De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

a) Vi reducerer udtrykket. Det er en smal sag.

$$a^2 + b^2 - a \cdot (a + b)$$
$$= a^2 + b^2 - a^2 - ab$$
$$= b^2 - ab$$

Dermed er udtrykket reduceret på ønsket form.

Opgave 2

a) Funktionen $f(x)$ er givet:

$$f(x) = \frac{4}{x} + 3x$$

Vi bestemmer $f(4)$.

$$f(4) = \frac{4}{4} + 3 \cdot 4 = 1 + 12 = 13$$

Opgave 3

a) Der er givet andengradsligningen.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Vi kan omdanne den til $a(x - r_1)(x - r_2)$, eftersom $a = 1$.

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Og dermed må rødderne være

$$x = 1 \vee x = 3$$

(Overbevis dig om, at det passer ved at bruge diskriminant metoden.)

Opgave 4

a) Der er givet en model over en bestemt persons alkoholpromille samt den tid der er givet. Modellen er:

$$y = 1.6 - 0.2x$$

Her er tallet $b = 1.6$ og $a = -0.2$ og dermed er der tale om en lineær forskrift. Tallene har deres egen betydning:

Efter den sidste genstand var personens promille på 1.6 hvorved dette aftog hver time med 0.2 promille.

Opgave 5

a) Der er givet en funktion $f(x)$.

$$f(x) = 2x^3 + 4 \cdot \ln(x)$$

Her ønskes $f'(x)$.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} + 4 \cdot \frac{1}{x} = 6x^2 + \frac{4}{x}$$

Her blev regnereglerne:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

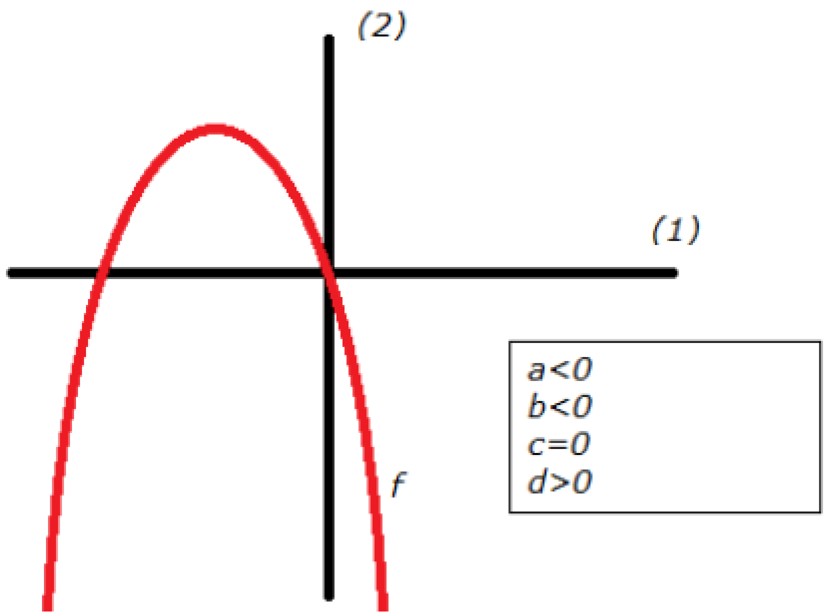
Anvendt.

Opgave 6

a) Der er oplyst et andengradspolynomium:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der er endvidere oplyst følgende kriterier: $a < 0$ og $d > 0$.
Vi tegner en graf for $f(x)$.



(Er det muligt at lave flere forskellige grafer for $f(x)$? Overbevis dig selv om man evt. kan det.)

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

a) Der er givet en trekant. Vi bestemmer længden $|AC|$ med hjælp af sinusrelationerne. Livet vil dog være lettere hvis man også kendte til vinkel C, så den bestemmes.

$$\angle C = 180^o - \angle A - \angle B = 180^o - 30^o - 130^o = 20^o$$

Dernæst kan man bestemme $|AC|$.

$$\frac{\sin(C)}{|AB|} = \frac{\sin(B)}{|AC|} \Leftrightarrow \sin(C) \cdot |AC| = \sin(B) \cdot |AB| \Leftrightarrow |AC| = \frac{\sin(B) \cdot |AB|}{\sin(C)}$$

Dernæst indsættes tallene i formlen, hvor vi fik isoleret $|AC|$.

$$|AC| = \frac{\sin(130) \cdot 10}{\sin(20)} = 22.397$$

b) Midtpunktet er ved $|BD|$. Man kan nu benytte sig af cosinusrelationerne:

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos(A)}$$

Tallene indsættes (bemærk, at $|AD| = \frac{|AC|}{2}$).

$$|BD| = \sqrt{10^2 + \left(\frac{22.397}{2}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{22.397}{2}\right) \cdot \cos(30)} = 5.607$$

Dermed blev den ønskede længde bestemt.

