الوحدة الخامسة

نهاية متتالية

تعريف: إذا كانت <حن> متتالية غير منتهية تقترب من النهاية (ل η ح) إذا كان لكل عدد حقيقي ε 〈 0 (مهما صغرت قيمته) يوجد ر η ط* (تعتمد قيمته على اختيار ε) متحققة إذا كان |حن − ل| ∀ ε 〈 ن 〈 ر حيث ر أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحة.

التعريف رمزياً:

نها $_{ن\to\infty}$ حن = ل ⟺ ∀ ε 〈 0 يوجد ر 〈 0 بحيث ∀ ن 〈 ر ⟸ |حن − ل| 〈 ε.

<u>**أنتبـه:**</u> كلمه يوجد ردت المسألة للبحث عن ذلك العدد ر الذي يحقق المتراجحة من يساعدني في عملية البحث؟ بالحقيقة معي |حن − ل| 〈 ε دوماً صحيح لأن ε اختياري كيفي كما أريد.

أسير به إلى أن أصل إلى $\boxed{\text{ن 〈 رقم}}$ فيكون ذلك الرقم هو (ر) الذي أبحث عنه وهو أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحه.

* توضيح بفرض ε = 0.0001، حن = $\frac{1}{\text{ن}}$، ل = 0 أوجد (ر)

الحل: |حن − ل| 〈 ε ⟸ |$\frac{1}{\text{ن}}$ − 0| 〈 ε ⟸ 0.0001 〈 $\frac{1}{\text{ن}}$ 0.001

أقلب تقلب: ن 〈 $\frac{1}{0.0001}$ ن 1000 ∴ ر = 1000

* توضيح بفرض ε = 10^{-5}، حن = $\frac{\text{ن} + 1}{\text{ن}}$ ، ل = 1

أوجد ر:

أشكل المتراجحة $|ح_ن - ل| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{ن+1}{ن} - 1\right| < 10^{-5} \Leftarrow \left|\frac{ن+1-ن}{ن}\right|^{5} < 10^{-5} \Leftarrow {}^{5} < 10^{-5}$

$\Leftarrow |\frac{1}{ن}| \langle 10^{-5} \Leftarrow \frac{1}{ن} \rangle 10^{-5}$ أقلب $ن \Leftarrow \langle \frac{1}{10^{-5}} \Leftarrow \langle ن \rangle 10^{5}$

$\Leftarrow ن \rangle 100000$ $\therefore$ ر $= 100000$

<u>سؤال كيف نوجد النهاية؟</u> بالحقيقة طالما $ن \leftarrow \infty$

فهناك مبدأ بقول نتعامل مع الكبير (أكبر أس ونهمل الباقي) وأن كانت المتتالية كسر فإننا:

$$\frac{\text{نتعامل مع الكبير من البسط ونهمل الباقي}}{\text{الكبير من المقام ونهمل الباقي}}$$

مثال:

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{5ن^{3} - 2ن^{2} + ن}{3ن^{3} - 1} = \text{نها} \frac{\text{الكبير من البسط}}{\text{الكبير من المقام}} = \text{نها} \frac{5ن^{3}}{3ن^{3}} = \frac{5}{3}$$

مثال: $\text{نها} \frac{ن^{3} - ن + 1}{ن^{2} + ن + 1} = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن^{3}}{ن^{2}} = \frac{\text{الكبير}}{\text{الكبير}} = \lim_{ن \to \infty} ن = \infty$

<u>تمارين ومسائل (5 - 1)</u>

[1] سقطت كرة راسياً من ارتفاع معين فارتدت بعد الارتطام بالأرض إلى أعلى ارتفاع قدرة (10م) فإذا كانت ترتد كل مرة بعد الارتطام ارتفاعاً بمقدار $\frac{3}{4}$ الارتفاع السابق له مباشرة فكم عدد الارتطامات بالأرض لتصل الكرة إلى ارتفاع (1.33 متراً).

