Matematik C-niveau
31. maj 2016
--

Opgave 1 - Rentesregning

a) Det oplyses, at $K_0 = 50000kr$. Renten oplyses endvidere til 4%. Der udregnes for K_n efter 12 år.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Som er renteformlen. Tallene indsættes.

$$K_{12} = 50000 \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{100}\right)\right)^{12} = 80051.61$$

Så efter 12 år står der 80 051.61kr.

b) Da beløbet er fordoblet, dvs. fra 50 000kr til 100 000kr, kan man finde antal terminer.

$$100000 = 50000 \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{100}\right)\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\frac{100000}{50000} = \frac{50000 \cdot (1.04)^n}{50000} \Leftrightarrow$$

$$(1.04)^n = \frac{100000}{50000} \Leftrightarrow$$

$$n \cdot \log_{10}(1.04) = \log_{10}\left(\frac{100000}{50000}\right) \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\log_{10}\left(\frac{100000}{50000}\right)}{\log_{10}(1.04)} = 17.67$$

Så ca. juni, 17 år efter kan vedkommende hæve sine 100 000kr. I Maple 2016 kunne man også bare løse for n.

$$100000 = 50000\left(1 + \left(\frac{4}{100}\right)\right)^n$$

$$100000 = 50000\left(\frac{26}{25}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{solve for n}} \quad \left[\left[n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{26}{25}\right)}\right]\right]$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{26}{25}\right)}$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{26}{25}\right)}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \quad n = 17.673$$

Opgave 2 - Statistik

a) Det aflæses på histogrammet og der kan man udfylde en tabel.

Løbetid	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	I alt
Frekvens %	18%	26%	36%	14%	6%	100%

Middeltallet kan udregnes på følgende måde:

$$\bar{x} = \sum x_{midt} \cdot f(I)$$

Hvor $\bar{x}$ er middeltallet, x_{midt} er intervalmidtpunkterne og $f(I)$ er intervalfrekvensen. Intervalmidtpunkterne er angivet nedenfor:

Intervaller	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
Intervalmidtpunkt	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5

Dette anvendes i ovenstående formel.

$$\bar{x} = (18 \cdot 0.325) + (26 \cdot 0.375) + (36 \cdot 0.425) + (14 \cdot 0.475) + (6 \cdot 0.525) = 40.7$$

Som er middeltallet. Dette kunne også udføres i Maple 2016.

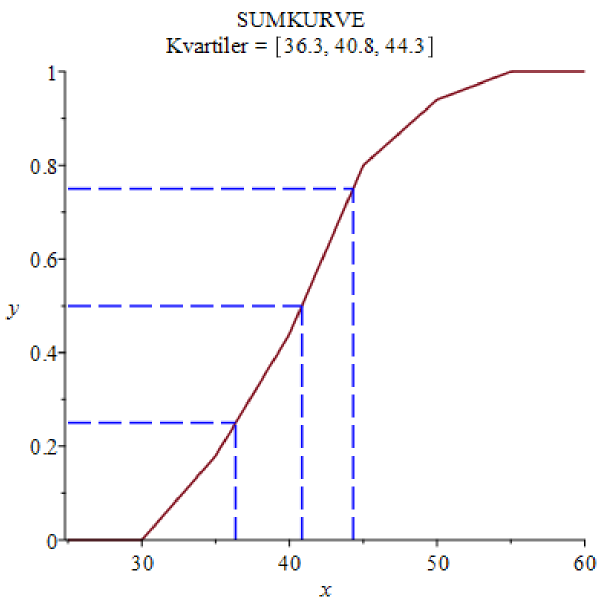
$$obs := \begin{bmatrix} 30..35 & 18 \\ 35..40 & 26 \\ 40..45 & 36 \\ 45..50 & 14 \\ 50..55 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30..35 & 18 \\ 35..40 & 26 \\ 40..45 & 36 \\ 45..50 & 14 \\ 50..55 & 6 \end{bmatrix}$$

$middel(obs)$

$$40.7000000000000$$

b) Ved aflæsning af sumkurven ses det, at 75% eller mere af løberne brugte en tid på 44 minutter. Dette kan også aflæses på grafen nedenfor.



Opgave 3 - Indekstal

a) Indekstallet med basisår 2005. Indekstallet for 2010 findes ved at gange over kors.

$$30000 \cdot x = 100 \cdot 36780 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{100 \cdot 36780}{30000} = 122.6$$

Nu findes grundlønnen for år 2015.

$$36780 \cdot 136.2 = 122.6 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{36780 \cdot 136.2}{122.6} = 40860$$

Dette har i tiden ændret sig med ca. 10k.

Opgave 4 - Potensfunktioner

a) Opgaven løses i Maple 2016

restart

with(*Gym*) :

Modellen defineres.

$f(x) := 0.68 \cdot x^3$ dette svarer til $y = 0.68 \cdot x^3$

$$x \rightarrow 0.68\, x^3$$

Man bestemmer elefantens vægt ved indsættelse af dens ekskrement.

$f(12)$

$$1175.04$$

Så elefanten vejer 1175kg.

b) Det undersøges, om safari-guiden har ret.

$$r_x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Formlen anvendes: $r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$

Oplysningerne indsættes.

$$r_y = ((1 + 0.25)^3 - 1) \cdot 100 = 95.3125$$

Så safari-guiden har cirka ret. Hvis ekskrementet er 25% større end det andet, må elefanten veje 95% mere end den anden elefant.

