Matematik A STX august 2009
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 5 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 1

Vi bestemmer den rette linje som går igennem P og Q.

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-6)}{-2 - 1} = \frac{9}{-3} = -3$

$b = y_1 - ax_1 = -6 - (-3) \cdot 1 = -6 + 3 = -3$

Den rette linje er:

$l = -3x - 3$. Vi finder skæringspunkterne med hhv. førsteaksen og andenaksen.

$-3 \cdot 0 - 3 = -3$, og $-3x - 3 = 0 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$

Skæringspunkterne er:

$(x = -1; y = 0)$ og $(x = 0; y = -3)$.

Opgave 2

Givet ligningen for kuglen:

$x^2 + 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 23 = 0$

Vi omskriver ligningen.

$(x + 3)^2 - 9 + (y - 7)^2 - 49 + (z + 1)^2 - 1 + 23 = 0$

Vi får:

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = -23 + 1 + 49 + 9$

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36$

Så koordinatsættet til centrum er:

$C = (-3, 7, -1)$ og radius er $r = 6$.

Opgave 3

Vi kalder $a = 3$ og regner hypotenusen.

$a^2 + b^2 = c^2$, formlen er $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$, så

$3^2 + (3 + 1)^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Vi får nu angivet $c = \sqrt{13}$, så vi har:

$\left(\sqrt{13}\right)^2 = a^2 + (a + 1)^2 \Leftrightarrow 13 = a^2 + a^2 + 1 + 2a \Leftrightarrow 13 = 2a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2a - 12 = 0$

så vi løser en andengradsligning.

$2a^2 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0$. Hvilke to tal, lagt sammen giver 1 og ganget sammen -6? Det

gør 3 og -2, så løsningerne er:
$a=2 \vee a=-3$ men da vi ikke arbejder med negative værdier, så er $a=2$ løsningen.

Opgave 4

Givet to funktioner
$f(x)=-4x^2+20x$
$g(x)=8x$

Først bestemmes skæringspunkterne mellem $f(x)$ og $g(x)$.
$-4x^2+20x=8x \Leftrightarrow -4x^2-12x=0 \Leftrightarrow -4x^2-12x=0 \Leftrightarrow 4x\cdot(x-3)=0$ så løsningerne er:
$x=0 \vee x=3$. Vi bestemmer M.

$$M=\int_0^3 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 -4x^2+20x-8x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{4}{3}x^3+10x^2-4x^2\right]_0^3-\left[-\frac{4}{3}x^3+6x^2\right]_0^3=$$
$$-\frac{4}{3}\cdot 3^3+6\cdot 3^2-\left(-\frac{4}{3}\cdot 0^3+6\cdot 0^2\right)=18-0=18$$

Dermed er arealet M bestemt.

Opgave 5

Betragt differentialligningen
$$\frac{dy}{dx}=4y+8x^2$$
Og funktionen
$$f(x)=\mathrm{e}^{4x}-2x^2-x-\frac{1}{4}$$

Vi differentierer funktionen $f(x)$ og sætter den ind på $\frac{dy}{dx}$ eftersom $\frac{dy}{dx}=f'(x)$. og efter sætter vi $f(x)$ ind på y eftersom $y=f(x)$.
$f'(x)=4\cdot\mathrm{e}^{4x}-4x-1$, så:
$$4\cdot\mathrm{e}^{4x}-4x-1=4\cdot\left(\mathrm{e}^{4x}-2x^2-x-\frac{1}{4}\right)+8x^2$$
$$4\cdot\mathrm{e}^{4x}-4x-1=4\cdot\mathrm{e}^{4x}-8x^2-4x-1+8x^2$$
$$4\cdot\mathrm{e}^{4x}-4x-1=4\cdot\mathrm{e}^{4x}-4x-1$$
Dermed kan vi se, at de er identiske og $f(x)$ løser differentialligningen.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB}=\overrightarrow{AB}$

Opgave 6

restart :; *with*(*Gym*) :
Betragt vektorerne
$\boldsymbol{a} := \langle 1, 2\rangle$:; $\boldsymbol{b} := \langle -3, 2\rangle$:

Spgm. a

Vi bestemmer vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

$$v = invCos\left(\frac{1\cdot(-3)+2\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2}}\right)$$

$$v = 82.87498363 \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

Vi kunne også bruge kommandoen vinkel.

