Matematik A STX december 2016 vejl. løsning
www.matematikhfsvar.page.tl
Gratis anvendelse - læs betingelser!

Delprøve 1:

Opgave 1

Lineær funktion.
Oplysningerne findes i opgaven.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-9}{14-8} = \frac{1}{2}$$

$$b = y_1 - ax_1 = 9 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 5$$

$$b = y_2 - ax_2 = 12 - \frac{1}{2} \cdot 14 = 5$$

Forskrift

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 5}}$$

Opgave 2

$y = 2x^2 - 4x + 3$

Da er toppunktet udregnet ved:
$y' = 4x - 4$, hvor $y' = 0$ så da er
$4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vi har x-koordinaten. Vi regner y-koordinaten
$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1$
Så toppunktet er
$\underline{\underline{T = (1, 1)}}$

Opgave 3

$f(x) = \ln(x) + 2x, x > 0$
Vi finder tangentligningen.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

Så:
$f(1) = \ln(1) + 2 \cdot 1 = 2$
$f'(1) = 1 + 2 = 3$

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ og indsætter vi, så får vi

$y=3(x-1)+2 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x-1}}$

Opgave 4

Udtrykket

$$\frac{2(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2(a+b)}{(a-b)\cdot(a+b)}=\underline{\underline{\frac{2}{a-b}}}$$

NB: Tredje kvadratsætning er anvendt i nævneren!

Opgave 5

Vi ved, at |AB|=8, |BC|=|AD|=6 lad midpunktet ved 8 betegnes M og midtpunktet ved 6 være N, da er:

Arealet af ABE er

$$T_{ABE}=|AM|\cdot|AN|=\frac{8}{2}\cdot\frac{6}{2}=\frac{48}{4}=\underline{\underline{12}}$$

Opgave 6

Arealet af M er:

$M=G(a)-F(a)-(G(b)-F(b))$, dvs.

$M=5-3-(-1-1)=2+2=\underline{\underline{4}}$

Delprøve 2:

Opgave 7

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

Vi definerer tabellen

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] :; L2 := [46, 70, 516, 1128, 1743, 3318, 11970] :$

$N(t) := ExpReg(L1, L2, t) :$

$N(t)$

$$47.9957992488190\ 2.49669080419034^t \tag{7.1}$$

Her er tallene:

$\underline{\underline{a = 2.4966}}$ og $\underline{\underline{b = 47.995}}$

Delopgave b

Tallet a omregnes til renten!

$2.49669080419034 = 1 + r$

$$2.49669080419034 = 1 + r \tag{7.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = 1.496690804]] \tag{7.3}$$

Ganges med 100%:

$r = 1.496690804 \cdot 100$

$$r = 149.6690804 \tag{7.4}$$

Dvs. at for hvert år der går, $\underline{\underline{\text{stiger den årlige procentvise vækst med 149 \% af elbiler}}}$

Vi bruger dernæst fordoblingskonstanten.

$T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(2.49669080419034)} = 0.75754$

Dvs. denne værdi af t gør, at $N(t)$ fordobles.

Delopgave c

$N'(7)$

$$26555.9351731678 \tag{7.5}$$

Dette tal fortæller, $\underline{\underline{\text{at i år 2016 er væksthastigheden i antallet af solgte elbiler ca. 26555}}}$

Opgave 8

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

Vektorerne er:

$\underline{a} = \langle 3\,t + 20, 2 \rangle ; \underline{b} = \langle 2, -1 \rangle$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3\,t + 20 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1)}$$

NB: anden notation for vektorer!
Ved at have $t = 1$, så er projektionen af $\underline{a}$ på $\underline{b}$ følgende:
$\underline{a} = \langle 3 \cdot 1 + 20, 2 \rangle ; \underline{b} = \langle 2, -1 \rangle$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 23 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2)}$$

Man kan anvende projektionkommandoen:
$proj\left(\begin{bmatrix} 23 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{88}{5} \\ -\frac{44}{5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.3)}$$

Med hånden er

$$\underline{a}_{\underline{b}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b} = \frac{23 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{\left(\sqrt{2^2 + (-1)^2}\right)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{44}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \cdot \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{88}{5} \\ -\frac{44}{5} \end{bmatrix}}}$$

Delopgave b
Længden af vektor $\underline{a}$ skal være ligeså lang som $\underline{b}$, så vi skal finde t.

