

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في
اليمن

<http://ye-thirdsecondr.blogspot.com>

القوى (نظرية ديموافر)

تعريف:

إذا كان ن عدداً نسبياً فإن:

$$ع^{\circ} = [ر (جته + ت جاه)]^{\circ} = [ر^{\circ} (ن ه)]^{\circ}$$

$$ر^{\circ} = (جتان ه + ت جان ه)$$

مثال: إذا علمت أن $ع = 2 + 2\sqrt{3}$ ت أوجد $ع^5$

الحل

نحول ع إلى صورته المثلثية:

$$\sqrt{4=12+4} = \sqrt{ص^2 + 2} = ر \therefore \sqrt{3} \cdot 2 = ص ، 2 = س \therefore$$

تعين ه:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{4} = \frac{ص}{ر} = \text{جاه} \therefore \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{س}{ر} = \text{جته} \therefore$$

\therefore ه تقع في الربع الأول. \therefore ه = 60

$$\# [\circ 300 ، 1024] =^5 [\circ 60 ، 4] =^5 ع \therefore [60 ، 4] = [ه ، ر] = ع \therefore$$

مثال: أوجد ناتج $\left(\frac{2-t}{t+1} \right)^{12}$ مبيناً أن هذا العدد حقيقي بحت.

الحل

$$\frac{2-t}{t+1} = ع \text{ نفرض أن:}$$

$$\frac{(1-t-t)^2}{2} = \frac{2-t^2}{1+1} = \frac{t-1}{t-1} \times \frac{2-t}{t+1} = \frac{2-t}{t+1} \therefore$$

$$ع = 1 - ت$$

نحول ع إلى صورته المثلثية. ∴ س = 1 - ، ص = 1 - ∴ ر = 1 + √2 = √2

تعيين ه :

$$\therefore \text{جا ه} = \frac{ص}{ر} = \frac{1-}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore ه = \pi + 45 = 225$$

$$\therefore \text{جتا ه} = \frac{س}{ر} = \frac{1-}{\sqrt{2}}$$

∴ ه تقع في الثالث.

$$\therefore ع^{12} = [(\sqrt{2})^{12}, 225 \times 12]$$

$$\therefore ع = [ر، ه] = [2، 225]$$

$$[64، \pi 15] = [64، \pi]$$

$$[64، \frac{\pi}{14} \times 5 \times 12] =$$

$$[64، -1 + 0] =$$

$$[64، \pi + ت جا \pi] =$$

$$= -64 \text{ حقيقي بحت.}$$

مثال: استخدم نظرية دي موافر للتعبير عن جتا 2ه ، جا 2ه

الحل

$$\therefore ر^n = [جتا ن ه + ت جا ن ه] = [ر^n (جتا ه + ت جا ه)^n]$$

$$\text{نضع } ن = 2$$

$$\therefore ر^2 (جتا 2ه + ت جا 2ه) = ر^2 (جتا ه + ت جا ه)^2$$

$$\therefore \text{جتا 2ه} + \text{ت جا 2ه} = (\text{جتا ه} + \text{ت جا ه})^2$$

$$\therefore \text{جتا 2ه} + \text{ت جا 2ه} = \text{جتا}^2 ه - \text{جتا}^2 ه + 2 \text{جا ه جتا ه}$$

$$\therefore \boxed{\text{جا 2ه} = 2 \text{جا ه جتا ه}}$$

$$\therefore \boxed{\text{جتا 2ه} = \text{جتا}^2 ه - \text{جا}^2 ه}$$

مثال: إذا كانت ع = $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^n$ أوجد ع على الصورة الجبرية

$$(2) \text{ ن} = 3 \text{ ك} + 1 : \text{ ك} \in \text{ص}$$

$$\text{عندما } (1) \text{ ن} = 3 \text{ ك}$$

الحل

$$\text{نفرض ع } 1 = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2}$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\quad} = \text{ر}$$

تعيين ه:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \text{جاه} \quad , \quad \frac{1}{2} = \text{جتاه} \quad \therefore$$

$$\frac{\pi 4}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \text{ه} \quad \therefore \text{ه تقع في الربع الثالث.}$$

$$[\frac{\pi 4}{3} \times \text{ن} , 1] = \text{ع} \quad \therefore [\frac{\pi 4}{3} , 1] = \text{ع} \quad \therefore$$

$$(1) \text{ عندما ن} = 3 \text{ ك} \quad \therefore [\frac{\pi 4}{3} \times 3 , 1] = \text{ع}$$

$$1 = (0 + 1) = \text{ع} \quad (1 = \text{جتا} 4 \text{ ك} + \text{جا} 4 \text{ ك})$$

$$(2) \text{ عندما ن} = 3 \text{ ك} \quad (1 + 3 \text{ ك})$$

$$[\frac{\pi 4}{3} , 1] = [\frac{\pi 4}{3} (1 + 3 \text{ ك}) , 1] = \text{ع}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$2 = \text{مثال: أثبت أن:} \quad \left(\frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} \right)^3 + \left(\frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2} \right)^3$$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \text{ص} \quad , \quad \frac{1}{2} = \text{س} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2} \quad \therefore$$

$$1 = \sqrt[3]{1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\quad} = \text{ر} \quad \therefore$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \text{جاه}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \text{جتاه} \quad \therefore$$

