Løsningsforslag til:
Matematik B, STX december 2011, uden hjælpemidler

Opgave 1 Ligningen løses mht x.

$$\begin{aligned}&2x+1=-3x-9 \Leftrightarrow\\&5x=-10 \Leftrightarrow\\&x=\frac{-10}{5}=2\end{aligned} \tag{1}$$

Opgave 2 Differentialkvotienten bestemmes for $f(x)$.

$$f'(x)=4\cdot x^{4-1}+5\cdot 1\cdot 1\cdot x^{1-1}=4x^3+5 \tag{2}$$

Opgave 3 Tallet 2878 er *begyndelsesværdien* og 1.107 er *fremskrivningsfaktoren.* Tallene fortæller, at i år 1990 var antallet af udsendelsestimer 2878 timer, hvorved dette vokser med 10.7% om året.

Opgave 4 Forholdet mellem trekanterne bestemmes.

$$k=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{6}{2}=3 \tag{3}$$

Dermed er længden $|DE|=k\cdot|BC|=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

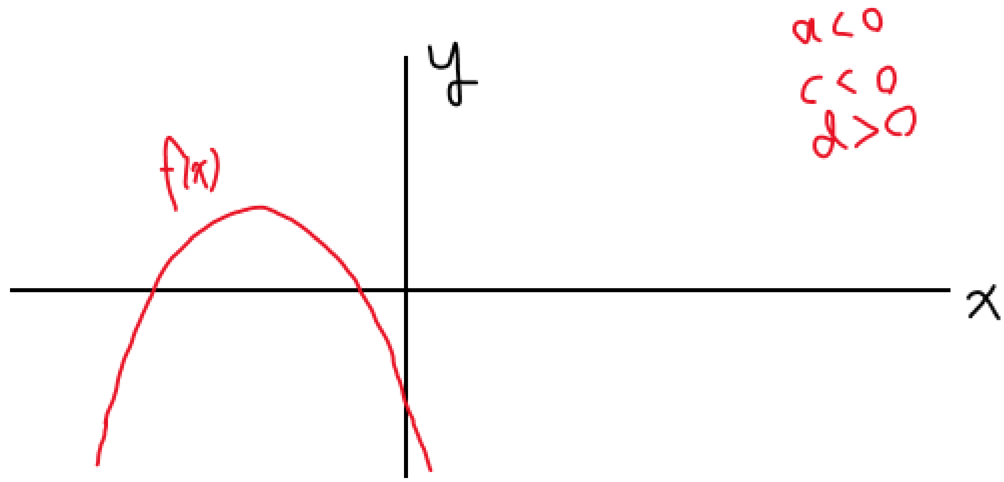
Opgave 5 Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned}2x-y&=-3 \qquad [\text{a}]\\x+y&=12 \qquad [\text{b}]\end{aligned} \tag{4}$$

Isolér y i [b] og man får $x+y=12\Leftrightarrow y=12-x$ som så indsættes i [a] og det giver $2x-(12-x)=-3\Leftrightarrow 2x-12+x=-3\Leftrightarrow 3x-12=-3\Leftrightarrow 3x=9\Leftrightarrow x=3$ som så indsættes i [b] og det giver $3+y=12\Leftrightarrow y=9$. Dermed er løsningerne til ligningssystemet:

$$x=3\wedge y=9 \tag{5}$$

Opgave 6 Vi laver en tegning over funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvoraf $a < 0$ og $c < 0$ samt $d > 0$.



Opgave 7

(a) Funktionen er $f(x) = ax + b$ og vi har fået angivet to støttepunkter. Ved anvendelse af formlerne for a og b (*eller man kan løse et ligningssystem*) fås

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{27 - 12}{8 - 3} = \frac{15}{5} = 3 \tag{6}$$

$$b = y_1 - ax_1 = 12 - 3 \cdot 3 = 12 - 9 = 3 \tag{7}$$

Dermed er forskriften $f(x) = 3x + 3$ som ønsket.

(b) Først bestemmes $f(10)$ og dernæst løses ligningen $f(x) = 18$.

$$f(10) = 3 \cdot 10 + 3 = 33 \tag{8}$$

Vi løser nu en ligning.

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 18 \Leftrightarrow \\ 3x &= 15 \Leftrightarrow \\ x &= 5 \end{aligned} \tag{9}$$

Opgave 8

(a) Kvartilsættet for længdefordelingen i juni måned er

$$\{140, 171, 200, 211, 243\} \tag{10}$$

Forklaring: Det viser sig at fiskene i september måned vil være væsentlig længere end fiskene for juni måned. Måske skyldes det, at fiskene i september er færdigudviklet og dermed har en mere koncentreret længdefordeling ift. hvis man ser på længdefordelingen i juni måned. I juni måned er 50% af fiskene, eller mindre være 200cm lange hvoraf i september måned vil 50% af fiskene, eller mindre, have en længde på 250cm.