الحل: نفرض عدد الارتطامات (ن)

لاحظ ارتطم فارتفع أي كل ارتطام بقابله ارتفاع

∴ تتحول إلى متتالية هندسية حدها الأول $ح_1=10$ وأساسها ($=\frac{3}{4}$، $ح_ن=1.33$)

∴ حدودها $\langle 10$ ، $\frac{30}{4}$، $\frac{90}{16}$، .... $1.33\rangle$

القانون $ح_ن= ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow 1.33 = 10 \times (\frac{3}{4})^{ن-1}$ قسم على (10)

$0.133 = (\frac{3}{4})^{ن-1} \Leftarrow$ لو $0.133 =$ لو $(\frac{3}{4})^{ن-1}$

∴ لو $0.133 = (ن-1)$ لو $(\frac{3}{4})$

∴ $ن-1 = \frac{لو\ 0.133}{لو\ 0.75} \Leftarrow ن = 1+ \frac{لو\ 0.1330}{لو\ 0.75}$ استخدم الآلة

$\Leftarrow ن = 1+ \frac{0.876}{0.125} = 1 + 7 = 8 \Leftarrow ن = 8$

[2] بِيّن أن $\lim_{ن\to\infty} \frac{2ن^2 + 3ن + 4}{ن^2} = 2$

الحل بالتعريف: $\forall\ \varepsilon \rangle 0$ يوجد $ر \rangle 0$ بحيث $ن \rangle ر \Leftarrow |ح_ن - ل| \langle \varepsilon$

∴ $|ح_ن - ل| \langle \varepsilon$

$\Leftarrow \left| \frac{2ن^2 + 3ن + 4}{ن^2} - \frac{2}{1} \right| \langle \varepsilon$

$\left| \frac{2ن^2 + 3ن + 4 - 2ن^2}{ن^2} \right| \langle \varepsilon$

$\left| \frac{3ن + 4}{ن^2} \right| \langle \varepsilon$

∴ $\frac{3ن+4}{ن^2} \langle \varepsilon$

∴ $\frac{3ن}{ن^2} \langle \varepsilon$

∴ $\frac{3}{ن} \langle \varepsilon$

أقلب تقلب $\frac{ن}{3} \rangle \frac{1}{\varepsilon}$

أضرب بـ3

$\Leftarrow ن \rangle \frac{3}{\varepsilon}$ وبأخذ

ر أصغر

عدد طبيعي (يكبر $\frac{3}{\varepsilon}$ أو يساويه)

يكون $\lim_{ن\to\infty} ح_ن=2$

[3] إذا كانت $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002 \quad \forall$ ن> ر حيث ن $\in$ ط* ، ر أصغر عدد طبيعي

أوجد ن:

الحل: $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002$

$\frac{1}{\text{ن}} < 0.002$ أقلب تقلب ن> $\frac{1}{0.002}$

ن> $\Leftarrow \frac{1000}{2}$ ن > 500

بأخذ ر = 500 يكون $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002$ $\therefore$ ن $\in$ {500، 501،...}

[4] بين أن المتتالية $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ...... $\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+3}$ تسعى إلى (1) لما ن $\leftarrow \infty$

الحل: بالتعريف: $\forall\ \varepsilon > 0$ يوجد ر>0 بحيث ن > ر $\Leftarrow$ $|\text{ح}_{\text{ن}} - 1| < \varepsilon$

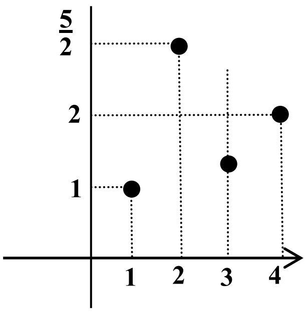
الحل: $|\text{ح}_{\text{ن}} - 1| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+3} - 1\right| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+2-\text{ن}-3}{\text{ن}+3}\right| < \varepsilon$

$\Leftarrow \left|\frac{-1}{\text{ن}+3}\right| < \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{\text{ن}+3} < \varepsilon \Leftarrow$ بالقلب ن + 3 > $\frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow$

$\Leftarrow$ ن > $\frac{1}{\varepsilon} - 3$

وبأخذ ر أصغر عدد طبيعي يكبر $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\right)$ أو يساويه تكون النهاية صحيحة.

[6] مثِّل المتتالية ($\text{ح}_{\text{ن}}$) بيانياً إذا كانت $\text{ح}_{\text{ن}} = 2 + \frac{(-1)^{\text{ن}}}{\text{ن}}$ ثم برهن أنها تسعى نحو العدد (2).