هـ تقع في الربع الثاني هـ $\therefore 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ =$

$$[\pi 2^-, 1] + [\pi 2, 1] = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}t - 1}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}t + 1}{2}\right)} = \text{ط}_1$$

$$\pi 2 \text{ جتا} + \pi 2 \text{ ت} - \pi 2 \text{ جتا} + \pi 2 \text{ ت} =$$

$$\text{ط}_2 = \text{ط}_1 \therefore 2 = 1 + 1 =$$

مثال: إذا كانت $ع = \frac{1}{ع}$ فأتيت أن $ع = \frac{1}{ع}$ فأتيت أن $ع = \frac{1}{ع}$ فأتيت أن $ع = \frac{1}{ع}$

الحل

$$\therefore ع + \frac{1}{ع} = 2 \text{ جتا} \text{ بالضرب } \times ع \therefore ع^2 + 1 = 2ع$$

$$\therefore ع^2 - 2ع + 1 = 0 \text{ "معادلة من الدرجة الثانية"}$$

$$\therefore 1 = أ, \quad 1 = ب, \quad 2 = ج$$

$$\therefore \Delta = 4 - 4 = 0 \therefore 4 - 4 = 0 \therefore 4 - 4 = 0$$

$$\therefore 4 - 4 = 0$$

$$\therefore ع = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$\therefore ع = (ع \pm ج)$$

$$\therefore ع = \frac{1}{ع} + ع = (ع + ع) + (ع + ع) = \frac{1}{ع} + ع$$

$$= 2ع + 2ع + 2ع = 6ع$$

$$\therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

اليمن سنة 2004:

مثال: حل المعادلة $ع^2 - 2ع + 1 = 0$

الحل

بنفس حل المثال السابق.

مثال: إذا كان $ع_1 = (جتا^{525} + ت جا^{525})$ ، $ع_2 = [1 ، 20^5]$

أوجد قيمة $ع_1 \cdot ع_2$

الحل

$$\because ع_1 = [1 ، 25^5] ، ع_2 = [1 ، 20^5]$$

$$\therefore ع_1 \cdot ع_2 = [1 ، 25^5] \cdot [1 ، 20^5] = [1 ، 20^5 \cdot 25^5]$$

$$= [1 ، 100^5] \cdot [1 ، 140^5] = [1 ، 140^5 \cdot 100^5]$$

$$= (جتا^{5240} + ت جا^{5240}) - (جتا^{560} - ت جا^{560})$$

$$= \frac{3\sqrt{ت}}{2} - \frac{1}{2}$$

مثال: إذا كان $ع = [1 ، ه]$ فبرهن أن $ع + \frac{1}{ع} = 2جتاه$

البرهان:

$$ط_1 = ع + \frac{1}{ع} = [1 ، ه] + [ه^{-} ، 1]$$

$$= (جتاه + ت جاه) + (جتا-ه + ت جا-ه)$$

$$= 2جتاه = 2جتاه$$

مثال: إذا علمت أن:

$$ع = [1 ، \frac{\pi}{3}] \quad \text{برهن أن} \quad (ع + \frac{1}{ع})^2 = 1$$

البرهان:

$$\because ع = [1 ، \frac{\pi}{3}] \quad \therefore ع + \frac{1}{ع} = [1 ، \frac{\pi}{3}] + [\frac{\pi}{3}^{-} ، 1]$$

$$= (جتا^{560} + ت جا^{560}) + (جتا-560 + ت جا-560)$$

$$= (جتا^{560} + ت جا^{560}) + (جتا-560 + ت جا-560)$$

$$1 = \frac{1}{2} \times 2 = {}^5\text{جتا} =$$

$$1 = {}^2(1) = {}^2\left(\frac{1}{ع} + ع\right) \therefore$$

مثال: إذا كان $ع = [ر، هـ]$ وكان $ع + \frac{1}{ع} = 2$ جتاه فبرهن أن $ر = 1$

الحل

$$\therefore ع + \frac{1}{ع} = 2 \text{ جتاه}$$

$$2 \text{ جتاه} = [ر، هـ] + [هـ، \frac{1}{ر}] =$$

$$= \text{رجتاه} + \text{رجاهت} + \frac{1}{ر} \text{ جتا} - هـ - \frac{1}{ر} \text{ جاهت}$$

$$2 \text{ جتاه} = (ر \text{ جتاه} + \frac{1}{ر} \text{ جتاه}) + (ت \text{ رجاه} - \frac{1}{ر} \text{ جاه}) =$$

$$\therefore \text{رجتاه} + \frac{1}{ر} \text{ جتاه} = 2 \text{ جتاه} \text{ بالقسمة على جتاه} \quad \text{رجاه} - \frac{1}{ر} \text{ جاه} = 0$$

$$\therefore ر + \frac{1}{ر} = 2 \quad \therefore ر^2 - 2ر + 1 = 0 \quad \therefore \text{رجاه} = \frac{1}{ر}$$

$$\therefore (ر - 1)^2 = 0 \quad \therefore ر = 1 \quad \therefore 1 = {}^2ر$$

تمرين غير محلول

$$1 = \frac{1}{ع} + ع \quad \text{إذا كان } ع + \frac{1}{ع} = 14 \text{ أثبت أن } ع = \frac{1}{14}$$