$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ gælder for vektor $\underline{a}$hvor $|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ gælder for vektor $\underline{b}$. Vi skal finde t, så vi sætter $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ og løser ligningen, da er

$\sqrt{(3\,t + 20)^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$$\sqrt{(3\,t + 20)^2 + 4} = \sqrt{5} \quad \textbf{(8.4)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = -\frac{19}{3}\right], [t = -7]\right] \quad \textbf{(8.5)}$$

Da fås to værdier. Vi vil tjekke længden af vektor $\underline{b}$.

$evalf[5]\left(\sqrt{2^2 + (-1)^2}\right)$

$$2.2361 \quad \textbf{(8.6)}$$

Så tjekkes vektor $\underline{a}$ med begge t-værdier.

$evalf[5]\left(\sqrt{\left(3\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)+20\right)^2+2^2}\right)$

$$2.2361 \quad (8.7)$$

$evalf[5]\left(\sqrt{(3\cdot(-7)+20)^2+2^2}\right)$

$$2.2361 \quad (8.8)$$

Så disse to værdier af t gør, at $\underline{|a|=|b|}$

Opgave 9

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

Modellen er givet.

$y(x) := 10\cdot x^{-0.8}$

$$x \rightarrow \frac{10}{x^{0.8}} \quad (9.1)$$

NB: $x > 0$.

Anvend formlen $F_y = F_x^a$, da er

$(1+r_y) = (1+r_x)^a$, med tallene indsat gælder:

$(1+r_y) = (1+0.20)^{-0.8}$

$$1+r_y = 0.8642810743 \quad (9.2)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for r[y]}}$$

$$[[r_y = -0.1357189257]] \quad (9.3)$$

Dvs. når x ændres med 20%, så falder y med $\underline{13.57\ \%}$.

Opgave 10

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

Vinkel B kan bestemmes enkelt vha. cosinusrelationerne.

$B = invCos\left(\frac{10^2+10^2-16^2}{2\cdot10\cdot10}\right)$

$$B = 106.2602047 \quad (10.1)$$

Dvs. vinkel $\underline{B = 106.2602047^o}$

Længden af diagonalen bestemmes. Da B og D er parallelle, så dannes der et nyt punkt, kaldet E. Den har koordinaterne

$E := \langle 0, 8, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Man kan anvende pythagoras for at finde den længde ud til punktet D, Dvs:
$a^2+b^2=c^2$, her er
$a^2=a^2$, $b^2=8^2$ og $c^2=12.2^2$, da gælder
$a^2=c^2-b^2$ så
$a^2=12.2^2-8^2$

$$a^2=84.84 \tag{10.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a=9.210863152],[a=-9.210863152]] \tag{10.4}$$

Så længden ud til punktet D fra E er 9.21. Længden af diagonalen fra B til D er da:
$6+9.21$

$$15.21 \tag{10.5}$$

Så $\underline{\underline{15.21}}$ er altså længden af diagonalen BD.

Delopgave b
Arealet bestemmes. Da det er en plan, er det muligt at anvende alm. trigonometriske formler for bestemmelse af arealet. Bemærk, at der er en vilkårlig trekant samt to retvinklede trekanter (eller fire retvinklede trekanter).

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot Sin(106.2602047)=48$

$A_{ADE}=A_{CDE}=\frac{1}{2}\cdot 9.210863152\cdot 8=73.68690522$

Det totale areal:
$A=A_{ABC}+A_{ADE}+A_{CDE}=48+36.84345261+36.84345261=121.6869052$
Dvs. det totale areal er $\underline{\underline{121.686\ cm^2}}$.

Delopgave c
Der er givet planen for nabofirkanten. Den kalder vi β.
$\beta := 85.6\,x-51.6\,y+68.8\,z=0$

$$85.6\,x-51.6\,y+68.8\,z=0 \tag{10.6}$$

Vi vil bestemme den plan α for firkant ABCD.
Derfor defineres punkterne A, B og C.
$A := \langle 0,0,0\rangle$:; $B := \langle 0,8,6\rangle$:; $C := \langle 0,16,0\rangle$:
Planen beregnes vha. krydsproduktet mellem to vektorer samt et vilkårligt punkt.
$\underline{AB} := B-A$:; $\underline{AC} := C-A$:
Da er krydsproduktet
$\underline{AB}\times\underline{AC}$

$$\begin{bmatrix}-96\\0\\0\end{bmatrix} \tag{10.7}$$

Ved at vælge et vilkårligt punkt (A) så er ligningen
$\alpha := -96(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0$

$$-96\,x=0 \tag{10.8}$$

Som er planen α's ligning. Vinklen mellem to planer (dvs. firkanterne ABCD og ABEF) beregnes udelukkende vha. normalvektorerne.
Normalvektorerne for planen α er:
$\underline{n_\alpha} := \langle -96, 0, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} -96 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

