FP10: Matematik 3. maj 2021 kl. 14:00 - 18:00

Uofficiel løsningsforslag af Matematik Universet

Opgave 1.

1. Årligt abonnement kan bestemmes ved at regne differensen af den totale pris for vandforbrug og abonnement, som er 9631.20kr. Dermed er
$$9631.20\text{kr} - 8481.20\text{kr} = 1150\text{kr}.$$
Altså koster det årlige abonnement 1150kr.

2. Dividér prisen for abonnementet med den totale pris.
$$\frac{1150}{9631.20} \cdot 100\% = 11.94\%.$$
Derfor udgør 1150kr ca. 11.94% af den samlede pris.

3. Prisen pr. kubikmeter vand der bruges er 46.60kr, så familien har i alt brugt for
$$\frac{8481.20\text{kr}}{46.60\text{kr/m}^3} = 182\text{m}^3.$$
Ifølge beregningen brugte familien 182 kubikmeter vand. Bemærk, at vi ikke brugte 9631.20kr, for det er også med abonnement, hvilket ikke udgør noget vand.

4. Det årlige abonnement og prisen pr. kubikmeter vand den samme. Dermed vil Valdemars familie skulle betale $(46.60 \cdot x + 1150)$kr.

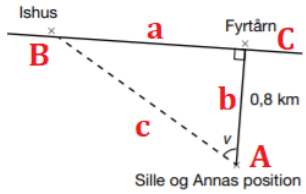
5. 1 liter vand svarer til 0.001m^3 vand. Toilettet bruger 0.009m^3 vand pr. skyl. De er i alt 4 personer, og hver af disse går i hvert fald på toilettet en gang om dagen. Antag, at alle 4 personer går på toilettet 4 gange om dagen. Dermed vil man have $4 \cdot 4 = 16$ skyl.

   Det udgør $0.009\text{m}^3 \cdot 16 = 0.144\text{m}^3$ pr. dag. Et år består af 365 dage, så derfor vil man bruge $0.144\text{m}^3 \cdot 365 = 52.56\text{m}^3$ på et år med toilettet.

   Benytter vi samme antagelse, dog med et toilet, som skyller mellem 2 og 4 liter vand, så benyttes der hhv. 0.002m^3 og 0.004m^3 vand. Altså er
$$0.002\text{m}^3 \cdot 16 \cdot 365 = 11.68\text{m}^3,$$
$$0.004\text{m}^3 \cdot 16 \cdot 365 = 23.36\text{m}^3.$$
Så familien sparer mellem 29.20m^3 og 40.88m^3 vand om året, hvis toilettet udskiftes. En væsentlig god investering.

Opgave 2.

1. Trekanten er retvinklet. Betragt figuren.



Vinklen v sættes til 45^o. Afstanden mellem ishuset og bådens position er
$$c = \frac{b}{\cos(v)} = \frac{0.8\text{km}}{\cos(45^o)} = 1.13\text{km}.$$
Dermed er Sille og Annas position 1.13km væk fra ishuset.

2. Sille har ret i, at $\tan(60^o) \approx 1.73$, men hun tager fejl i, at afstanden mellem ishuset og deres placering er 1.73 gange større ved at gange 1.73 med 0.8km. Det skyldes formlen.
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}.$$
Eftersom Silles og Annas afstand til ishuset ikke er ved den hosliggende katete, men derimod hypotenusen, så tager Sille fejl.

3. Da v måles til at være $53^o \pm 5^o$ kan man udregne afstandene enkeltvis.
$$c = \frac{0.8\text{km}}{\cos(53^o + 5^o)} = 1.51\text{km},$$
$$c = \frac{0.8\text{km}}{\cos(53^o - 5^o)} = 1.20\text{km}.$$
Dermed er den højeste afstand mellem bådens position og ishuset 1.51km med en vinkel på $v = 53^o$ og en usikkerhed på $\pm 5^o$.

Opgave 3.

1. Man ved, at rumfanget skal være 1.0m^3, men højden kan variere mellem 0.5m og 2.0m.

   Rumfanget af en klar regnvandsbeholder som en kasse antages, at både længde og bredde er ens. Højden fastsættes til 1.6m. Dermed er
   $$1.0\text{m}^3 = x \cdot x \cdot 1.6\text{m} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1.0\text{m}^3}{1.6\text{m}} = 0.625\text{m}^2.$$
   Kvadratroden på begge sider giver
   $$x = \sqrt{0.625\text{m}^2} \approx 0.791\text{m}.$$
   Dvs. den klare vandbeholder kan have $l = 0.79\text{m}$, $b = 0.79\text{m}$ og $h = 1.6\text{m}$. Stemmer med figuren.