مثال: أثبت أن $\frac{(جتاه - ت جاه)^{20}}{(جتاه - ت جاه)^{22}} = \text{جتاه} + ت جاه$

الحل

$$\frac{\text{جتا} + 0}{\text{جتا} - 2} = \frac{1}{(جتا + هـ - ت جاه)^2} = \frac{1}{(جتاه - ت جاه)^2} = 1$$

$$= \text{جتا} 2\text{هـ} + \text{ت جا} 2\text{هـ} \quad \therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

مثال:

$$1- = \frac{1-}{12(\text{جتا} 30^5 - \text{ت جا} 30^5)} \quad \text{أثبت أن:}$$

الحل

$$1- = \frac{1-}{1} = \frac{1-}{(0 \times \text{ت} + 1)} = \frac{1-}{(\text{جتا} - 5360 + \text{ت جا} - 5360)} = \text{ط}_1$$

$$\therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

$$\frac{1}{8} - = \frac{4(\text{ت} - 1)^5 (\text{ت} + 3)}{5(\text{ت} + 6)} \quad \text{مثال: أثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{2(2(\text{ت} - 1))}{5^2} = \frac{4(\text{ت} - 1)^5 (\text{ت} + 3)}{5^2 (\text{ت} + 6)^5} = \text{ط}_1$$

$$\frac{1-}{8} = \frac{4-}{32} = \frac{2\text{ت} 4}{32} = \frac{2^2(\text{ت} + 2 - 1)}{5^2}$$

$$\therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

الجذور

أولاً: الجذرين التربيعين لعدد مركب



هناك طريقتان للحل



بالطريقة الجبرية

نفرض أن $\sqrt{س + ت ص}$ ونحل المعادلة.



بالطريقة المثلثية القطبية:

إذا كان $ع = ر(\text{جتاه} + \text{ت جاه})$.

$$\left[\frac{\pi ك 2 + \text{هـ}}{2} \right], \quad \sqrt[ع]{ر} = \sqrt[ع]{ر}$$

$$ك = 0, 1$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعين للعدد $ع = 1 + 3$ ت

الحل:

$$س = 1 ، ص = \sqrt[3]{1}$$

$$\therefore ر = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\therefore جتاه = \frac{1}{2} ، جا ه = \frac{\sqrt[3]{1}}{2} \therefore ه = \sqrt[5]{60}$$

$$\therefore ع = \sqrt{1+3} = [\frac{\pi ك 2 + 300}{2} ، ك = 0 ، 1$$

$$(1) \text{ عندما } ك = 0 \therefore \text{ الجذر الأول } = [\sqrt{2} ، \sqrt[5]{30}$$

$$= \sqrt{2} \text{ (جتا 30 + ت 30)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} ت \right)$$

$$(2) \text{ عندما } ك = 1 \therefore \text{ الجذر الثاني } = - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} ت \right)$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعين للعدد $ع = 2 - 2\sqrt[3]{2}$ ت

الحل

[1] بالطريقة المثلثية:

$$\therefore س = 2 ، ص = \sqrt[3]{2-2}$$

$$\therefore ر = \sqrt[4]{16} = \sqrt{12+4} = \sqrt[2]{ص^2 + س^2}$$

تعيين ه:

$$\therefore جتاه = \frac{1}{2} \therefore جا ه = \frac{\sqrt[3]{2-2}}{2}$$

$$\therefore ه تقع في الربع الرابع. \therefore ه = \sqrt[5]{360} + \sqrt[5]{300} = \sqrt[5]{300}$$

$$\therefore ع = \frac{1}{2} = \sqrt[4]{\left(\frac{\pi ك 2 + 300}{2} \text{ جتا} + \frac{\pi ك 2 + 300}{2} \text{ جا} ت \right)} : ك = 0 ، 1$$

$$(1) \text{ عندما } ك = 0$$

$$\therefore \text{أحد الجذرين} = 2 \left(\text{جتا } \frac{300^\circ}{2} + \text{جا } \frac{300^\circ}{2} \right) = 2 (\text{جتا } 150 + \text{جا } 150 \text{ ت})$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ ت} \right) = (-\frac{1}{2} + 3 \text{ ت})$$

(2) عندما ك = 1

$$\therefore \text{الجذر الآخر} = 2 \left(\text{جتا } \frac{300^\circ}{2} + \text{جا } \frac{300^\circ}{2} \right) = 2 \left(\text{جتا } \frac{2+\pi \text{ ك}}{2} + \text{جا } \frac{2+\pi \text{ ك}}{2} \right)$$

$$= 2 (\text{جتا } \frac{660}{2} + \text{جا } \frac{660}{2} \text{ ت}) = 2 (\text{جتا } 330 + \text{جا } 330 \text{ ت})$$

$$= 2 (\text{جتا } -530 + \text{جا } -530 \text{ ت}) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ت} \right) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \text{ ت})$$

(2) بالطريقة الجبرية:

نفرض أن أحد الجذور (س + ت ص) للعدد ع

$$\therefore (س + ت ص)^2 = 2 - 2\sqrt{3} \text{ ت} \quad \therefore س^2 - 2ص^2 + 2ت ص = 2 - 2\sqrt{3} \text{ ت}$$

$$\therefore س^2 - 2ص^2 = 2 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$2س ص = 2 - 2\sqrt{3} \text{ ت} \quad \dots \dots \dots (2)$$