Normalvektorerne for planen β er:
$\underline{n_\beta} := \langle 85.6, -51.6, 68.8\rangle$

$$\begin{bmatrix} 85.6 \\ -51.6 \\ 68.8 \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

Vinklen beregnes.

$$v = invCos\left(\frac{\underline{n_\alpha}\cdot\underline{n_\beta}}{|\underline{n_\alpha}|\cdot|\underline{n_\beta}|}\right) = invCos\left(\frac{-96\cdot 85.6 + 0\cdot(-51.6) + 0\cdot 68.8}{\sqrt{(-96)^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{85.6^2+(-51.6)^2+68.8^2}}\right)$$

$$invCos\left(\frac{-96\cdot 85.6 + 0\cdot(-51.6) + 0\cdot 68.8}{\sqrt{(-96)^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{85.6^2+(-51.6)^2+68.8^2}}\right)$$

$$134.8664436 \tag{10.11}$$

Dvs. den vinkel (stump) mellem begge planer α og β er beregnet til at være $\underline{\underline{v = 134.8664436^o}}$.

Opgave 11

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

Funktionen defineres.

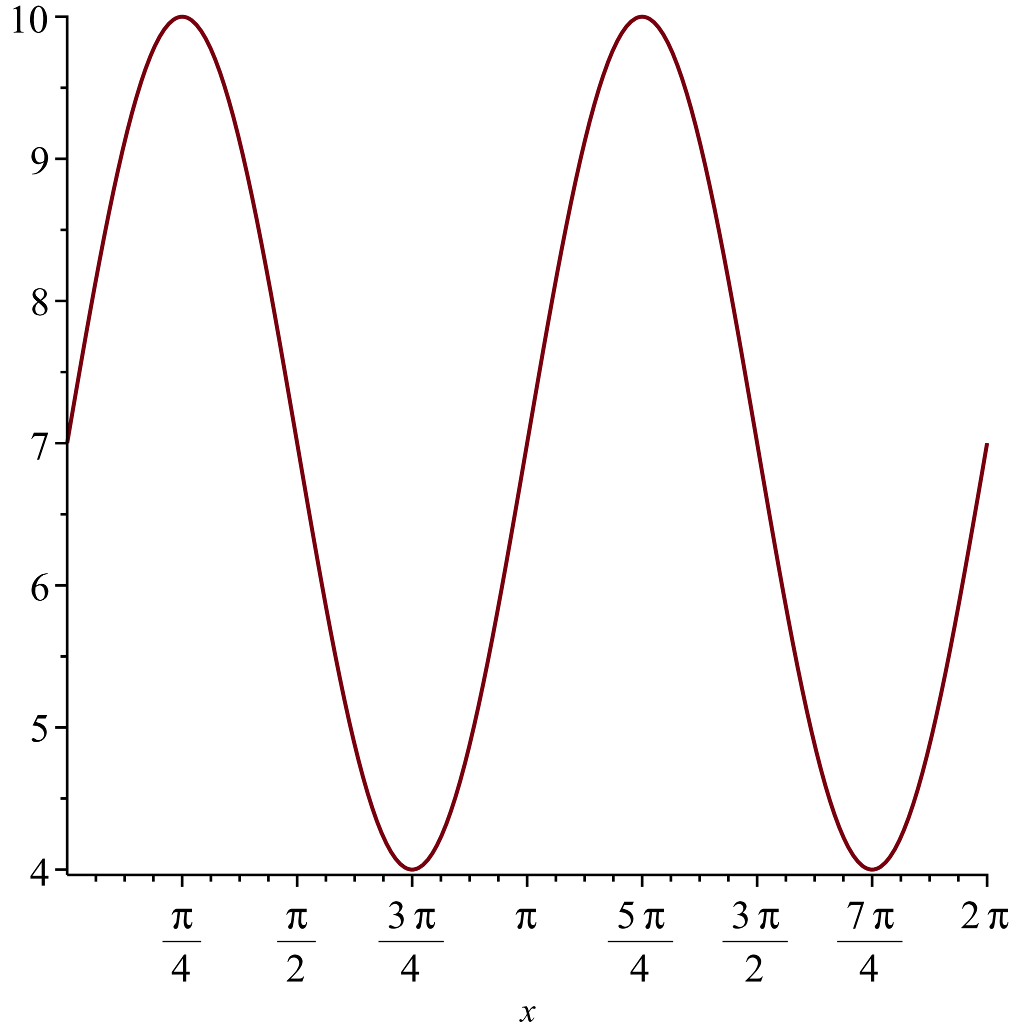
$f(x) := 3 \cdot \sin(2\,x) + 7$

$$x \rightarrow 3\,\sin(2\,x) + 7 \qquad \mathbf{(11.1)}$$

NB: gælder i intervallet $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

Da tegnes funktionen.

