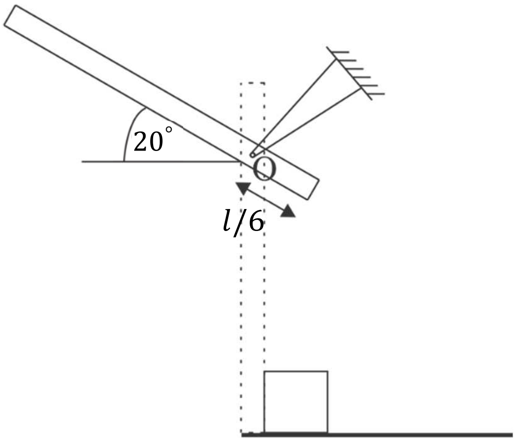
Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet
Predmet: Inženjerska fizika 1
Datum: 28. 01. 2022. godine

ZAVRŠNI INTEGRALNI ISPIT

Zadatak 1. (17 bodova)

Štap mase $M = 1$ kg i dužine $l = 0{,}5$ m može slobodno da rotira kroz tačku O. U početnom stanju štap se nalazio pod uglom $\alpha = 20°$ kao na slici i gurnut je tako da je brzina centra mase štapa bila 1,667 m/s. U vertikalnom položaju štap udara u tijelo mase $m = 400$ g i nastavlja da rotira. Koeficijent trenja je 0,2. Poslije koliko vremena će štap imati maksimalni otklon ako je tijelo prešlo put od 2 m i zaustavilo se. $I_0 = ml^2/12$, $g = 9{,}81$ m/s^2



1 [b]

s označenim tačkama i dužinama

Rješenje:

Moment inercije štapa, koristeći Steinerov obrazac, iznosi:

$$I = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{3}\right)^2 = 0{,}0486\ \mathrm{kgm^2}$$ 1+0,5 [b]

Početna ugaona brzina štapa iznosi:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{\frac{l}{3}} = 10\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$ 1+0,5 [b]

Koristeći se zakonom o održanju energije, ima se:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} + Mg\left(\frac{5l}{6} + \frac{l}{3}\sin\alpha\right) = \frac{I\omega^2}{2} + Mg\,\frac{l}{2}$$ 2 [b]

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mg\left(\frac{5l}{6} + \frac{l}{3}\sin\alpha - \frac{l}{2}\right)}{I}}$$

$$\omega = 13{,}79\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$ 1 [b]

Tijelo nakon sudara troši E_k na savladavanje sile trenja podloge:

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgs$$ 1 [b]

$$v = 2{,}8\ \text{m/s}$$ 0,5 [b]

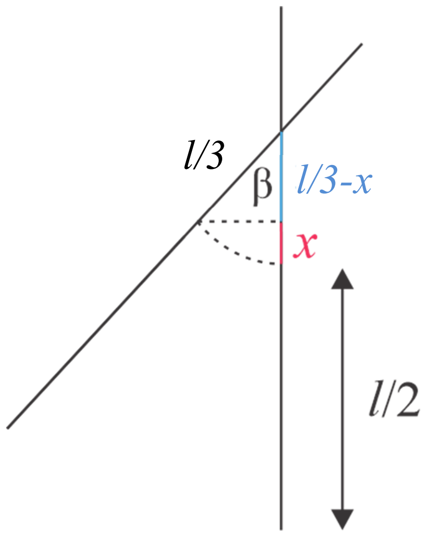
Koristeći se zakonom o održanju momenta impulsa (za trenutak sudara) ima se:β

$$I\omega = mv\frac{5l}{6} + I\omega_1$$ 1 [b]

$$\omega_1 = \omega - \frac{5mvl}{6I}$$

$$\omega_1 = 4{,}19\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$ 0,5 [b]

Da bi se dobio maksimalni otklon nakon sudara, koristit će se zakon o očuvanju energije i sljedeća skica:



1 [b]

$$\cos\beta = \frac{\frac{l}{3} - x}{\frac{l}{3}}$$

$$x = \frac{l}{3}(1 - \cos\beta)$$ 0,5 [b]

$$\frac{I\omega_1^2}{2} + Mg\frac{l}{2} = Mg\left[\frac{l}{2} + \frac{l}{3}(1 - \cos\beta)\right]$$ 2 [b]

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{3I\omega_1^2}{2Mgl}\right)$$

$$\beta = 42{,}35°$$ 1 [b]

Traženo vrijeme se može dobiti iz jednačine za kružno kretanje (ili preko srednje ugaone brzine):

$$\omega_1^2 = 2\alpha\varphi$$ 0,5 [b]

$$\omega_1 = \alpha t$$ 0,5 [b]