   Rumfanget af en sort cylinderformet regnvandsbeholder vil vi antage, at højden er 0.5m. Radius kan man finde, når man ved at rumfanget i denne beholder også skal være 1.0m^3.
   $$1.0\text{m}^3 = 0.5\text{m} \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1.0\text{m}^3}{0.5\text{m} \cdot \pi}.$$
   Kvadratroden på begge sider giver
   $$x = \sqrt{\frac{1.0}{0.5 \cdot \pi}\text{m}^2} \approx 0.8\text{m}.$$
   Dvs. den klare vandbeholder kan have $h = 0.5\text{m}$ og radius $r = 0.8\text{m}$. Stemmer med figuren.

   Rumfanget af en keglestubformet regnvandsbeholder vil vi her antage, at radius $r_{\text{bund}} = 0.35\text{m}$ og radius $r_{\text{top}} = 0.55\text{m}$. Dermed kan man finde højden, når den totale volumen skal være 1.0m^3. Dermed er ligningen
   $$1.0\text{m}^3 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot ((0.35\text{m})^2 + (0.55\text{m})^2 + 0.35\text{m} \cdot 0.55\text{m}) \Leftrightarrow$$
   $$h = \frac{1.0\text{m}^3}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot ((0.35\text{m})^2 + (0.55\text{m})^2 + 0.35\text{m} \cdot 0.55\text{m})} \approx 1.54\text{m}.$$
   Dvs. højden skal være 1.54m, nedre radius skal være 0.35m og øvre radius skal være 0.55m. Det vil give en total volumen på 1.0m^3.

Opgave 4.

1. Man aflæser grafen. Det ses, at størst nedbør aflæses til 870mm som skete i 1961.

2. Igen aflæses så bedst muligt startværdi og slutværdi. Startværdien aflæses til 545mm, og slutværdien aflæses til 660m. Hermed er den relative procentvise forskel bestemt ved
   $$\frac{660\text{mm} - 545\text{mm}}{545\text{mm}} \cdot 100\% = 21.1\%.$$
   Som cirka svarer til en procentvis forøgelse i perioden på 20%.

3. Man kan opstille en ret linje på baggrund af at aflæse to støttepunkter. År 1829 svarer til $x = 0$. I år 1840 aflæses 550mm og i 1920 aflæses 600mm. Disse svarer til hhv. $x = 11$ og $x = 91$. Vha. WordMat kan man opstille en ret linje ved tabellen.

x	y
11	550
91	600

Lineær regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 1$.

$$y = 0.625x + 543.125.$$

Modellen slutter i år 2019 som svarer til $x = 190$. 100 år frem svarer til år 2119 og dermed $x = 290$. Altså vil der i gennemsnit i dette år være faldet

$$y = 0.625 \cdot 290 + 543.125 = 724.375.$$

Dvs. 100 år frem vil der i gennemsnit være faldet ca. 724mm nedbør.

Opgave 5.

1. At det i 13 år ud af de seneste 30 år har været regnvejr den 3. august, kan man derfor udregne den absolutte procentvise forskel.

$$\frac{13\text{år}}{30\text{år}} \cdot 100\% = 43.\overline{3}\% \approx 43\%.$$

2. Ved antagelse om uafhængighed, multipliceres sandsynligheden 43% med sig selv, da der indgår ”og”. Dermed er

$$43\% \cdot 43\% = 18.49\%$$

Dvs. sandsynligheden for regn d. 3. august 2021 og 2022 er ca. 18.5%.

3. Anvend regnearket. Simuleringen gentages 100 gange. Vi noterer os udfaldene, som fremgår af tabellen til højre.

   Tallet 0 angiver ingen fødselsdage med regnvejr, tallet 1 angiver fødselsdage med en regnvejrsdag og sådan fortsætter det.

   Vha. Excel kan man udregne summen af kolonnerne ift. simuleringen og derfra udregne sandsynlighederne enkeltvis. Beregningerne er:

   Ingen regnvejrsdage: $\frac{10}{100} \cdot 100\% = 10\%.$

   En regnvejrsdag: $\frac{31}{100} \cdot 100\% = 31\%.$

   To regnvejrsdage: $\frac{31}{100} \cdot 100\% = 31\%.$

   Tre regnvejrsdage $\frac{19}{100} \cdot 100\% = 19\%.$

   Alle regnvejrsdage: $\frac{9}{100} \cdot 100\% = 9\%.$

   Sandsynligheden for højst 1 fødselsdag med regnvejr indebærer ingen regnvejrsdage og en regnvejrsdag. Dvs. $P(0) + P(1)$. Man har

   $P(\text{Højst en regnvejrsdag})$
   $= P(\text{Ingen regnvejrsdage}) + P(\text{En regnvejrsdag})$
   $= 10\% + 31\% = 41\%.$

   Dvs. simuleringen viser, at der er 41% chance for, at det højst bliver regnvejr på 1 af de 4 fødselsdage.