plot$(f(x), x = 0..2\,\mathrm{Pi})$



Man kan også finde ud af, hvad minimum er, vha. parallelforskydningen k. Dvs. der gælder, at $-a + k \leq f(x) \leq a + k$, så hvis man har:

$\min = -a + k = -3 + 7 = 4$

Dvs. grafen har sit minimale punkt i $\underline{\underline{y = 4}}$. (Man kunne også se på plottet).....

Delopgave b

intervalsolve$(f(x) = 8.5, x = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$[0.2617993878, 1.308996939, 3.403392041, 4.450589593] \qquad \mathbf{(11.2)}$$

Løsningerne til ligningen $f(x) = 8.5$ er ovenstående og disse er defineret i det interval, hvor

$0 \leq x \leq 2\,\pi.$

Delopgave c
Volumen bestemmes.

$$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(f(x)^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$M = \pi \left(\frac{577}{2} - \frac{9}{4} \cos(10) \sin(10) - 21 \cos(10) \right) \quad \textbf{(11.3)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$M = 958.47 \quad \textbf{(11.4)}$$

Dvs. volumen af V er 958.47

Opgave 12

restart; *with*(*Gym*) :
Delopgave a
$f(x) := -x^2 + 4\,x :$
Afstanden fra O til A er 4. Lise befinder sig på x i dette område. Så derfor er det:
$x - 4$
Da man endvidere ikke ved, hvor henne af "y-aksen" hun befinder sig, hvis man tænker på en retvinklet trekant. Deraf er afstanden ukendt. Men ved hjælp af Pythagoras kan man opstille det således:
$a^2 + b^2 = c^2.$
Her ændres der på det, således man har:
$a^2 = f(x)^2$
$b^2 = (x-4)^2$
$c^2 = d^2$
Så dette opskrives således:

$$d = \sqrt{f(x)^2 + (x-4)^2} = \sqrt{x^4 - 8\,x^3 + 16\,x^2 + x^2 - 8\,x + 16} = \sqrt{x^4 - 8\,x^3 + 17\,x^2 - 8\,x + 16}$$

Derved er $d = |PA| = \sqrt{x^4 - 8\,x^3 + 17\,x^2 - 8\,x + 16}$.

Delopgave b
Det sted, hvor afstanden fra P til A er længest findes udelukkende vha. differentialregning. Dvs. $d = g(x)$, så vi har en funktion
$g(x) := \sqrt{x^4 - 8\,x^3 + 17\,x^2 - 8\,x + 16}$:
evalf[5](*solve*(*g*'(*x*) = 0))

$$0.29290,\ 1.7071 \quad \textbf{(12.1)}$$

Koordinatsættet til den længeste afstand fra P til A for Lise er da
$P = (1.7071, 3.9142)$ fordi
$g''(1.7071)$

$$-1.429621723 \quad \textbf{(12.2)}$$

Som er mindre end 0, dermed er det maksimum vi har fået.

Opgave 13

restart; *with*(*Gym*) :

Delopgave a

H_0

= *En persons infektionsniveau er uafhængigt af størrelsen af den dosis Echinacea personen indtager.*

Skemaet viser stikprøven.

Antallet af personer i testen er udelukkende beregnet ved enten; vandret eller lodret sum.

$178 + 29 = 207$

$103 + 52 + 52 = 207$.

Dvs. i denne forbindelse, er antallet af personer i testen $\underline{\underline{207}}$.