Kombinacijom prethodnih izraza ima se:

$$t = \frac{2\beta}{\omega_1} = 0{,}35 \text{ s}$$ 0,5+1 [b]

Zadatak 2. (15 bodova)

Kada je žica zategnuta između tačaka udaljenih 1,2 m, primjećuje se da je frekvencija osnovnog tona 40 Hz. Amplituda u trbuhu stojećeg talasa je 4 cm. Žica ima masu 50 g. Izračunati brzinu talasa u žici, silu zatezanja žice i izvesti jednačinu stojećeg talasa koji se formira na žici.

Rješenje:

Za osnovni ton dužina žice je

$$l = \frac{\lambda}{2}$$ 1 [b]

a brzina talasa je onda

$$c = \lambda f = 2lf_{ot} = 96 \text{ m/s}$$ 1+0,5 [b]

Brzina talasa u žici je

$$c = \sqrt{\frac{Fl}{m}}$$ 1 [b]

na osnovu čega se može izračunati sila zatezanja

$$F = \frac{mc^2}{l} = 384 \text{ N}$$ 0,5 [b]

Neka se u pravcu $x-ose$ prostire sinusni talas (crtež 14) dat funkcijom :

$$\psi_1 = A\sin(\omega t - kx), \qquad (65)$$ 1 [b]

onda se talas, koji se kreće u suprotnom smjeru može predstaviti funkcijom (vidjeti relaciju (10)):

$$\psi_2 = A\sin(\omega t + kx). \qquad (66)$$ 1 [b]

Rezultujući talas se dobije superpozicijom ova dva talasa:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$ 1 [b]

$$\psi = A\left[\sin\left(\omega t - kx\right) + \sin\left(\omega t + kx\right)\right],$$

$$\psi = A \cdot 2 \cdot \sin\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\cos\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2},$$ 1 [b]

$$\psi = 2A\sin\left(\omega t\right)\cos\left(-kx\right),$$

$$\boxed{\psi = 2A\cos\left(kx\right)\sin\left(\omega t\right).}$$ 2 [b]

Amplituda u trbuhu stojećeg talasa je maksimalna moguća amplituda

$$A_{max} = 2A$$ 2 [b]

Uvrštavanjem vrijednosti u opštu jednačinu stojećeg talasa dobija se

$$\psi = A_{max}\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\,\sin(2\pi f_{ot}t)$$ 1 [b]

$$\psi = 0{,}04\cos(2{,}62x)\sin(251{,}2t)$$ 2 [b]

Zadatak 3. (15 bodova)

Automobil A i autobus (B) se kreću jedan drugom u susret sa stalnim ubrzanjem a_A = 5 m/s^2 i a_B = 4 m/s^2 dok ne dostignu brzinu ograničenja od 60 km/h. U trenutku kada je rastojanje između njih bilo 109 m, njihove brzine su bile $v_A = v_B$ = 15 km/h. Odrediti:

a. za koliko vremena će se sresti;
b. koliko vremena se mimoilaze;
c. nacrtati dijagram položaja vozila r(t) za prvih 6 s kretanja. Položaj autobusa uzeti za referentni.

Dužina automobila je 4,6 m, a autobusa 20 m.

Rješenje:

a) Prvo je potrebno provjeriti da li će automobil i autobus dostići maksimalnu brzinu (odnosno brzinu ograničenja) prije susreta:

$$t_{1A} = \frac{v - v_A}{a_A} = 2{,}5\ \text{s}$$ 0,5+0,5 [b]

$$s_{1A} = v_A t_{1A} + \frac{a_A t_{1A}^2}{2}$$

$$s_{1A} = 26{,}04\ \text{m}$$ 0,5+0,5 [b]

$$t_{1B} = \frac{v - v_B}{a_B} = 3{,}125\ \text{s}$$ 0,5 +0,5[b]

$$s_{1B} = v_B t_{1B} + \frac{a_B t_{1B}^2}{2}$$

$$s_{1B} = 32{,}55\ \text{m}$$ 0,5+0,5 [b]

Dok autobus dostigne maksimalnu brzinu, automobil će preći dodatni put krećući se brzinom ograničenja

$$s'_{1A} = v(t_{1B} - t_{1A}) = 10{,}42m$$ 0,5 [b]

S obzirom da je $s_{1A} + s_{\prime 1A} + s_{1B} < 109m$ oba vozila će dostići brzinu ograničenja prije susreta.
1 [b]

