i színben homogén részgráfja G -nek.*" $\square$

Tétel (Ramsey, 1930, Frank Plumpton **Ramsey** (1903-1930) angol matematikus):

$$K_{\mathbb{N}} \to (K_{\mathbb{N}}\ ,\ K_{\mathbb{N}})^2_2\ . \quad \square$$

Következmények: (i) *Tetszőleges* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *sorozatnak van monoton részsorozata.*

(v) (van der Waerden, 1927) *Tetszőleges* $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$ *felbontás esetén létezik olyan* $i \leq r$ *amelyre* C_i *tetszőleges hosszú számtani sorozatot tartalmaz.* $\square$

Tétel (Ramsey,1930) $\forall k, l \in \mathbb{N}\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0$

$$K_n \to (K_k, K_l)^2_2 \quad .$$

Definíció: $\mathbf{R}(k,l) :=$ a legkisebb *ilyen* $n_0 =$ **Ramsey - szám**. $\square$

Bizonyítás i) a végtelen Ramsey alapján**.**

ii) *szimultán* indukcióval igazoljuk k -ra és l -re.

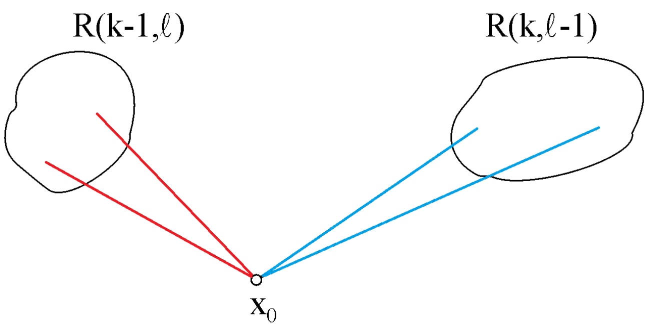
$k = 2$ vagy $l = 2$ esetén $R(2,l) = l$, $R(k,2) = k$.

$R(k,l) = R(l,k)$ (szimmetrikus).

Megmutatjuk:

$$\boxed{R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)} \quad . \tag{1}$$

Legyen $n := R(k-1,l) + R(k,l-1)$, $x_0 \in V$ tetszőleges.



vagy **(1)** $R(k-1,l)$ sok, p színű éllel összekötött csúcs,

vagy **(2)** $R(k,l-1)$ sok k színű éllel összekötött csúcs,

és indukciós feltétel miatt OK. $\square$

Következmény (Erdős Pál, Szekeres György): *Tetszőleges* $k, l \in \mathbb{N}$

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} . \qquad \square$$

Tétel (Erdős Pál): *Létezik olyan* $0 < c < 1$ *valós szám, hogy tetszőleges* $k, l \in \mathbb{N}$ *-természetes számokra*

$$\binom{k+l-2}{k-1}^c \leq R(k,l) \quad . \qquad \square$$

A fenti becslések még nagyon távol vannak $R(k,l)$ pontos értékeitől, $R(k,k)$ értékeire is csak hasonló becsléseink vannak.

Tétel (Erdős Pál, Szekeres György): *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *természetes számra*

$$\left(\sqrt{2}\right)^k \leq R(k,k) \leq 4^k \quad . \qquad \square$$

$R(k,l)$ pontos értéke csak kevés esetben ismert.

$$\begin{array}{rclcr}
 & & R(3,3) & = & 6 \\
 & & R(3,4) & = & 9 \\
 & & R(3,5) & = & 14 \\
 & & R(3,6) & = & 18 \\
 & & R(3,7) & = & 23 \\
 & & R(3,8) & = & 28 \\
 & & R(3,9) & = & 36 \\
51 & \leq & R(3,12) & & \\
3 \cdot (k-1) & \leq & R(3,k) & & \\
 & & R(4,4) & = & 18 \\
 & & R(4,5) & = & 25 \\
35 & \leq & R(4,6) & \leq & 53 \\
43 & < & R(5,5) & \leq & 52 \\
58 & \leq & R(5,6) & \leq & 94 \\
102 & \leq & R(6,6) & \leq & 169
\end{array}$$

Tétel (Erdős Pál, Szekeres György) *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *természetes számra létezik olyan* $N \in \mathbb{N}$ *szám, hogy a sík bármely* N *pontja közül kiválasztható* k *amelyek* konvex k *-szöget alkotnak.* $\square$