Opgave 5 - Lineære funktioner

a) Opgavens informationer aflæses og heraf ses det, at dette er en lineær udvikling i prisen ift. mål på et tæppe.
Værdien a aflæses til: 160 og b aflæses til: 200. Det er nok til at kunne opstille modellen

$$y = 160 \cdot x + 200$$

Der beskriver prisen ift. tæppets størrelse. For hvert m^2 kunden køber, tillægges 160kr oveni de 200kr, som er købsprisen.

b) Her løses en ligning.

$$160 \cdot x + 200 = 2600 \Leftrightarrow$$
$$x = 15$$

Så ved køb af 2600kr kan man få $15m^2$ tæppe.

c) Man får et andet firmas pris m.v. oplyst. Her er spørgsmålet om hvornår firma B er billigst. Dette gøres ved at sætte begge funktioner lig med hinanden.

$$160 \cdot x + 200 = 150 \cdot x + 380 \Leftrightarrow$$
$$x = 18$$

Så man skal købe for over $18m^2$ tæppe, for at firma B er billigst.

Opgave 6 - Eksponentielle funktioner

a) Opgaven løses i Maple 2016 og i hånden.
Man skal regne konstanterne a og b for at opstille en model.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[7-0]{\frac{7.5}{4.3}} = 1.0827$$

Tallet b regnes.

$$b = \frac{y_1}{a_1^x} = \frac{4.3}{1.0827^0} = 4.3$$

Heraf blev konstanterne a og b bestemt. Forskriften opstilles.

$$y = 4.3 \cdot 1.0827^x$$

Som beskriver medicinudgifterne i perioden 2007-2014. I Maple kan dette gøres enkelt v.h.a. Eksponentiel regression.

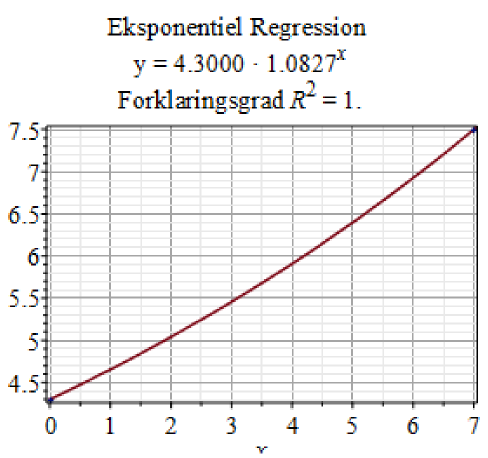
restart
with(*Gym*) :

Figuren aflæses.

$L1 := [0, 7]$

$L2 := [4.3, 7.5]$

ExpReg($L1, L2$)



Man skal nu bestemme den årlige procentvise ændring. Dette gøres ved følgende formel.

$$a = 1 + r$$

Hvor oplysningerne indsættes.

$$1.0827 = 1 + r \Leftrightarrow r = (0.0827 \cdot 100) = 8.27$$

Så for hvert år der går, stiger prisen med 8.27% i medicinudgifterne.

b) Der løses en ligning. Dette kan gøres på to måder. Først i hånden og Maple efterfølgende.

$$4.3 \cdot 1.0827^x = 13.2 \Leftrightarrow$$

$$1.0827^x = \frac{13.2}{4.3} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \log_{10}(1.0827) = \log_{10}\left(\frac{13.2}{4.3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log_{10}\left(\frac{13.2}{4.3}\right)}{\log_{10}(1.0827)} = 14.115$$

Dette lægges til 2007.

$$2007 + 14 = 2021$$

Så i år 2021 vil medicinudgifterne for sygehusene være på 13.2 mia. kr. I Maple kunne dette gøres hurtigt.

$4.3 \cdot 1.0827\text{^}x = 13.2$

$$4.3\,1.0827^x = 13.2$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}} \quad [[x = 14.11567013]]$$

Opgave 7 - Geometri

a) Hypotenusen kan bestemmes ved hjælp af Pythagoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Det ses, at grundlinjen og højden er ens. Dette indsættes i formlen.

$$8^2 + 8^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{128} = 11.3137cm$$

Som er den ønskede hypotenuse. Vinkel C kan bestemmes med følgende formel.

$$cosc = \frac{a}{b}$$

Der indsættes i formlen.

$$\angle C = cos^{-1}\left(\frac{8}{11.3137}\right) = 44.99^o \approx 45^o$$

Man kunne også aflæse figuren, men det vil være matematisk ukorrekt.

b) Vinkel C i femkanten er 120^o. Der trækkes $2 \cdot 45^o$ fra altså har man

$$120^o - 90^o = 30^o$$

Dette er den ønskede vinkel. Længden $|AE|$ kan bestemmes ved følgende cosinusrelation formel.

$$|AE| = \sqrt{|CE|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |CE| \cdot |AC| \cdot \cos(C)}$$

Værdierne indsættes i formlen.

$$|AE| = \sqrt{11.3137^2 + 11.3137^2 - 2 \cdot 11.3137 \cdot 11.3137 \cdot \cos(30)} = 5.8564cm$$

Dette er længden.

c) Arealet af hele flisen kan regnes på følgende måde.

$$A = A_{ABC} + A_{CDE} + A_{ACE}$$

Arealet af trekant ABC og CDE er ens. Dvs. arealet regnes for den ene og ganges med to.

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\right) = 64cm^2$$

Arealet for ACE regnes på en anden måde.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 11.3137 \cdot 11.3137 \cdot \sin(30) = 31.98cm^2$$

Det totale areal

$$A = 64 + 31.98 = 95.98cm^2$$

Slut på opgavesættet.