Zbog toga kretanje pojedinog vozila možemo podijeliti na dio kojim se kreće ubrzano i dio kojim se kreće ravnomjerno

Ukupno vrijeme kretanja vozila je isto

$$t_{1A} + t_{2A} = t_{1B} + t_{2B}$$ 1 [b]

odakle je

$$t_{2B} = t_{1A} + t_{2A} - t_{1B}$$

Početno rastojanje između njih je

$$s = s_{1A} + s_{2A} + s_{1B} + s_{2B}$$ 0,5 [b]

što nakon uvrštavanja poznatih podataka i zakona puta za ravnomjerno kretanje daje

$$s = s_{1A} + vt_{2A} + s_{1B} + vt_{2B}$$ 1 [b]

$$s = s_{1A} + vt_{2A} + s_{1B} + v(t_{1A} + t_{2A} - t_{1B})$$

$$t_{2A} = 1{,}8\ \text{s}$$ 0,5 [b]

Do susreta će proći:

$$t_s = t_{1A} + t_{2A} = 4{,}3\ \text{s}$$ 0,5+0,5 [b]

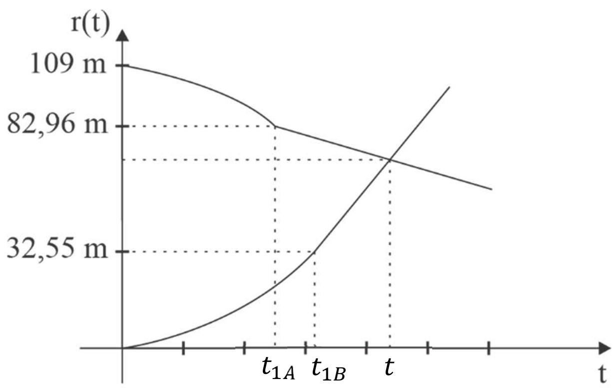
b) Vrijeme mimoilaženja iznosi:

$$(l_A + l_B) = 2vt$$ 1,5 [b]

$$t = \frac{l_A + l_B}{2v} = 0{,}738\ \mathrm{s}$$ 0,5+0,5 [b]

Gdje je $2v$ relativna brzina između vozila.

c)

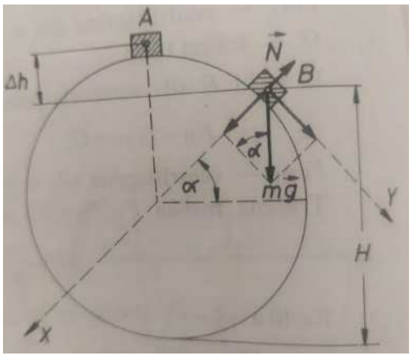


3 [b]

Zadatak 4. (13 bodova)

Tijelo mase m nalazi se na kugli radijusa R= 20 cm koja je učvršćena za horizontalnu podlogu. Tijelo počinje da klizi niz kuglu bez trenja. Odrediti zavisnost ubrzanja, brzine i reakcije podloge od visine H na kojoj se nalazi tijelo u odnosu na podlogu dok klizi niz kuglu (krajnje izraze srediti koliko to bude moguće). Na kojoj visini će tijelo napustiti kuglu?

2 [b]



Drugi Njutnov zakon daje:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$ 1 [b]

za x-osu:

$$ma_r = \frac{mv^2}{R} = mgsin\alpha - N$$ 1+1 [b]

a za y-osu:

$$ma_t = mgcos\alpha$$ 1 [b]

odakle slijedi da je

$$a_t = gcos\alpha = g\sqrt{1 - sin^2\alpha} = g\sqrt{\frac{H}{R}\left(2 - \frac{H}{R}\right)}$$ 1 [b]

Na osnovu zakona o očuvanju energije, brzina u nekoj proizvoljnoj tački B je

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2}$$ 1 [b]

$$v = \sqrt{2g(2R - H)}$$ 1 [b]

Uvrštavanjem ove brzine u formulu za radijalno ubrzanje dobiva se

$$a_r = 2g\left(2 - \frac{H}{R}\right)$$ 1 [b]

te je ukupno ubrzanje

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{g^2\left(2 - \frac{H}{R}\right)\left(8 - 3\frac{H}{R}\right)}$$ 1 [b]

Sila reakcije podloge je

$$N = mg\left(3\frac{H}{R} - 5\right)$$ 1 [b]

Tijelo će napustiti kuglu u trenutku kad je N = 0 tj. kad je

$$H = \frac{5}{3}R = 0{,}333 \text{ m}$$ 1 [b]