الحل: $\text{ح}_1 = 2 + \frac{-1}{\text{ن}} = 2 - \frac{1}{1} = 1$ (1 ، 1)

$\text{ح}_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ $\left(2 ، \frac{5}{2}\right)$

$\text{ح}_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ $\left(3 ، \frac{5}{3}\right)$

$\text{ح}_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ $\quad (4 ، \frac{9}{4})$

لاحظ النقاط كلما كبرت ن نقترب من الرقم (2)

مما يؤكد $\text{ح}_\text{ن} \leftarrow 2$ لما ن $\leftarrow \infty$ ممكن التأكد بالتعريف.

[7] المتتاليات التالية غير منتهية ناقش أياً منها متقاربة وأوجد نهايتها:

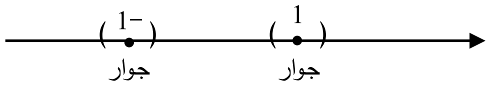
أ) $(\text{ح}_\text{ن})$ حيث $\text{ح}_\text{ن} = 3$ لجمع قيم ن η ط*.

الحل: نعلم أن المتتالية متقاربة من س_0 إذا كان أي جوار لـ س_0 يحتوي على معظم حدود المتتالية. بما أن $\text{ح}_1 = 3$ ، $\text{ح}_2 = 3$ ، $\text{ح}_3 = 4$...

لاحظ أي جوار لـ(3) يحتوي جميع حدود المتتالية.

$\therefore$ $\text{ح}_\text{ن}$ متقاربة ونهايتها الرقم (3).

ب) $(\text{ع}_\text{ن})$ حيث $\text{ع}_\text{ن} = (-1)^\text{ن}$



الحل: $\text{ع}_1 = (-1)^1 = -1$

$\text{ع}_2 = (-1)^2 = 1$ $\text{ع}_3 = (-1)^3 = -1$ $\text{ع}_4 = (-1)^4 = 1$	لاحظ أن جوار لـ(1) يوجد خارجة عدد لا نهائي من الحدود. وكل جوار لـ(−1) يبقى خارجة عدد لا نهائي من الحدود $\therefore$ ع ن ليست متقاربة ولا توجد نهاية

ج( )$\text{أ}_\text{ن}$) حيث $\text{أ}_\text{ن} = \sqrt{\text{ن}}$

الحل: $\text{أ}_1 = \sqrt{1} = 1$

$\text{أ}_2 = \sqrt{2}$

$\text{أ}_3 = \sqrt{3}$

لاحظ $1 < \sqrt{2} ، \sqrt{3} < \sqrt{4}$......

المتتالية تزايديه. $\quad\therefore$ متباعدة وليس لها نهاية $\neq$

نهاية دالة حقيقية

التعريف: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ⟺ ∀ ε > 0 يوجد δ > 0 بحيث أن |س − أ| < δ ⟸

|د (س) − ل| < ε

ملاحظة:

ملاحظة (1):يستخدم التعريف عندما يطلب إثبات النهاية.

ملاحظة(2): للدالة نهاية عند $س_0$ إذا كان أي جوار لـ س. يحتوي معظم حدود المتتالية وخارجه عدد منتهية من الحدود.

ملاحظة (3): نقول للدالة نهاية إذا كانت النهاية من اليمين = النهاية من اليسار.

أنتبه: يمين ($س_0$) أصغر منه ونعبِّر عنه $س_0^{+}$

يسار ($س_0$) أصغر منه ونعبّر عنه $س_0^{-}$

مثال: د (س) = $\begin{cases} 1 - س & س \leq 0 \\ 1 - س^3 & س > 0 \end{cases}$ هل لها نهاية عند $\boxed{س = 0}$ ؟

الحل

يمين	يسار
1 − س	1 − $س^3$

$\lim_{س \to (0^+)}$ د (س) = $\lim_{س \to (0^+)}$ (1 − س) = 1 − 0 = 1 ∴ النهاية اليمنى = اليسرى

$\lim_{س \to (0^-)}$ د (س) = $\lim_{س \to (0^-)}$ (1 − $س^3$) = 1 − 0 = 1 ∴ $\lim_{س \to 0}$ د(س) = 1

ملاحظة(4) عند حساب النهاية تقسم التمارين إلى قسمين:

أولاً: حساب النهاية عند نقطة (نعوض تعويض مباشر)

مثال: $\lim_{س \to 2}$ ($س^2$ − 1) = $(2)^2$ − 1 = 4 − 1 = 3

ثانياً: عند اللانهاية كما قلنا نتعامل مع الحد الأكبر أساً ونهمل الباقي:

مثال: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\,(س^2 - س + 1) = \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\,س^2 = (\infty)^2 = \infty$

ملاحظة(5): قد يرافق عمليه التعويض مشاكل ندعوها: حالات عدم تعين

مثل: $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ 　　 كيف نتغلب عليها؟

بالحقيقة نعتمد على معلوماتنا الرياضية السابقة مثل التحليل.