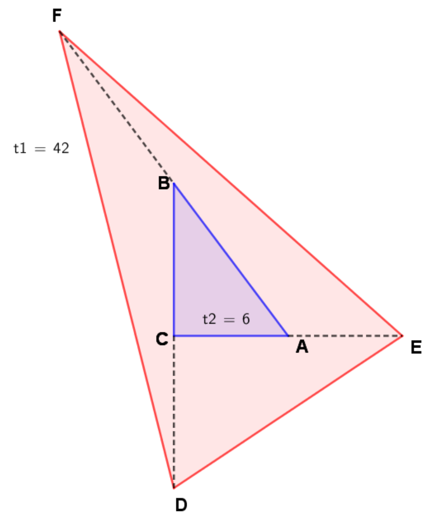
0	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	
1	1	1	1	
1	1	1	1	
1	1	1	1	
1	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1	1		
	1			

Opgave 6.

1. Trekanten har oplysningerne $a = 4, b = 3$ og $c = 5$. Arealet af trekanten er derfor
$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

2. Trekanten CDE har siderne $|DC| = |BC|$ og $|CE| = 2 \cdot |AC|$. Dermed vil arealet af trekanten T_{CDE} være dobbelt så stort som T_{ABC}. Hvis ABC har sidelængderne a, b og c vil trekanten CDE have sidelængderne $a, 2b$ og c. Forholdet k er
$$k = \frac{T_{CDE}}{T_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b} = \frac{2b}{b} = 2.$$
Hvilket indikerer, at uanset valg af sidelængder a, b og c vil trekanten CDE altid være dobbelt så stor som ABC.

3. Tegning og måling i GeoGebra:



Forholdet: $k = \frac{42}{6} = 7$. Man kan også beregne. Silles trekant har sidelængderne $a = 4, b = 3$ og $c = 5$. Dermed er arealet kendt fra tidligere, nemlig $T_{ABC} = 6$. Arealet af trekanten DEF ønskes.

Beregningen kan man foretage sig ved at inddele trekanten i tre mindre trekanter, nemlig AEF, CDE og BDF. Når man er færdig skal man inkludere ABC.

Trekanten AEF har arealet $T_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AF| \cdot \sin(180 - A)$.
Trekanten CDE har arealet $T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |CE|$.
Trekanten BDF har arealet $T_{BDF} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |BF| \cdot \sin(90 + A)$.

Derfor bestemmes vinkel A i trekanten ABC.
$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53.13.$$

Fortsættes.

Trekanten AEF har arealet $T_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot \sin(180 - 53.13) \approx 12$.
Trekanten CDE har arealet $T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$
Trekanten BDF har arealet $T_{BDF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin(90 + 53.13) = 12$.

Dermed er arealet af trekanten DEF

$$\begin{aligned} T_{DEF} &= T_{AEF} + T_{CDE} + T_{BDF} + T_{ABC} \\ &= 12 + 12 + 12 + 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

Dvs. arealet af den store trekant DEF er beregnet til at være 42, som er 7 gange større end 6.

4. Vi vil bevise, at påstanden altid holder. Vi skal undervejs gøre brug af følgende oplysninger:

$$\sin(180 \pm A) = \sin(A), \qquad \sin(90 \pm A) = \cos(A).$$

Endvidere,

$$c = \frac{a}{\sin(A)} \text{ og } c = \frac{b}{\cos(A)}.$$

Bevis: Lad den retvinklede trekant have sidelængderne a, b og c. Strategien er at vise, at $7 \cdot T_{ABC} = T_{CDE}$. Man har fra spørgsmål 3,

$$T_{CDE} = T_{AEF} + T_{CDE} + T_{BDF} + T_{ABC}$$

Eller

$$\begin{aligned} 7 \cdot T_{ABC} &= T_{AEF} + T_{CDE} + T_{BDF} + T_{ABC} \Leftrightarrow \\ 6 \cdot T_{ABC} &= T_{AEF} + T_{CDE} + T_{BDF} \end{aligned}$$