$v = vinkel(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$$v = 82.87498363 \qquad \textbf{(6.1.2)}$$

Spgm. b

Vi bestemmer arealet af parallelogrammet, udspændt af vektor $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$

$|det(a, b)|$

$$8 \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

Vi kan også regne det:

$$|det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| = \left|det\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)\right| = |1\cdot 2 - 2\cdot(-3)| = |2-6| = 8$$

Spgm. c

Vi bestemmer projektionen af vektor $\boldsymbol{b}$ på $\boldsymbol{a}$, vi kalder $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}} = P$, så vi har:

$P = proj(b, a)$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.3.1)}$$

Vi kan også regne det:

$$P = \frac{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1\cdot(-3)+2\cdot 2}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Som er projektionen af $\boldsymbol{b}$ på $\boldsymbol{a}$

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

local D :

Spgm. a

Vi definerer oplysningerne.

$a := 7$:; $b := 12$:; $c := 17$:

$$\angle C := invCos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\right)$$

$$124.8499046 \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

Så vinkel C er 124.85^o.

Spgm. b

Vi benytter os af sinusrelationerne. Vi definerer vinkel D.

$\angle D := 45$:

Vi bestemmer $|AD|$.

$$\frac{Sin(\angle D)}{12} = \frac{Sin(\angle C)}{AD}$$

$$0.05892556508 = \frac{0.8206518065}{AD} \quad \textbf{(7.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for AD}}$

$$[[AD = 13.92692298]] \quad \textbf{(7.2.2)}$$

Så længden $|AD| = 13.927$ er hermed bestemt.

Opgave 8

$restart$:; $with(Gym)$:

Vi definerer tabellens oplysninger nedenfor:

$A1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$:

$A2 := [511, 697, 954, 1305, 1525, 1921, 2490, 3284, 4452, 5804, 7180]$:

Spgm. a

Vi bestemmer tallene N_0 og a via eksponentiel regression.

$N(t) := ExpReg(A1, A2, t)$:

$N(t)$

$$541.955918846654\ 1.29750600308200^t \quad \textbf{(8.1.1)}$$

Hermed er tallene N_0 og a bestemt, disse tal kan ses i ovenstående eksponentielle forskrift.

Spgm. b

Tallet a er fremskrivningsfaktoren, og vi ønsker den i procent, så vi har:

$a = 1 + r$, vi indsætter a.

$1.29750600308200 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.29750600308200 \cdot 100\ \% = 29.75\ \%$

Så tallet fortæller, at for hvert år der går (fra år 1997) stiger antallet af ADHD behandlinger med 29.75 %.

År 2010 svarer til $t = 13$ så

$N(13)$

$$16009.7979022449 \quad \textbf{(8.2.1)}$$

I år 2010 vil der være 16009 ADHD behandlinger ifølge modellen.

Opgave 9

$restart$:; $with(Gym)$:

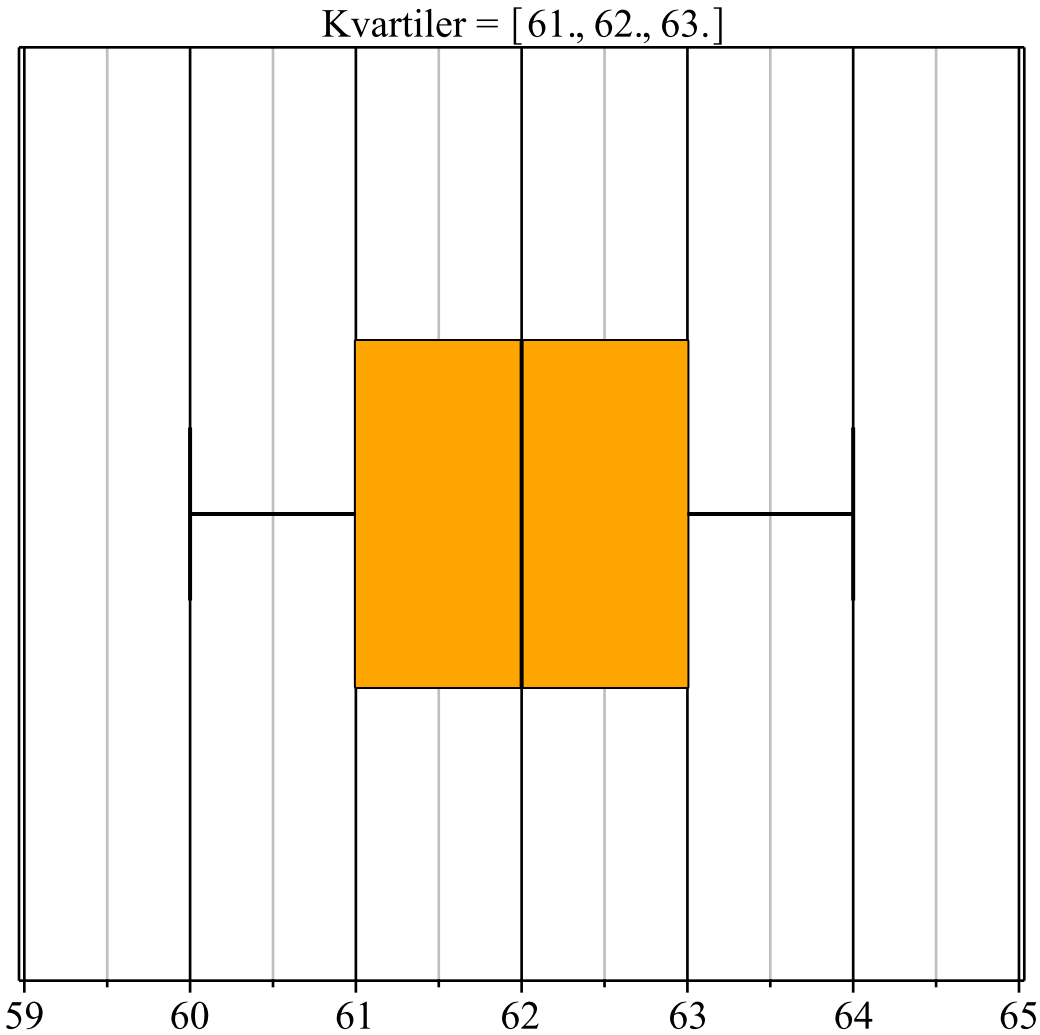
Givet tabellen om de ugrupperede observationer om aldersfordelingen i en operaforening.