مثل: $\underset{س\to1}{\text{نها}}\,\frac{س^2 - 1}{س - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعيين.

المعالجة الرياضية: $\underset{س\to1}{\text{نها}}\,\frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)} = \text{نها}\,(س+1) = 1+1 = 2$ #

أو قد تستخدم الضرب بالمرافق في حالة الجذور عملاً بالقاعدة:

$(ب-ج)(ب+ج) = ب^2 - ج^2$ لو كان في أحدهم جذراً لطار.

مثال: $\underset{س\to1}{\text{نها}}\,\frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = عدم تعيين

المعالجة الرياضية: $\text{نها}\,\frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1} = \text{نها}\,\frac{(\sqrt{س})^2 - (1)^2}{(س-1)(\sqrt{س} + 1)}$

$= \text{نها}\,\frac{(س-1)}{(س-1)(\sqrt{س} + 1)} = \text{نها}\,\frac{1}{\sqrt{س} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

تمارين ومسائل(5 – 2)

[1] أوجد ما يلي:

أ) $\underset{س\to1}{\text{نها}}\,(س^2 - 2س + 3) =$

الحل: بالتعويض المباشر

$\underset{س\to1}{\text{نها}}\,(س^2 - 2س + 3) = (1)^2 - 2\,(1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$ #

ب) $\underset{س\to(-1)}{\text{نها}}\,\frac{1}{(2س^2 + س - 1)^2}$

الحل بالتعويض المباشر $= \frac{1}{(2(-1)^2 - 1 - 1)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$

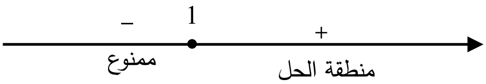
جـ) $\lim\limits_{س \to 2} \frac{س^2 - 5س + 6}{2س^2 + س + 1}$ تعويض مباشر $= \frac{4 - 10 + 6}{2 \times 4 + 2 + 1}$

$= \frac{\text{صفر}}{1} =$ صفر #

د) $\lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س - 1}$

الحل: الدالة معرفة لما $س - 1 \geq 0$

$\Leftarrow س \geq 1$



النهاية من اليمين

$\lim\limits_{س \to 1^+} \sqrt{س - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0$

النهاية من اليسار $\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1^-} \sqrt{س - 1} = \sqrt{\text{سالب}}$ مستحيل

$\therefore$ اليمنى $\neq$ اليسرى ولا توجد نهاية

[2] أوجد نهاية ما يلي:

أ) $\lim\limits_{س \to 4} \frac{\sqrt{س} - 2}{س - 4}$ تعويض مباشر $= \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعيين.

المعالجة بالضرب بالمرافق عملاً بالقاعدة (ب − جـ) (ب + جـ) = ب^2 − جـ^2

$\therefore \lim \frac{(\sqrt{س} - 2)}{(س - 4)} \times \frac{(\sqrt{س} + 2)}{(\sqrt{س} + 2)} = \lim \frac{(س) - 4}{(س - 4)(\sqrt{س} + 2)}$

$= \lim\limits_{س \to 4} \frac{1}{\sqrt{س} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

ب) $\lim\limits_{س \to 3} \frac{\sqrt[3]{2س - 5} - 1}{س - 3}$ تعويض مباشر $= \frac{\sqrt[3]{6 - 5} - 1}{3 - 3} =$ عدم تعيين

المعالجة الرياضية: $\lim\limits_{س \to 3} \frac{(\sqrt[3]{2س - 5} - 1)\left((2س - 5)^{\frac{2}{3}} + (2س - 5)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{(س - 3)}$