\therefore بالتربيع لكل من (1) ، (2)

$$س^4 - 4س^2ص^2 + 4ص^4 = 4 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$4س^2ص^2 = 12 - 4\sqrt{3} \text{ ت} \quad \dots \dots \dots (4) \text{ بالجمع (3) ، (4)}$$

$$س^4 - 4س^2ص^2 + 4ص^4 = 16$$

$$\therefore (س^2 + 2ص^2)^2 = 16 \quad \text{بأخذ } \sqrt{\quad}$$

$$\therefore س^2 + 2ص^2 = 4 \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 2 \dots\dots\dots (1) \text{ بالجمع}$$

$$3 = \text{س}^2 \quad \therefore \quad 6 = \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{س} = \pm \sqrt{3}$$

∴ بالتعويض عن س² في المعادلة رقم (5)

$$4 = \text{ص}^2 + 3 \quad \therefore \quad 4 = \text{ص}^2 + 2$$

$$\therefore \text{ص}^2 = 4 - 2 = 2 \quad \therefore \quad 1 = \text{ص} \leftarrow 1 = \text{ص}^2$$

∴ الجذرين $\pm = (\sqrt{3} - \text{ت})$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (ت)

[1] باستخدام الطريقة المثلثية:

$$\therefore \text{ت} = [1, 90^\circ]$$

$$\therefore \sqrt{\text{ع}} = [1, \frac{90 + 2\pi\text{ك}}{2}]$$

(1) عندما ك = 0

$$\therefore \text{الجذر الأول} = [1, 45^\circ] = \text{جتا } 45^\circ + \text{تجا } 45^\circ$$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{ت})$$

(2) عندما ك = 1

$$\therefore \text{الجذر الثاني} = [1, 225^\circ] = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{ت})$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $5 + 12\text{ت}$

الحل

$$\text{نضع } \sqrt{5 + 12\text{ت}} = \text{س} + \text{تص} \text{ بالتربيع.}$$

$$\therefore 5 + 12\text{ت} = \text{س}^2 - \text{ص}^2 + 2\text{تص}$$

$$(1) \dots\dots\dots \therefore \text{س} - 2 \text{ص} = 5$$

$$(2) \dots\dots\dots \therefore 2 \text{س} \text{ص} = 12$$

بالتربيع كل من (1) ، (2)

$$(3) \dots\dots\dots \therefore \text{س} - 4 \text{س}^2 \text{ص}^2 + 2 \text{ص}^4 = 25$$

$$(4) \dots\dots\dots \text{بالجمع} \quad 4 \text{س}^2 \text{ص}^2 = 144$$

$$\text{س} + 4 \text{س}^2 \text{ص}^2 + 2 \text{ص}^4 = 169$$

$$\therefore \sqrt{\text{س} + 2 \text{ص}^2} = \sqrt{169} \text{ بأخذ}$$

$$(5) \dots\dots\dots \therefore \text{س} + 2 \text{ص}^2 = 13$$

$$(1) \dots\dots\dots \text{بالجمع} \quad \text{س} - 2 \text{ص}^2 = 5$$

$$\therefore 2 \text{س}^2 = 18 \leftarrow \text{س} = 9 \leftarrow \text{س} = \boxed{3 \pm}$$

بالتعويض عن س² في رقم (5)

$$\therefore 2 \pm = \text{ص} \quad \therefore 4 = 2 \text{ص} \quad \therefore 9 + \text{ص} = 13$$

$$\therefore \text{الجذرين هما} \quad \pm = (\text{س} + \text{ت} \text{ص}) \pm = (3 + 2 \text{ت}) \pm$$

$$\boxed{\text{مثال:}} \text{أحسب قيمة ع} = (-2 + 2\sqrt{3} \text{ت})^{\frac{3}{2}}$$

الحل

$$\therefore \text{ع} = \sqrt[3]{(-2 + 2\sqrt{3} \text{ت})^3}$$

نحول العدد $(-2 + 2\sqrt{3} \text{ت})$ إلى الصورة المثلثية.

$$\therefore \text{س} = -2 \quad \text{ص} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{ر} = \sqrt[4]{12+4} = 4$$

$$\therefore \text{جتاه} = \frac{2-}{4} \leftarrow \text{جتاه} = \frac{1-}{2}$$

$$\therefore \text{جاه} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \leftarrow \text{جاه} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ ه تقع في الربع الثاني ∴ $180^\circ + 60^\circ = ه$

∴ $120^\circ = ه$

$$\sqrt[3]{[^\circ 120, 4]}_r = \sqrt[3]{[ه, ر]}_r = ع ∴$$

$$\sqrt[3]{[^\circ 0, 64]}_r = \sqrt[3]{[\pi 2, 64]}_r = ع ∴$$

$$8 \pm = \sqrt[3]{64}_r =$$

اليمن سنة 2000:

مثال: إذا كان (1 + ت) هو أحد الجذرين التربيعيين لعدد ع أوجد:

(1) الجذر الآخر. (2) العدد (ع)