$obs := \langle\langle 60, 61, 62, 63, 64 | 2, 8, 4, 10, 3 \rangle\rangle$:

Spgm. a

Vi bruger kommandoen "boksplot" i Maple, så tegner den boksplottet for os.

$boksplot(obs)$



Vi bestemmer middeltallet.
$\overline{x} = middel(obs)$

$$\overline{x} = 62.1481481481482 \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Vi kan også regne på det. Det overlades til læseren at prøve at lave et boksplot ud fra oplysningerne. Vi regner middeltallet.

$$\overline{x} = \frac{60 \cdot 2 + 61 \cdot 8 + 62 \cdot 4 + 63 \cdot 10 + 64 \cdot 3}{27}$$

$$\overline{x} = \frac{1678}{27} \quad \textbf{(9.1.2)}$$

$evalf[16](\textbf{(9.1.2)})$

$$\overline{x} = 62.14814814814815 \quad \textbf{(9.1.3)}$$

Opgave 10

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Givet differentialligningen
$N'(t) = 0.000004 \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$

$$\mathrm{D}(N)(t) = 0.000004\, N(t)\,(K - N(t)) \quad \textbf{(10.1.1)}$$

Vi bestemmer K.

$2000 = 0.000004 \cdot 10000 \cdot (K - 10000)$

$$2000 = 0.040000\, K - 400.000000 \quad \textbf{(10.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for K}}$

$$[[K = 60000.]] \quad \textbf{(10.1.3)}$$

Spgm. b

Vi bestemmer væksthastigheden.

$N'(t) = 0.000004 \cdot 35000 \cdot (60000 - 35000)$

$$\mathrm{D}(N)(t) = 3500.000000 \quad \textbf{(10.2.1)}$$

Så antallet af individer vokser hvert år med 3500, når de samlede antal individer er 35000

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Funktionens b værdi bestemmes.

$solve\left(3 = b \cdot 1650^{0.25}, b\right)$

$$0.4707065793 \quad \textbf{(11.1.1)}$$

Funktionen defineres.

$f(x) := 0.4707065793 \cdot x^{0.25}$

$$x \rightarrow 0.4707065793\, x^{0.25} \quad \textbf{(11.1.2)}$$

Vi løser ligningen

$f(x) = 6$

$$0.4707065793\, x^{0.25} = 6 \quad \textbf{(11.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 26399.99999]] \quad \textbf{(11.1.4)}$$

For 6 fuglearter vil overfladearealet være 26400 m^2.

Spgm. b

For S_1 har vi:

$f(x_1) := b \cdot x_1^{0.25}$:

For S_2 har vi:

$f(x_2) := b \cdot (10 \cdot x_1)^{0.25}$:

$f(x_2) = k \cdot f(x_1)$

$$1.778279410\, b\, x_1^{0.25} = k\, b\, x_1^{0.25} \quad \textbf{(11.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 1.778279410]] \quad \textbf{(11.2.2)}$$

Tallet k som vi fik regnet er fremskrivningsfaktoren, så denne omregnes til procent.