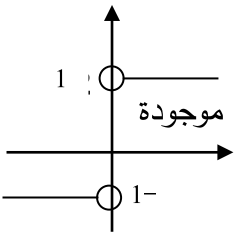
$$= \underset{}{\text{نها}} \frac{(2\text{س}-6)\left((2\text{س}-5)^2+1(2\text{س}-5)+1\right)}{(\text{س}-3)}$$

$$= \text{نها} \frac{2(\text{س}-3)\left((2\text{س}-5)^2+1(2\text{س}-5)+1\right)}{(\text{س}-3)} = 2\left((6-5)^2+(6-5)+1\right)$$

$$= 2(1+1+1) = 2 \times 3 = 6 \ \#$$

[3] أبحث نهاية الدالة $\frac{|\text{س}|}{\text{س}}$ عندما س $\leftarrow 0$ موضحاً حالة وجودها بالرسم

الحل: $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1 & \text{س} > 0 \\ \frac{-\text{س}}{\text{س}} = -1 & \text{س} < 0 \end{cases}$



$\underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = 1$، $\underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = -1$ $\therefore$ $\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة

[4] أثبت أن $\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{1-\text{س}}}{2\text{س}} = \frac{1}{2}$

الحل: تعويض مباشر $= \frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}{2\times 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين.

المعالجة بالضرب بالمرافق $= \underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{1-\text{س}}\right)\left(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}}\right)}{2\text{س} \times \left(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}}\right)}$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نها}} \frac{1+\text{س}-(1-\text{س})}{2\text{س}\left(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}}\right)} = \text{نها} \frac{2\text{س}}{2\text{س}\left(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \#$$

[5] د (س) معرفة على النحو التالي:

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} : \text{س} < 0 \\ 2\text{س}+1 : \text{س} \geq 0 \end{cases}$ أوجد نهاية الدالة عندما س تقترب من الصفر

يسار الصفر	0	يمين الصفر
د (س)= 2س		د (س)= 2س+1

∴ النهاية اليمنى $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} (2\text{س} + 1) = 2 \times 0 + 1 \leftarrow = 1$ (1)

النهاية اليسرى $\lim\limits_{\text{س}\to 0^-}$ د(س) = نها $(2\text{س}) = 2 \times 0 = 0 \leftarrow$ (2)

(1) $\neq$ (2) $\Leftarrow$ اليمنى $\neq$ اليسرى $\Leftarrow$ لا توجد نهاية

[6] أوجد نهاية الدوال التالية:

أ) د (س) = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}$ عندما س $\leftarrow \infty$

الحل: نتعامل مع الكبير ونهمل المقادير الأصغر.

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \sqrt{\text{س}^2} - \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \sqrt{\text{س}^2} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$ = عدم تعيين ∴ نضرب بالمرافق

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}\right)\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}\right)}{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}\right)}$$

$$= \lim \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 1 - \left(\text{س}^2 - \text{س} + 1\right)}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}} = \lim \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1}}$$

$$= \lim \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2} + \sqrt{\text{س}^2}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س}}{|\text{س}| + |\text{س}|} = \lim \frac{2\text{س}}{2\text{س}} = 1$$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 9}$

الحل: نتعامل مع الكبير = $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2} = \lim \dfrac{1}{\text{س}} = \dfrac{1}{\infty}$ = صفر

جـ) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{3 + 2\text{س} - \text{س}^2}{5 + 3\text{س} - 2\text{س}^2}$

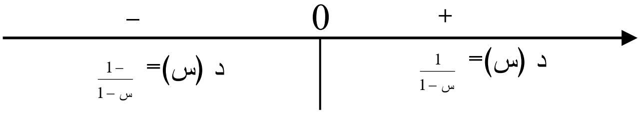
الحل: نتعامل مع الكبير = نها $\dfrac{\text{س}^2}{2\text{س}^2} = \dfrac{1}{2}$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{7}{(4 - \text{س})^2}$

الحل: نها $\dfrac{7}{(4 - \text{س})^2} = \dfrac{7}{(4 - 4)^2} = \dfrac{7}{0+} = +\infty$

[7] أدرس نهاية الدالة د (س) = $\frac{1}{|س - 1|}$ عندما س ← (1)

الحل: م ت = ح − {1}



النهاية اليمنى = $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}$ − $\frac{1}{س - 1}$ = $\frac{1}{0+}$ = + ∞