Opgave 9

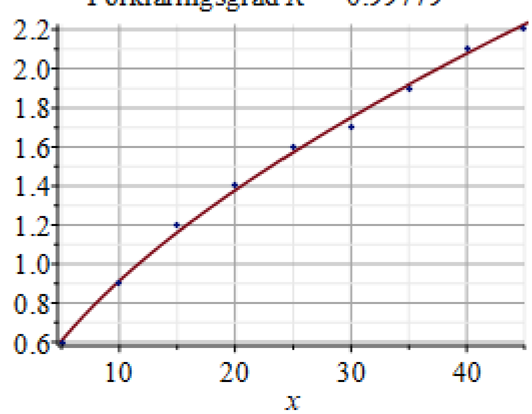
(a) I Maple indlæses tabellen og der foretages en potensregression.

```
with(Gym) :
P1 := [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45] :
P2 := [0.6, 0.9, 1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.9, 2.1, 2.2] :
PowReg(P1, P2)
```

Potens Regression

$y = 0.23377 \cdot x^{0.59209}$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99779$



Dermed er tallene a og b bestemt til at være følgende:

$$a = 0.59209 \wedge b = 0.23377 \tag{11}$$

(b) Ligningen $d(t) = 3$ løses.

$$0.23377 \cdot t^{0.59209} = 3 \Leftrightarrow t = 74.455 \tag{12}$$

Gennemfør selv udregningerne.

Opgave 10

(a) Længden af $|BC|$ bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos(\mathrm{A})} \\ &= \sqrt{7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot \cos(37)} \\ &= 9.406 \end{aligned} \tag{13}$$

(b) Vinkel C bestemmes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(\mathrm{A})}{|BC|} = \frac{\sin(\mathrm{C})}{|AB|} \Leftrightarrow C = \arcsin\left(\frac{\sin(\mathrm{A}) \cdot |AB|}{|BC|}\right) \tag{14}$$

Og tallene indsættes.

$$C = \arcsin\left(\frac{\sin(37) \cdot 14}{9.406}\right) = 63.393 \tag{15}$$

Den nye trekant deler vinkel A i to, så

$$D = 180 - A/2 - C = 180 - 37/2 - 63.393 = 98.107 \tag{16}$$

(c) Længden $|AD|$ bestemmes nemt vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(C)}{|AD|} = \frac{\sin(D)}{|AC|} \Leftrightarrow |AD| = \frac{\sin(C) \cdot |AC|}{\sin(D)} \tag{17}$$

Og tallene indsættes og vi får

$$|AD| = \frac{\sin(63.393) \cdot 14}{\sin(98.107)} = 12.644 \tag{18}$$

Opgave 11

(a) Først bestemmes $f'(x)$.

$$f'(x) = 5 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 1 \tag{19}$$

Punktet $x = 1$ indsættes i $f(x)$ og $f'(x)$ og man får hhv.

$$\begin{aligned} f(1) &= 5 \cdot 2^1 - 1 = 9 \\ f'(1) &= 5 \cdot 2^1 \cdot \ln(2) - 1 = 10\ln(2) - 1 \end{aligned} \tag{20}$$

Og dermed er tangentens ligning

$$y = (10\ln(2) - 1) \cdot (x - 1) + 9 = (10\ln(2) - 1) \cdot x - 10\ln(2) + 10 \tag{21}$$

Eller approksimeret

$$y = 5.9315x + 3.0685 \tag{22}$$

(b) Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$\begin{aligned} &5 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &5 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 1 \Leftrightarrow \\ &2^x = \frac{1}{5\ln(2)} \Leftrightarrow \\ &x = \log_2\left(\frac{1}{5\ln(2)}\right) \approx -1.7931 \end{aligned} \tag{23}$$

Vi vælger to værdier, a og b sådan så $a < x < b$. Vi ser, at $a = -2$ og $b = -1$ virker.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 5 \cdot 2^{-1} \cdot \ln(2) - 1 = \frac{5\ln(2)}{2} - 1 \approx 0.7329 \\ f'(-2) &= 5 \cdot 2^{-2} \cdot \ln(2) - 1 = \frac{5\ln(2)}{4} - 1 \approx -0.13356 \end{aligned} \tag{24}$$

Dermed kan vi lave et monotoniskema.

x		-1.7931	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Og slutte, at funktionen er: Aftagende i intervallet $x \in (-\infty; -1.7931]$ og voksende i intervallet $x \in [-1.7931; \infty)$.