$1.778279410 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.778279410 \cdot 100\ \% = 77.8279\ \%$, så

S_2 har 77.8279 % flere fuglearter end S_1.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :
Vi definerer funktionen
$f(x) := \exp(-x^2 + 2x + 1)$:

Spgm. a

Hvis funktionen f skal have et maksimum, så skal den afledede skærer førsteaksen min. en gang, og den dobbelte afledede skal spytte et negativt tal ud. Vi løser ligningen:
$f'(x) = 0$

$$(-2x + 2)\, e^{-x^2 + 2x + 1} = 0 \quad \textbf{(12.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1]] \quad \textbf{(12.1.2)}$$

Vi har, at funktionen $f(x)$ skærer x-aksen en gang, og vi benytter nu den dobbelte afledede for at afgøre, om dette er et lokalt maksimum eller minimum. Vi indsætter $x = 1$ i den dobbelte afledede:
$f''(1)$

$$-2\, e^2 \quad \textbf{(12.1.3)}$$

Da outputtet er negativt, dvs. $-2\, e^2 < 0$, så har vi et lokalt maksimum. Vi indsætter nu $x = 1$ i funktionen og ser, hvilken y-værdi vi får:
$f(1)$

$$e^2 \quad \textbf{(12.1.4)}$$

evalf[5](**(12.1.4)**)

$$7.3891 \quad \textbf{(12.1.5)}$$

Dermed har vi altså et maksimum.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :
local D :

Spgm. a

Vi bestemmer parameterfremstillingen, som gennemløber S og T
$T := [0, 0, 22]$:
Vi bruger nu retningsvektoren $\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{r} := \langle -5, 5, -19 \rangle$:
Så parameterfremstillingen er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \langle T \rangle + t \cdot r$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\,t \\ 5\,t \\ 22 - 19\,t \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.1)}$$

Dermed har vi opstillet en parameterfremstilling, som gennemløber S og T. Vi bestemmer planen for $ABCD$. Punkterne defineres.
$A := [10, -10, 0]$:; $B := [10, 10, 0]$:; $C := [-10, 10, 4]$:; $D := [-10, -10, 4]$:
Vi opstiller to vektorer.
$\boldsymbol{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.1.2}$$

$\boldsymbol{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{13.1.3}$$

Vi skal nu lave krydsprodukt. Man kan vælge $\vec{a} \times \vec{b}$ eller kommandoen $linalg[crossprod](\vec{a}, \vec{b})$. Vi bruger sidstnævnte.
$linalg[crossprod](\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})$

$$\begin{bmatrix} 80 & 0 & 400 \end{bmatrix} \tag{13.1.4}$$

Dermed har vi nu en normalvektor til planen og vi bestemmer ligningen. Vi indsætter A som fast punkt. Vi har:
$80 \cdot (x - 10) + 0 \cdot (y - (-10)) + 400 \cdot (z - 0) = 0$

$$80\,x - 800 + 400\,z = 0 \tag{13.1.5}$$

Dermed har vi fået ligningen for planen, som gennemløber $ABCD$.

Spgm. b

Vi bestemmer koordinatsættet til punktet S. Vi ved, at S ligger på planen, så vi indsætter parameterfremstillingen i planens ligning, så vi får en ubekendt.
$80 \cdot (-5\,t) - 800 + 400 \cdot (22 - 19\,t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 1]]$
For $t = 1$ indsætter vi tallet i parameterfremstillingen og får koordinatsættet til S.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \langle T \rangle + 1 \cdot r$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{13.2.1}$$

Vi definerer punktet S.
$S := [-5, 5, 3]$:

Vi ønsker at bestemme længden af wiren TS og dette kan gøres ved at danne en vektor, for efter at bestemme længden af den.
$\boldsymbol{TS} = \langle S - T \rangle$

$$\boldsymbol{TS} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -19 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.2.2)}$$

Vi bestemmer længden af vektoren:

$|TS| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-19)^2}$

$$|TS| = \sqrt{411} \quad \textbf{(13.2.3)}$$

$evalf[5]$(**(13.2.3)**)

$$|TS| = 20.273 \quad \textbf{(13.2.4)}$$

Længden af wiren TS er 20.273 (der er ikke angivet nogen enheder, det ville nok være logisk at kalde den for m).

Opgave 14

$restart$:; $with(Gym)$:

Spgm. a

Funktionen defineres.