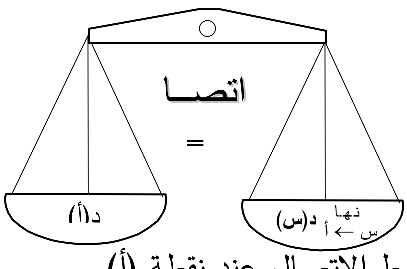
النهاية اليسرى = $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}$ = $\frac{-1}{س - 1}$ = $\frac{-1}{0-}$ = ∞

∴ $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}$ $\frac{1}{|س - 1|}$ = ∞ #

الاتصـــال

أصدق تعبير عن الاتصال الميزان

نضـع القيمـة د (أ) فـي كفـة ونضـع $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$د(س) فـي الكفـة الأخـرى فـإذا حصـل التساوي كانت الدالة في وضع اتصال:



من الشكل نستنتج شروط الاتصال عند نقطة (أ)

1− د (أ) موجودة (معروفة)

2− $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$د(س) موجودة

3− $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ د(س) = د (أ)

<u>ملاحظات:</u>

(1) د متصلة في اليمين عند س = أ إذا كان $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نها}}$د (س) = د (أ)

(2) د متصلة في اليسار عند س=أ إذا كان نها$_{س \leftarrow أ^{-}}$ د (س)= د (أ)

(3) إذا كانت الدالة متصلة من اليمين ومن اليسار قل د متصلة عند س=أ

(4) ابحث الاتصال من اليمين واليسار إذا غيرت الدالة قاعدتها حول تلك النقطة أي بظهور | | أو [ ] أو >< أو فترات من النوع [أ ، ب]

(5) عند بحث الاتصال على فترة مفتوحة]ب ،جـ[نأخذ ممثل عن نقاط الفترة أي $\forall$ أ $\ni$]ب ، جـ [لازم نها$_{س \leftarrow أ}$ د(س) = د (أ).

(6) عند بحث الاتصال على فترة مغلقة [ب ، جـ [تقوم بما يلي:

1) بحث الاتصال على المفتوحة] ب ، جـ[

2) بحث الاتصال على يمين ب وعن يسار جـ

(7) **فائدة**:كثيرات الحدود–الدوال الكسرية–الجذرية–الدورية متصلة على م ت

تماريـــــن (5 -2)

[1] أبحث اتصال الدالة د (س) = |س −1| عند س = 1

الحل:

إشارة س −1	+	1	−
|س−1|	س−1		−(س−1)

* د (1) = |1 − 1| = 0 ← (1)   أنتبه عوض بالأصل.

* نها$_{س \leftarrow أ^{+}}$ د(س)= نها$_{س \leftarrow 1}$ (س−1)=1−1=صفر ← (2) $\Leftarrow$ (1)=(2)متصلة من اليمين

* نها$_{س \leftarrow أ^{-}}$ د(س) = نها − (س −1) = − (1−1) = −0 = 0 ← (3)

(1) = (3) $\Leftarrow$ متصلة من يسار $\boxed{س = 1}$

∴ بشكل عام د متصلة عند س = 1

[2] إذا كانت ر (س) $\begin{cases} = س^2 & س < 1 \\ = س & س \geq 1 \end{cases}$ هل د متصلة عند س = 1

الحل:

$$\underset{س^2}{\xrightarrow[\quad س < 1 \quad]{}} \; 1 \; \underset{س}{\xrightarrow[\quad س \geq 1 \quad]{}}$$

د (1) = 1 ← (1)

$\underset{س \leftarrow 1^+}{نها}$ د (س) = نها (س) = 1 ← (2) ⇐ (1) = (2) متصلة في اليمين

$\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ د(س) = نها (س^2)=(1)^2= 1 ← (3) ⇐ (1)=(3)

∴ متصلة عند س= 1 من اليسار.

∴ بشكل عام متصلة عند س =1

[3] لتكن الدالة د (س) = $\frac{س^2 - س - 12}{س - 4}$ لما س ≠ 4 عِّرف الدالة حتى تكون متصلة عند س =4

الفكرة: أحسب النهاية وأقدمها على طبق من ذهب للقيمة.

التنفيذ $\underset{س \leftarrow 4}{نها}$ $\frac{(س - 4)(س + 3)}{(س - 4)}$ = 4 + 3 =7 ∴ المفروض د (4) = 7

∴ إعادة تعريف الدالة ∴ د(س)= $\begin{cases} \frac{(س - 4)(س + 3)}{(س - 4)} & لما\ س \neq 4 \\ 7 & س = 4 \end{cases}$

[4] حِّدد مجال الدالة هـ (س) = $\sqrt{4 - س^2}$ ثم أدرس اتصال الدالة على هذا المجال.