الحل

$$(1) \text{ الجذر الآخر } = - (1 + ت)$$

$$(2) \text{ العدد الأصلي } = (1 + ت)^2 = 1 - 1 + 2 + ت = 2 + ت$$

ثانياً: الجذور التكعيبية للعدد المركب

إذا كان $ع = [ه, ر]$

$$\text{فإن } \sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi ك + ه}{3}\right) + ت} + \sqrt[3]{\left(\frac{\pi ك + ه}{3}\right) - ت}$$

ك = 0, 1, 2

مثال: أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع = 8 + ت$

الحل

$$\therefore ع = 8 + ت = [^\circ 90, 8]$$

$$\therefore \sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi ك + ه}{3}\right) + ت} + \sqrt[3]{\left(\frac{\pi ك + ه}{3}\right) - ت} : ك = 0, 1, 2$$

(1) عندما ك = 0

$$\therefore \text{الجذر الأول} = \sqrt[3]{8} = [^\circ 0 + 90, 2] = [^\circ 30, 2]$$

$$2 = \sqrt[3]{(ت + 30^\circ) + 30^\circ}$$

$$\sqrt[3]{62}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\right) 2 =$$

$$(t + \sqrt{3}) =$$

(2) عندما ك = 1

$$(2 + \sqrt{3}) 2 = \text{الجذر الثاني} = [2, \sqrt{3}] = 150^\circ$$

$$(-2 + \sqrt{3}) 2 =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\right) 2 =$$

$$(-2 + \sqrt{3}) =$$

(3) عندما ك = 2

$$(2 - \sqrt{3}) 2 = \text{الجذر الثالث} = [2, \sqrt{3}] = 270^\circ$$

∴ مجموع الحلول = $\{(\sqrt{3} + t), (-3 + t), (-2 - t)\}$

مثال: حل المعادلة $ع^3 + 64 = 0$

الحل

$$ع^3 - 64 = 0 \quad [64, \sqrt[5]{270}] \quad \text{بأخذ } \sqrt[3]{}$$

$$\therefore ع = \sqrt[3]{[64, \sqrt[5]{270}]} \quad \text{ك} = 0, 1, 2$$

(1) عندما ك = 0

$$4 = \text{الجذر الأول} = [4, \sqrt[5]{90}] = 90^\circ$$

(2) عندما ك = 1

$$4 = \text{الجذر الثاني} = [4, \sqrt[5]{210}] = 210^\circ$$

$$(-2 - \sqrt{3}) 2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) 4 =$$

(3) عندما ك = 2

∴ الجذر الثالث = [4 ، 330] = $(2\sqrt{3} - 2)$ =

حل تمارين ومسائل (1-5) ص 40

61 أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة مستخدماً مبرهنة دي موافر:

(أ) $(2 \text{جتا } 15^\circ + \text{ت جا } 15^\circ)^3$ (ب) $(\sqrt{2} \text{جتا } 30^\circ + \text{ت جا } 30^\circ)^4$

(ج) $(-1 + \sqrt{3} \text{ت})^5$ (د) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^4$

الحل

(أ) ع $= 2^3 (\text{جتا } 15^\circ + 3 \text{ت جا } 15^\circ)^3 = 8 (\text{جتا } 45^\circ + \text{ت جا } 45^\circ)$

$= [8, 545]$

(ب) ع $= (\sqrt{2} \text{جتا } 30^\circ + 4 \text{ت جا } 30^\circ)^4 = 4 (\text{جتا } 120^\circ + \text{ت جا } 120^\circ)$

ج(محلول كمثال).

(د) نحول $-1 - \sqrt{3} \text{ت}$ للصورة القطبية أولاً.

$-1 - \sqrt{3} \text{ت} = 2 (\text{جتا } 240^\circ + \text{ت جا } 240^\circ)$

$= 4 \left(\frac{2 (\text{جتا } 0^\circ + \text{ت جا } 0^\circ)}{2 (\text{جتا } 240^\circ + \text{ت جا } 240^\circ)} \right) = 4 \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} \right)$

$= [1, 240^\circ]$

$= [1, 120^\circ]$

$= [1, 480^\circ]$

62 بسط ما يلي:

(أ) $\frac{(\text{جتاه} - \text{ت جا ه})^2}{(\text{جتاه} - \text{ت جا ه})^3}$ (ب) $\frac{\text{جتا ه} + \text{ت جا ه}}{\text{جتاه} + \text{ت جا ه}}$

(ج) $\frac{(\text{جتا } 35^\circ + \text{ت جا } 35^\circ)^8}{(\text{جتا } 19^\circ + \text{ت جا } 19^\circ)^7}$

الحل

$$(أ) \quad \frac{1}{\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه} - \text{جا} - \text{ه}} = \frac{1}{\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه} - \text{جا} - \text{ه}} = \frac{1}{\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه} - \text{جا} - \text{ه}} = \frac{2(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه})}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه})}$$

$$(ب) \quad \text{جتا} + \text{ت جا} = (\text{ه} - \text{ه}2) + (\text{ه} - \text{ه}2) = \frac{\text{جتا} + \text{ت جا}}{\text{جتا} + \text{ت جا}}$$

$$(ج) \quad \frac{8(\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3)}{7(\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

$$\frac{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3} = \frac{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3} = \frac{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}$$

$$\text{جتا} = (\text{جتا} - 280) + (\text{ت جا} + 280 - \text{جتا}) = (\text{جتا} - 280) + (\text{ت جا} + 280 - \text{جتا}) = (\text{جتا} - 280) + (\text{ت جا} + 280 - \text{جتا})$$