Dermed har man ligningen,

$$\begin{aligned} & 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2c \cdot \sin(180 - A) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot c \cdot \sin(90 + A) \Leftrightarrow \\ & 3 \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot \sin(180 - A) + a \cdot b + a \cdot c \cdot \sin(90 + A) \Leftrightarrow \\ & 3 \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot \sin(A) + a \cdot b + a \cdot c \cdot \cos(A) \Leftrightarrow \\ & 2 \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot \sin(A) + a \cdot c \cdot \cos(A) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Anvender følgende formler,

$$c = \frac{a}{\sin(A)} \text{ og } c = \frac{b}{\cos(A)}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot \sin(A) + a \cdot c \cdot \cos(A) \Leftrightarrow \\ & 2 \cdot a \cdot b = b \cdot \frac{a}{\sin(A)} \cdot \sin(A) + a \cdot \frac{b}{\cos(A)} \cdot \cos(A) \Leftrightarrow \\ & 2 \cdot a \cdot b = b \cdot a + a \cdot b \Leftrightarrow \\ & 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Det er sandt, da man udelukkende har brugt informationerne om, at trekanten ABC er ret med sidelængder a, b og c. Så der gælder, at $7 \cdot T_{ABC} = T_{CDE}$ og dermed er T_{CDE} altid 7 gange større end T_{ABC}.

□

Hvis det var lidt svært, så kan man også visualisere det med en række eksempler i GeoGebra.

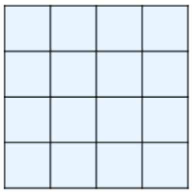
Opgave 7.

1. Med starttallet 5 har man regnestykket $5^2 - (5+1) \cdot (5-1)$.

2. Figur 1 består af i alt 9 felter, hvoraf figur 2 består af 8 felter, differensen af felter er $9 - 8 = 1$. Dette kan også udledes af udregningerne $3^2 - (3+1) \cdot (3-1)$.

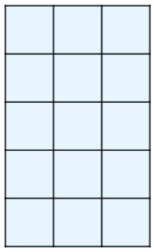
3. Man fremstiller to nye figurer.

Figur 3



4^2

Figur 4



$(4+1) \cdot (4-1)$

Selvom man nu har øget starttallet til 4, er forskellen stadig 1, da

$$4^2 - (4+1) \cdot (4-1) = 1.$$

4. Her vises, at $n^2 - (n+1) \cdot (n-1)$ altid for et hvilket som helst n.

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1) \cdot (n-1) &= n^2 - \big(n \cdot n + n \cdot (-1) + 1 \cdot n + 1 \cdot (-1)\big) \\ &= n^2 - (n^2 - n + n - 1) \\ &= n^2 - n^2 + n - n + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Det hele bliver 1, da alle værdier af n forkortes ud.

Opgave 8.

1. Man kan undersøge, om påstanden holder ved at udnytte en række tal og prøve af. Silles påstand:

”Sille påstår, at summen af to tal er større end produktet af de samme to tal.”

I det følgende benytter vi os ikke af muligheden for 0, da vi anser 0 som neutral.

<u>Påstand 1:</u> Når begge de to tal er positive, hele tal. Første test:

$$1 + 7 = 8,$$
$$1 \cdot 7 = 7.$$

Anden test:

$$4 + 6 = 10,$$
$$4 \cdot 6 = 24.$$

Det viser sig, at $4 \cdot 6 = 24 > 10 = 4 + 6$. Derfor holder hendes påstand ikke altid. Påstanden er sand, hvis et af tallene er 1. Hvis tallene er forskelligt fra 1, så er påstanden falsk.

Fortsættes.

<u>Påstand 2:</u> Når begge de to tal er negative, hele tal. Første test:

$$-1-6=-7,$$
$$-1\cdot(-6)=6.$$

Anden test:

$$-3-8=-11,$$
$$-3\cdot(-8)=24.$$

Derfor kan man se, at påstanden er sand i alle tilfælde. Det vil det altid være, da

$$-(a+b)<a\cdot b.$$

Negativt fortegn på venstre side gør det umuligt for at summen bliver større end produktet.

<u>Påstand 3:</u> Når begge de to tal er positive brøker med tælleren 1. Derfor er det kun nævneren der varierer. Første test:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9},$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}.$$

Anden test:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{1}=\frac{5}{4},$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{4}.$$

Tredje test:

$$\frac{1}{532}+\frac{1}{531}=\frac{1063}{282492},$$
$$\frac{1}{532}\cdot\frac{1}{531}=\frac{1}{282492}.$$

Det viser sig, at tælleren aldrig varierer når man regner produktet af to brøker, men regnes summen af to brøker med tæller 1, varieres tælleren i resultatet. Igen antages, at nævneren ikke er 0. Det kan man passende overveje hvorfor…

Konklusion:

Påstande	Afgørelse
Påstand 1.	Gælder i nogle tilfælde.
Påstand 2.	Gælder altid.
Påstand 3.	Gælder altid.

Slut på opgavesættet.