Opgave 8

a) Kvartilsættet bestemmes. Der er totalt 25 kursister.
Medianen aflæses til at være 32.
Nedre kvartil bestemmes:

$$\{23, 25, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 29, 30, 30, 32\}$$
$$\frac{28 + 29}{2} = 28.5$$

Øvre kvartil bestemmes:

$$\{33, 34, 34, 34, 35, 35, 38, 38, 39, 42, 45, 50\}$$
$$\frac{35 + 38}{2} = 36.5$$

Hermed er kvartilsættet som følger:

$$\{28.5;\;\; 32;\;\; 36.5\}$$

Opgave 9

a) Der er givet et skema over nogle observationer for grises vægt og moderkagens vægt. I Maple defineres oplysningerne og der udføres lineær regression.

```
restart :; with(Gym) :
L1 := [688, 795, 878, 999] :; L2 := [50, 100, 150, 200] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
f(x)
        0.489836849616231 x − 286.462953677634
```

Dermed blev tallene a og b bestemt. (Se forskrift).

b) Da fødselsvægten er $950g$ indsættes tallet i $f(x)$.

$$f(950) = 0.48983 \cdot 950 - 286.4629 = 178.882$$

Dvs. hvis fødselsvægten er $950g$ er moderkagen $178.882g$.

Opgave 10

a) Der er givet en eksponentiel funktion over antallet af tigere i landet Indien.

$$f(x) = 3600 \cdot 0.8544^x$$

Her bestemmes $f(0)$ og $T_{\frac{1}{2}}$.

$$f(0) = 3600$$

Dvs. i år 2002 var antallet af tigere i Indien 3600.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.8544)} = 4.404$$

Dvs. antallet af tigere halveres ved 4.404. Ca. 4.4 år senere efter 2002.

b) Der benyttes fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r \Leftrightarrow r = a - 1$$

Her ønskes r.

$$r = 0.8544 - 1 = -0.1456$$

Tallet ganges med 100%:

$$r = -0.1456 \cdot 100\% = -14.56\%$$

c) Funktionen differentieres.

$$f'(x) = 3600 \cdot 0.8544^x \cdot \ln(0.8544)$$

Heri indsættes $f'(5)$:

$$f'(5) = 3600 \cdot 0.8544^5 \cdot \ln(0.8544) = -257.923$$

Dvs. i år 2007 falder antallet af tigere i Indien med 258 tigere pr. år.

Opgave 11

a) Der er givet en funktionsforskrift.

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

Ligningen $f(x) = 0$ løses

$$x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -2.805884 \quad \vee \quad x = -0.356394 \quad \vee \quad x = 0.356394 \quad \vee \quad x = 2.805884$$

Dermed fik vi de ønskede rødder.
(Den kvikke studerende vil også kunne se, at man kunne substituere $z = x^2$, så man får en andengradsligning. Overbevis dig om, at det er muligt, hvis du ønsker at udfordre dig selv.)

b) Ligningen for tangenten ønskes. Først bestemmes den afledede.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

Vi finder $f(3)$ og $f'(3)$

$$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + 1 = 10$$
$$f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 16 \cdot 3 = 60$$

Tangentligningen er så:

$$y = 60 \cdot (x - 3) + 10 = 60x - 170$$

c) Der bestemmes monotoniforhold. Vi bruger den dobbelte afledede. Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$f'(x) = 0$$

Dvs.

$$4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 16) = 0$$

Vi løser andengradsligningen:

$$4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Dvs. rødderne er:

$$x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$$

Fordi nulreglen blev anvendt. Dernæst bestemmes den dobbelte afledede af $f(x)$.

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

Deri indsættes rødderne fra ligningen $f'(x) = 0$.

$$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32, \qquad 32 > 0, \qquad lok\ min$$
$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 16 = -16, \qquad -16 < 0, \qquad lok\ max$$
$$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32, \qquad 32 > 0, \qquad lok\ min$$

Dvs. funktionen $f(x)$ er:
Aftagende i intervallet $(-\infty; -2]$ og $[0; 2]$
Voksende i intervallet $[-2; 0]$ og $[2; \infty)$.

(Overbevis dig om, at det passer ved at benytte dig af monotoniskemaet!)

Opgave 12

a) Der er givet to funktioner:
$$f(x) = x^3;\;\; g(x) = 8$$
Arealet M bestemmes:
$$M = \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^2 8 - x^3\,dx = \left[8x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 0 = 16 - \frac{16}{4}$$
$$= 16 - 4 = 12$$
Som er arealet.

Opgave 13

a) Der er givet en klods. Overfladearealet bestemmes.
$$A_{overflade} = 2 \cdot (x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x) = 2x^2 + 4xy$$
Hermed er overfladearealet udtrykt.

b) Hvis man skal bestemme maksimum af klodsens rumfang, så skal $V(x)$ differentieres.
$$V'(x) = 8 - \frac{3}{2}x^2$$
Ligningen $V'(x) = 0$ løses.
$$8 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2.3094$$
Eftersom vi arbejder i intervallet $0 < x < 4$ forkastes den negative værdi. Vi bruger den dobbelte afledede til at se, om det virkelig er et maksimum.
$$V''(x) = -3x$$
Vi indsætter $x = 2.3094$ og får:
$$V''(2.3094) = -3 \cdot 2.3094 = -6.9282$$
Eftersom tallet $-6.9282 < 0$ er der tale om et lokalt maksimum og dermed er $x = 2.3094$ den x-værdi, der giver det største volumen.