63 أثبت صواب ما يلي:

$$(أ) \quad \frac{1}{2} = \frac{\text{ت}}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

$$(ب) \quad 256 = \frac{8(\text{ت} + 1)^4}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

$$(ج) \quad \text{ت} = \frac{6(\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3)}{3(\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

الحل

$$(أ) \quad \frac{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}{3(\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3)} = \frac{\text{ت}}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

$$\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3 = (\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3) \times \frac{\text{ت}}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3}$$

$$\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3 = \frac{\text{ت}}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3} (\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)$$

$$(ب) \quad \frac{4^2[\text{ت} + 1]^2}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)} = \frac{2^2[\text{ت} + 1]^2}{3(\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3)}$$

$$\frac{4^2 \times 2(2 - \sqrt[3]{2})}{\text{جتا} + \text{ت جا} + \text{ه}^3} = \frac{4(2 + \text{ت} + 1)^2(3 - \sqrt[3]{2} + 1)}{\text{جتا} - \text{ت جا} + \text{ه}^3}$$

$$\frac{16 \times (8 - \sqrt[3]{8} - 8)}{(\sqrt[3]{2} + 1)^2} = \frac{16 \times (4 + \sqrt[3]{8} - 2)}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

$$256 - = 2 \times 16 \times 8 - = \frac{16 \times (\sqrt[3]{t} + 1)8 -}{(\sqrt[3]{t} + 1) \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{6(545 - \text{جا} + 545 - \text{جتا})^5 (530 \text{ جا} + 530 \text{ جتا})}{(575 \times 2 \text{ جا} + 575 \times 2 \text{ جتا})} = \text{د الأيمن}$$

$$\frac{(6 \times 45 - \text{جا} + 6 \times 45 - \text{جتا})^5 (30^\circ \text{ جا} + 30^\circ \text{ جتا})}{5150 \text{ جا} + 5150 \text{ جتا}} =$$

$$\frac{5(270 - \text{جا} + 5270 - \text{جتا}) (5150 \text{ جا} + 5150 \text{ جتا})}{(5150 \text{ جا} + 5150 \text{ جتا})} =$$

$$\text{جتا} 5270 + \text{جا} 5270 = (1 \times \text{ت} + 0) = \text{ت}$$

64 أوجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية باستخدام الصورة الجبرية:

أ) 8ت (ب) $\frac{t+1}{2\sqrt{t}}$ ج) 40-9ت

د) $15 + \frac{(t+1)8}{(t+1)}$ هـ) 8+15ت و) 1-2ت - 2ت+2ت³

الحل

بفرض أن $\sqrt[3]{8} = \text{س} + \text{ت ص}$ بالتربيع.

$$\text{س}^2 - 2\text{ص} + 2\text{س ص} = 8$$

$$\therefore \text{س}^2 - 2\text{ص} = 0 \quad (1) \dots \dots \dots$$

$$2\text{س ص} = 8 \quad (2) \dots \dots \dots \text{بتربيع (1)، (2) ثم الجمع تحصل على}$$

$$\text{س}^2 + 2\text{ص} = 8 \quad (3) \dots \dots \dots$$

$$\text{س}^2 - 2\text{ص} = 0 \quad (1) \dots \dots \dots \text{بالجمع}$$

$$\therefore 2\text{س} = 8 \quad \therefore \text{س} = 4 \quad \therefore \text{س} = 2 \pm$$

بالتعويض عن س^2 في رقم (3)

$$\therefore 4 + 2\text{ص} = 8 \quad \therefore \text{ص} = 4 \quad \therefore \text{ص} = 2 \pm$$

الجزرين هما $\pm (2 + 2)$

(ب) حل بنفس الأسلوب.

(ج) حل بنفس الأسلوب.

(د) $15 + \frac{2(2-1)8}{1+1} = 15 + \frac{(2-1)8}{(2+1)}$ بالضرب \times مرافق المقام

$$4 = (2-1)2 + 2 = 15 + 8 - 15$$

∴ بفرض $15 - 8 = 7$ $ص + ت = 7$ بالتربيع.

∴ $ص^2 - 2ص + 7 = 15$ (1)

$2ص - 8 = 8$ (2)

بتربيع (1) ، (2) ثم الجمع ∴ $289 = 64 + 225 = 2ص^2 + 2س^2$

∴ $17 = 2ص^2 + 2س^2$ (3)

بجمع (1) ، (3) ∴ $32 = 2س^2$ بطرح (1) من (3) ∴ $2ص^2 = 2$

$16 = 2س^2$ $ص = 1$

$4 = 2س$ $س = 2$

∴ الجزيرين التربيعيين $\pm (4 - 2)$

(هـ) بنفس الطريقة الناتج $\pm (2 + 4)$

(و) $1 - 2 - 2 + 2 = 3$ $2 - 2 + 2 - 1 = 3$

$3 - 4 = 4$ وبففس الطرق السابقة.

5 محلول كمثال.