Alternativt kan man anvende "the second derivative test".

$$f''(x) = 5 \cdot 2^x \cdot \ln(2)^2 \tag{25}$$

Og roden fra $f'(x) = 0$ indsættes i $f''(x)$.

$$f''(-0.7931) = 5 \cdot 2^{-0.7931} \cdot \ln(2)^2 \approx 1.3864 \tag{26}$$

Da $f''(x) > 0$ så er der tale om et *minimumspunkt*, og dermed er funktionen: Aftagende i intervallet $x \in (-\infty; -1.7931]$ og voksende i intervallet $x \in [-1.7931; \infty)$.

Opgave 12

(a) Arealet af M bestemmes vha. et integral samt rødderne fra ligningen $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} M &= \int_2^8 (-2x^2 + 20x - 32)dx \\ &= \left[\frac{-2}{3}x^3 + 10x^2 - 32x\right]_2^8 \\ &= \frac{-2}{3} \cdot 8^3 + 10 \cdot 8^2 - 32 \cdot 8 - \left(\frac{-2}{3} \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 - 32 \cdot 2\right) \\ &= \frac{128}{3} + \frac{88}{3} \\ &= 72 \end{aligned} \tag{27}$$

Som er arealet af M.

(b) Først findes afgrænsningsområdet af N. Det kræves at man løser ligningen $f(x) = g(x)$, så

$$\begin{aligned} &-2x^2 + 20x - 32 = 2x + 4 \Leftrightarrow \\ &0 = 2x^2 - 18x + 36 \Leftrightarrow \\ &0 = x^2 - 9x + 18 \Leftrightarrow \\ &0 = (x-3)(x-6) \end{aligned} \tag{28}$$

Og dermed er $x = 3 \vee x = 6$. Vi anvender differens af to integraler.

$$\begin{aligned} N &= \int_3^6 (-2x^2 + 20x - 32 - (2x+4))dx \\ &= \left[\frac{-2}{3} x^3 + 9x^2 - 36x \right]_3^6 \\ &= \frac{-2}{3} \cdot 6^3 + 9 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 - \left(\frac{-2}{3} \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 \right) \\ &= -45 - (-36) \\ &= 9 \end{aligned} \tag{29}$$

Som er arealet af N.

Opgave 13

(a) Overfladearealet af buret findes vha. arealerne af alle siderne på buret:

$$\begin{aligned} O_{bur} &= 2A_{side} + A_{front} + A_{top} \\ &= 2 \cdot 6 \cdot h + h \cdot 6x + x \cdot 6x \\ &= 2hx + 6hx + 6x^2 \\ &= 6x^2 + 8hx \end{aligned} \tag{30}$$

Volumen af en kasse anvendes.

$$\begin{aligned} V_{bur} &= x \cdot 6x \cdot h \\ &= 6hx^2 \end{aligned} \tag{31}$$

Der er nu redegjort for formlerne.

(b) Her er $O_{Bur} = 80m^2$, så h isoleres i formlen for overfladearealet O_{bur}.

$$80 = 6x^2 + 8hx \Leftrightarrow h = \frac{40 - 3x^2}{4x} \tag{32}$$

Og dette indsættes på h i V_{bur}, som så kaldes for $V(x)$.

$$V(x) = 6 \cdot \left(\frac{40 - 3x^2}{4x} \right) \cdot x^2 = \frac{-9}{3} x^3 + 60x \tag{33}$$

Hermed er $V(x)$ udtrykt ved x. $V(x)$ differentieres og man får

$$V'(x) = \frac{-27}{2}x^2 + 60 \tag{34}$$

Ligningen $V'(x) = 0$ løses og man får

$$\begin{aligned} &\frac{-27}{2}x^2 + 60 = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{27}{2}x^2 = 60 \Leftrightarrow \\ &x^2 = \frac{120}{27} \Leftrightarrow \\ &x = \pm\sqrt{\frac{120}{27}} \approx \pm 2.1082 \end{aligned} \tag{35}$$

Second derivative test anvendes. Bemærk at den positive værdi ovenfor beholdes. - Her er $V''(x) = -27x$ og indsættes $x = 2.1082$ fås

$$V''(2.1082) = -27 \cdot 2.1082 = -56.9214 \tag{36}$$

Og da $V''(x) < 0$ så er der maks. Dvs. når $x = 2.1082m$, så er der et maksimalt volumen.