الحل: معرفة لما 4−س^2 ≥ 0 ⇐ 4 ≥ س^2 ⇐ 2 ≥ |س| ⇐

−2 ≤ س ≤ 2 ∴ م ت = [−2 ، 2]

عند بحث الاتصال:

<u>أولاً:</u> على الفترة المفتوحة]−2 ، 2[كالتالي:

$\forall$ أ $\in$]−2، 2[نحسب هـ (أ) = $\sqrt{4-أ^2}$ ← (1)

نهاهـ (س) = نها $\sqrt{4-س^2}$ = $\sqrt{4-أ^2}$ ← (2) $\therefore$ (1) = (2) متصلة على]−2، 2[
(س←أ)

<u>ثانياً:</u> عند الأطراف (1) عند س = −2 من اليمين

هـ (−2) = $\sqrt{4-(-2)^2}$ = $\sqrt{4-4}$ = 0 ← (1)

نها هـ (س) = نها $\sqrt{4-س^2}$ = $\sqrt{4-4}$ = 0 ← (2) (1) = (2) متصلة من اليمين
(س←(−2)$^+$)

(2) عند س = 2 من اليسار

هـ (2) = 4−4 = 0 ← (1)

نهاهـ (س) = 4−س^2 = 4−4 = 0 ← (2) $\therefore$ (1)=(2) $\Leftarrow$ متصلة عند
(س←2$^-$)

س = 2 من اليسار

$\therefore$ بشكل عام متصلة على م ت = [−2، 2]

[5] ناقش اتصال الدالة على مجالها موضحاً إجابتك بالرسم بكل من الدوال.

أ) ر (س) = { س + 1 لما س < 2
س + 2 لما س $\geq$ 2 }

الحل: المجال = م ت = ح

أولاً: على الفترات المفتوحة ر (س) = س +1 على]−∞ ، 2[

$\therefore$ متصلة لأنها كثيرة الحدود

ر (س) = س + 2 على]2، +∞[$\therefore$ متصلة لأنها كثيرة الحدود

$\therefore$ ر متصلة على الفترات المفتوحة

ثانياً: عند الأطراف: أي عند س= 2

د (2) = 2 + 2 = 4 ← (1)

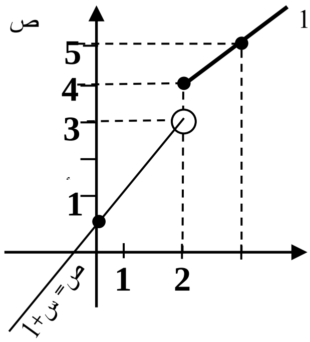
نهاد(س) = نها (س + 2) = 2 + 2= ← 4 (2) (1)=(2)متصلة من اليمين
(س←2$^+$)

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^-}$ د(س) نها(س+1)=1+2=3 ← 3 د(3) لاحظ د(1) ≠ د(3) ∴ غير متصلة من اليسار

التوضيح لما س< 2 ⇐ ص= س+1   لما س ≥ 2 ⇐ ص = س+2

س	2	0
ص	3	1

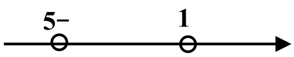
س	2	3
ص	4	5



ب) د(س) = $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}$

الحل: م ت = ح − {أصفار المقام} ∴ أصفار المقام (س+5) (س−1) = 0 ⇐

س = −5   ، س = 1



∴ المجال = ح/ {−5 ، 1}

أولاً: على الفترات المفتوحة: على]−∞ ، −5[،]1،+∞[متصلة لأنها دالة كسرية متصلة على م ت.

عند الأطراف:د(1)= $\dfrac{1 - 3 - 4}{0}$ =−∞ ∴ غير معرفة عند س=1

∴ غير متصلة عند س = 1

د (−5) = $\dfrac{25 + 15 - 4}{0}$ = ∞ ∴ غير معرفة∴غير متصلة عند س= −5

أما التوضيح بالرسم أعتقد غير ممكن.