66 أوجد قيمة ما يأتي:

(أ) $\sqrt[3]{8}$ (ج) $560 + 560$ (ت) 560

(ب) $\sqrt[3]{2+2}$

(ج) $\sqrt[4]{4}$

(هـ) $\frac{5}{2}(3+1)$

(و) $\frac{7-t}{t+1}$

(د) $\sqrt{-2}$

الحل

$$(أ) \therefore \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\epsilon} \quad (\text{جتا } \frac{360+560}{3} + \text{ت جا } \frac{360+560}{3}) : \text{ك} \ni \text{ص}$$

$$2 = (\text{جتا } 120 + 20) + \text{جا } (120 + 20)$$

$$(1) \text{ عندما ك} = 0$$

$$\text{الجذر الأول} = 2 = (\text{جتا } 20 + \text{ت جا } 20)$$

$$(2) \text{ عندما ك} = 1$$

$$\text{الجذر الثاني} = 2 = (\text{جتا } 140 + \text{ت جا } 140)$$

$$(3) \text{ عندما ك} = 2$$

$$\text{الجذر الثالث} = 2 = (\text{جتا } 260 + \text{ت جا } 260)$$

$$(ب) \text{ نحول } 2- + 2 \text{ للصورة القطبية أولاً} = 2- = \text{ص} = 2$$

$$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{جتاه} = \frac{1-}{2\sqrt{2}}, \quad \text{جاه} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \therefore \text{ه في الربع الثاني}$$

$$\therefore \text{ه} = 180 - 45 = 135$$

$$\therefore \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\frac{360+5135}{3}, \sqrt[3]{8}} = [\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{120+545}]$$

$$(1) \text{ عندما ك} = 0$$

$$\text{الجذر الأول} = \sqrt[3]{8} = (\text{جتا } 45 + \text{ت جا } 45)$$

$$(2) \text{ عندما ك} = 1$$

$$\text{الجذر الثاني} = \sqrt[3]{8} = (\text{جتا } 165 + \text{ت جا } 165)$$

$$(3) \text{ عندما ك} = 2$$

$$\text{الجذر الثالث} = \sqrt[3]{8} = (\text{جتا } 285 + \text{ت جا } 285)$$

$$\text{ج} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{\frac{360+180}{3}}, \quad [\sqrt[4]{4}, 90 + 45]$$

(1) عندما ك = 0

الجزر الأول = $\sqrt[4]{4}$ (جتا +45° ت جا 45°)

(2) عندما ك = 1

الجزر الثاني = $\sqrt[4]{4}$ (جتا +135° ت جا 135°)

(3) عندما ك = 2

الجزر الثالث = $\sqrt[4]{4}$ (جتا +225° ت جا 225°)

(4) عندما ك = 3

الجزر الرابع = $\sqrt[4]{4}$ (جتا +315° ت جا 315°)

$$[1, 30^\circ + 40^\circ ك] = \left[\frac{360^\circ + 270^\circ ك}{9}, \sqrt[9]{1} \right] = \sqrt[9]{-1} ت$$

(1) عندما ك = 0 : الجزر الأول = [1, 30°]

(2) عندما ك = 1 : الجزر الثاني = [1, 70°]

(3) عندما ك = 2 : الجزر الثالث = [1, 110°]

(4) عندما ك = 3 : الجزر الرابع = [1, 150°]

(5) عندما ك = 4 : الجزر الخامس = [1, 190°]

(6) عندما ك = 5 : الجزر السادس = [1, 230°]

(7) عندما ك = 6 : الجزر السابع = [1, 270°]

(8) عندما ك = 7 : الجزر الثامن = [1, 310°]

(9) عندما ك = 8 : الجزر التاسع = [1, 350°]

هـ) محلول كمثال.

$$\sqrt[4]{4+3} = \sqrt[4]{\frac{8+6}{2}} = \sqrt[4]{\frac{7+7+1+1}{1+1}} = \sqrt[4]{\frac{-1}{-1} \times \frac{7+1}{1+1}}$$

نضع $\sqrt[4]{4+3} = س + ت$ ص بالتربيع للطرفين

$$\therefore 3 - 4 + 3 = 2 - 2 + 2 \text{ ص ت}$$

$$(1) \dots\dots\dots 3 - = 2 - 2 \text{ ص}$$

$$(2) \dots\dots\dots 4 = 2 \text{ ص ص}$$

$$(3) \dots\dots\dots 9 = 4 - 2 + 2 \text{ ص}$$

$$(4) \dots\dots\dots 16 = 4 \text{ ص}^2$$

$$\therefore 25 = 4 + 2 + 2 \text{ ص}$$

$$\therefore 25 = (2 + 2)^2 \text{ ص}$$

$$(5) \dots\dots\dots 5 = 2 + 2 \text{ ص}$$

$$(1) \dots\dots\dots 3 - = 2 - 2 \text{ ص}$$

$$\therefore 2 = 2 \text{ ص} \Leftarrow 1 = 2 \text{ ص} \Leftarrow 1 \pm = 1 \pm$$

$$\therefore 2 \pm = \text{ص} \quad \therefore 4 = 2 \text{ ص} \quad (5) \text{ بالتعويض عن } 2 \text{ في رقم (5)}$$

$$\therefore \text{الجذرين هما } \pm (2 + 1)$$

67 حل كلاً من المعادلات الآتية حيث $\exists \text{ م}$:

$$\text{أ) } 3 = 3 \text{ ع} \quad \text{ب) } 4 - 1 = 3 \text{ ع} \quad \text{ج) } 8 + 3 = 0 \text{ ع}$$

$$\text{د) } 27 - 3 = 0 \text{ ع} \quad \text{و) } 1 = 5 \text{ ع}$$

الحل

$$\text{أ) } 3 = 3 \text{ ع} \Rightarrow [90^\circ, 1] = \text{ع} \Rightarrow [90^\circ, 1]^3 = [90^\circ + 360^\circ \text{ك}, 1]^3$$

$$\therefore \text{ع} = [120^\circ + 30^\circ \text{ك}, 1]$$

$$(1) \text{ عندما ك} = 0$$

$$\therefore \text{الجذر الأول} = [30^\circ, 1] = \text{جتا } 30^\circ + \text{تجا } 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ت}$$

$$(2) \text{ عندما ك} = 1$$

$$\therefore \text{الجذر الثاني} = [150^\circ, 1] = \text{جتا } 150^\circ + \text{تجا } 150^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ت}$$

(3) عندما ك = 2

∴ الجذر الثالث = [1 ، 270°] جتا + 270° ت جا = 270° - ت

$$[ب] ع^{-4} = 1 - \sqrt[3]{2} = [2 ، 120°] \Leftarrow ع = [4\sqrt[2]{2} ، \frac{120+360^\circ ك}{4}]$$

$$\therefore ع = [4\sqrt[2]{2} ، 30^\circ + 90^\circ ك]$$

$$(1) \text{ عندما ك = 0} \quad \therefore \text{الجذر الأول} = [30^\circ ، 2\sqrt[2]{2}]$$

$$(2) \text{ عندما ك = 1} \quad \therefore \text{الجذر الثاني} = [120^\circ ، 2\sqrt[2]{2}]$$

$$(3) \text{ عندما ك = 2} \quad \therefore \text{الجذر الثالث} = [210^\circ ، 2\sqrt[2]{2}]$$

$$(4) \text{ عندما ك = 3} \quad \therefore \text{الجذر الرابع} = [300^\circ ، 2\sqrt[2]{2}]$$

$$[ج] ع^3 = 8 - ت = [8 ، 270^\circ]$$

$$\therefore ع = [2 ، 90^\circ + 120^\circ ك]$$

$$(1) \text{ عندما ك = 0} \quad \therefore \text{الجذر الأول} = [2 ، 90^\circ] = 2$$

$$(2) \text{ عندما ك = 1} \quad \therefore \text{الجذر الثاني} = [2 ، 210^\circ]$$

$$2 = (جتا 210^\circ + ت جا 210^\circ)$$

$$= -(ت + 3)$$

$$(3) \text{ عندما ك = 2} \quad \therefore \text{الجذر الثالث} = [2 ، 300^\circ] = -1 - \sqrt[3]{2}$$

[د] يحل بنفس الطريقة السابقة.

[و] يحل بنفس الطريقة السابقة.

8 محلول كمثال.

69 أوجد قيمة س ، ص التي تحقق المعادلات.

$$(أ) (س + ت ص) = 2 \quad 28 - 45 = 2$$

$$(ب) (س + ت ص)^2 = (ت - 3) \quad 5 = (3 - ت)$$

الحل

$$[أ] س^2 - ص^2 + 2ت س ص = 28 - 45$$

$$(1) \dots\dots\dots 45 = \text{س}^2 - \text{ص}^2 \therefore$$

$$(2) \dots\dots\dots 28 = \text{س}^2 - \text{ص}^2 \therefore$$

بالتربيع لكل من (1) ، (2)

$$(3) \dots\dots\dots 2025 = \text{س}^4 - 2\text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4 \therefore$$

$$(4) \dots\dots\dots \text{بالجمع} \quad 784 = 4\text{س}^2\text{ص}^2$$

$$2809 = \text{س}^4 + 2\text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4$$

$$\sqrt{\quad} \text{ بأخذ} \quad 2809 = (\text{س}^2 + \text{ص}^2)^2 \therefore$$

$$(5) \dots\dots\dots 53 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 \therefore$$

$$(1) \dots\dots\dots \text{بالجمع} \quad 45 = \text{س}^2 - \text{ص}^2$$

$$49 = \text{س}^2 \leftarrow \quad 98 = 2\text{س}^2$$

$$7 \pm = \text{س} \leftarrow$$

بالتعويض عن س^2 في رقم (5)

$$4 = \text{ص}^2 \leftarrow \quad 53 = \text{ص}^2 + 49$$

$$(2) \pm = \text{ص} \leftarrow$$

$$\frac{(1-3\text{ت})5}{(3-\text{ت})} = [\text{ب}] (\text{س} + \text{ت})^2$$

$$\frac{\text{ت} - 3 - \text{ت}}{\text{ت} - 3 - \text{ت}} \times \frac{(1-3\text{ت})5}{(3-\text{ت})} =$$

$$\frac{(1-3\text{ت})5}{10} =$$

$$\frac{8-\text{ت}}{2} =$$

$$4-\text{ت} = \text{س}^2 - \text{ص}^2 + 2\text{تس} \text{ ص}$$

أكمل الباقي أنت.

محلول كمثال. 10