De forventede værdier regnes:

	0 %	20 %	60 %	*sum*
Infektion	88.570	44.715	44.715	178
Ikke infektion	14.430	7.2850	7.2850	29
Sum	103	52	52	207

Formlen er:

$$\frac{vandret\ sum}{sum} \cdot lodret\ sum$$

Delopgave b

Man får oplyst, at teststørrelsen er 2.925. Frihedsgraderne er 2. Signifikansniveauet er 5%

Vha. et skema er det muligt at finde den kritiske værdi. Den aflæses til at være 5.99. Alternativt:

with(*Statistics*) :

$Signifikansniveau := 0.05$:

$X := RandomVariable(ChiSquare(N))$:

$N := (2-1)\cdot(3-1)$:

$Q := Quantile(X, 1 - Signifikansniveau)$: *evalf*(%)

$$5.99146454710798 \tag{13.1}$$

Og da $5.99 > 2.925$ $\underline{\underline{\text{så acceperes nulhypotesen!}}}$

ELLER

with(*Gym*) :

$f(t) := 1 - chicdf(2, t)$:

$solve(f(t) = 0.05)$

$$5.991464547 \tag{13.2}$$

Opgave 14

restart; *with*(*Gym*) :

Der er givet en differentialligning over nye medarbejderes evner.

$A'(t) = k \cdot (M - A(t))$

$$D(A)(t) = k\,(M - A(t)) \tag{14.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$A(t) = M + e^{-kt}\,\_C1 \tag{14.2}$$

Delopgave a

$A'(t) = 0.02 \cdot (300 - 75)$

$$D(A)(t) = 4.50 \tag{14.3}$$

Væksthastigheden for produktionsevnerne for medarbejderne er $\underline{\underline{4.5}}$

Delopgave b

Differentialligningen løses. Den fulde løsning er

$A(t) = M + c \cdot e^{-k \cdot t}$

$A(t) = 300 + c \cdot e^{-0.02 \cdot t}$

$$A(t) = 300 + c\,e^{-0.02\,t} \tag{14.4}$$

Der er en ligning med c som ubekendt:

$75 = 300 + c\,e^{-0.02 \cdot 0}$

$$75 = 300 + 1.\,c \tag{14.5}$$

$\xrightarrow{\text{solve for c}}$

$$[[c = -225.]] \tag{14.6}$$

$A(t) := 300 - 225 \cdot e^{-0.02\,t}$

$$t \rightarrow 300 - 225\,e^{(-1) \cdot 0.02\,t} \tag{14.7}$$

Alternativt kunne man anvende kommandoen:

dsolve$(\{A'(t) = 0.02 \cdot (300 - A(t)), A(0) = 75\}, A(t))$

$$A(t) = 300 - 225\,e^{-\frac{1}{50}\,t} \tag{14.8}$$

Der løses så en ligning for t, når $A(t) = 200$.

$A(t) = 200$

$$300 - 225\,e^{-0.02\,t} = 200 \tag{14.9}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 40.54651081]] \tag{14.10}$$

<u>Efter 40 dage, vil der være muligt for de ansatte at producere 200 enheder...</u>

Delopgave c

En anden produktionslinje:

$M = 250$,

$B(t) = 50$, $t = 0$

$B'(t) = k \cdot (M - B(t))$

$$D(B)(t) = k\,(M - B(t)) \tag{14.11}$$

$\xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$B(t) = M + \mathrm{e}^{-kt}\_C1 \tag{14.12}$$

$B(t) = 250 + c\cdot \mathrm{e}^{-kt}$

$$B(t) = 250 + c\,\mathrm{e}^{-kt} \tag{14.13}$$

Så løses ligningen:
$50 = 250 + c\,\mathrm{e}^{-k\cdot 0}$

$$50 = 250 + c \tag{14.14}$$

$\xrightarrow{\text{solve for c}}$

$$[[c = -200]] \tag{14.15}$$

Så anvendes oplysningen, at efter 30 dage er produktionen 120 enheder.
$120 = 250 - 200\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot 30}$

$$120 = 250 - 200\,\mathrm{e}^{-30\,k} \tag{14.16}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$\left[\left[k = -\frac{1}{30}\ln\left(\frac{13}{20}\right)\right]\right] \tag{14.17}$$

Da er modellen
$B(t) := 250 - 200\cdot \mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{30}\ln\left(\frac{13}{20}\right)\right)\cdot t}$

$$t \rightarrow 250 - 200\,\mathrm{e}^{\frac{1}{30}\ln\left(\frac{13}{20}\right)t} \tag{14.18}$$

Man skulle godt nok ikke finde modellen, men den er god at eftervise. Tallet M (udgangspunkt i ovenstående model) er det tal, hvorpå arbejdernes ydeevne giver maksimal 250 enheder pr. døgn. Teoretisk betyder det, at grafen aldrig rammer $y = 250$, dvs. grafen for $B(t)$ er asymptote med linjen y.