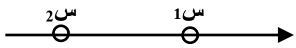
جـ(هـ)س) = $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 5\text{س} - 4}$

الحل: أصفار المقام: $س^2 + 5س - 4 = 0$	$أ = 1$ $ب = 5$ $جـ = -4$

$\Delta = ب^2 - 4\,أجـ = 25 - 4 \times 1 \times -4 = 41 \Leftarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{41}$

$س_1 = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2}$ ، $س_2 = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2}$

$\therefore$ م ت = ح/ {$س_1$، $س_2$}



بحث الاتصال:

أولاً: على الفترات المفتوحة متصلة لأنها كسرية متصلة على م ت

ثانياً: عند الأطراف : د ($س_1$) غير معروفة $\therefore$ غير متصلة عند $س_1$

د($س_2$) غير معروفة $\therefore$ غير متصلة عند $س_2$ أما الرسم (أعتذر)

[6] لتكن د (س) = $\frac{|س^2 - 4س + 3|}{س - 1}$ ناقش اتصال الدالة في ح

كما يلي: أولاً: بحث الاتصال في الفترات الجزئية من المجال.

ثانياً: بحث الاتصال عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة.

الحل: م ت = ح/ {1}

أصفار المقياس (س−3) (س−1) = 0

$\Leftarrow$ س = 3 ، س = 1

+	1 −	3 +
		$\frac{(س-3)(س-1)}{س-1}$
س−3	−(س−3)	= س−3

أولاً: على الفترات المفتوحة على]−∞، 1[$\Leftarrow$ د (س) = س−3 كثيرة حدود $\therefore$ متصلة عليها

على]1 ، 3[$\Leftarrow$ د (س) = −س+3 كثيرة حدود $\therefore$ متصلة عليها.

على]3 ، ∞[$\Leftarrow$ د (س) = س−3 كثيرة حدود $\therefore$ متصلة عليها.

ثانياً: عند نقاط التغير: عند س= $1 \Leftarrow$ د(1) غير معرفة ∴ غير متصلة.

عند س = 3

د(3) = $\frac{|9-12+3|}{3-1}$ = $\frac{\text{صفر}}{2}$ = صفر ← (1) ⎫ (1) = (2) متصلة من

$\underset{س \leftarrow 3^-}{\text{نها}}$ د(س) = نها − (س −3)=−(3−3)= ← 0(2) ⎭ اليسار

$\underset{س \leftarrow 3^+}{\text{نها}}$ د(س) = نها(س−3)=3−3= ← 0(3) ∴ (1)=(3) ⇐ متصلة من اليمين

∴ متصلة عند س=3

[7] إذا كانت د (س) = $\frac{|س^3-1|}{س-1}$ حيث س= $\neq 1$

أعد تعريف الدالة عند س= 1 لتكون متصلة عند هذه النقطة.

الحل: د (1) غير معروفة ∴ أحسب النهاية وأقدمها للقيمة

$\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}$ $\frac{س^3-1}{س-1}$ = نها (س−1) $\frac{(س^2+س+1)}{(س-1)}$ = 1 + 1 + 1 =3

∴ المفروض د (1) = 3

إعادة التعريف د (س) = ⎧ $\frac{س^3-1}{س-1}$ لما س $\neq$ 1
⎩ 3 لما س = 1

[8] إذا كانت د (س) = س^4+ 1 أبحث الاتصال عند س=−1

الحل: د (−1) = (1)^4+1 = 1 + 1 = 2 ← (1)

$\underset{س \leftarrow -1}{\text{نها}}$= نها (س^4 + 1) = (−1)^4+1 = 1+1 = 2 ← (2)

∴ (1) = (2) ⇐ متصلة عند س= (−1)

[9] إذا كانت د (س) = 3−2س، ه(س) = س^2−1 فهل الدالة د (ه(س)) متصلة

عند $\boxed{س = 0}$

الحل: نحسب د (هـ (س)) = د (س^2−1) = 3−2(س^2−1) = 3−2س^2+3

= 5−3س^2

∴ د (هـ (0)) = 3−5 (0)^2 = ←(1)

نها$_{س\leftarrow 0}$ د (هـ (س)) = نها$_{س\leftarrow 0}$ (5−3س^2) = 3−5 (0)^2 = ← 5(2)

∴ (1) = (2) ⇐ د (هـ (س)) متصلة عند $\boxed{\text{س} =}$ $\boxed{0}$