$f(x) := -x^3 + 3x$:

Vi integrerer funktionen pr. håndkraft:

$\int f(x)\,dx = \int -x^3 + 3x\,dx = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + k$

Vi har stamfunktionen, og linjen t er $y = -2x + 8$, så sætter vi førstekoordinaten fra tangentligningen lig med $f(x)$ og løser ligningen:

$f(x) = -2$

$$-x^3 + 3x = -2 \quad \textbf{(14.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 2], [x = -1], [x = -1]] \quad \textbf{(14.1.2)}$$

Da har vi to rødder. Vi ved, at røringspunktet skal have negativt fortegn, og dette sker i $x = -1$, så vi indsætter $x = -1$ i linjen t.

$y = -2 \cdot (-1) + 8$

$$y = 10 \quad \textbf{(14.1.3)}$$

Så koordinatsættet til det punkt, som $F(x)$ gennemløber er $P = (-1; 10)$. Vi indsætter punktet og løser ligningen for k.

$10 = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + k \xrightarrow{\text{solve for k}} \left[\left[k = \frac{35}{4}\right]\right]$

Så forskriften for $F(x)$ er:

$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{4}$

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{4} \quad \textbf{(14.1.4)}$$

Opgave 15

$restart$:; $with(Gym)$: vi definerer funktionen

$f(x) := 80\,x - 10\,x^2$:

Spgm. a

Vi bestemmer volumen V.

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^4 f(x)^2 \, \mathrm{d}x$

$$V = \frac{163840}{3}\,\pi \tag{15.1.1}$$

Vi bestemmer nu V_k, når vi har $\frac{V}{2}$, dvs.

$\frac{163840}{3}\,\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{Pi} \cdot \int_4^k f(x)^2 \, \mathrm{d}x$

$$\frac{81920}{3}\,\pi = \pi\left(20\,k^5 - \frac{163840}{3} - 400\,k^4 + \frac{6400}{3}\,k^3\right) \tag{15.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$5.124510689 \tag{15.1.3}$$

Dermed har vi fundet den ønskede værdi af k.

Opgave 16

restart :; *with*(*Gym*) :

Givet differentialligningen

$M'(t) = p - 0.03\,M(t)$

Spgm. a

Vi ved, at $M(0) = 0$, så vi løser differentialligningen.

dsolve($\{M'(t) = p - 0.03\,M(t), M(0) = 0\}, M(t)$)

$$M(t) = \frac{100}{3}\,p - \frac{100}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{100}\,t}\,p \tag{16.1.1}$$

Vi bestemmer nu tallet p. Vi ved, at $M(3) = 100$, så

$100 = \frac{100}{3}\,p - \frac{100}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{100}\cdot 3}\,p$

$$100 = \frac{100}{3}\,p - \frac{100}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{100}}\,p \tag{16.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for p}}$

$$\left[\left[p = -\frac{3}{\mathrm{e}^{-\frac{9}{100}} - 1}\right]\right] \tag{16.1.3}$$

evalf[5](%)

$$[[p = 34.854]] \tag{16.1.4}$$

Så tallet p er 34.854 μg , dvs det er den mængde der skal tilsættes for hver time for at kurere sygdommen.

Opgave 17

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi kan bruge formlen for arealet af et rektangel og arealet for to retvinklede trekanter. Antag, at højden er h og l er længden, eller afstanden fra det brune område til A, tilsvarende fra det brune område til D. Vi har

$A_{rektangel} = l \cdot b$ og $A_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, vi omskriver formlerne til vores brug:

$$A = h \cdot (4 + 2 \cdot l) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot l\right) = h \cdot (4 + 2 \cdot l) - h \cdot l = 4 \cdot h + 2 \cdot h \cdot l - h \cdot l = 4 \cdot h + h \cdot l$$

Vi har nu h og l tilbage. Vi bestemmer l ved at se på en af de to retvinklede trekanter. Lige meget hvilken eftersom resultatet indsættes i arealformlen, hvor vi har for begge trekanter.

$\cos(v) = \frac{hosliggende}{hypotenuse}$ og $\sin(v) = \frac{modstående}{hypotenuse}$, så

$$\cos(v) = \frac{l}{2} \xrightarrow{\text{isolate for l}} l = 2\cos(v)$$

$$\sin(v) = \frac{h}{2} \xrightarrow{\text{isolate for h}} h = 2\sin(v)$$

Vi indsætter nu vores to gerningsmænd i arealformlen, som vi bestemte:

$A = 4 \cdot h + h \cdot l = 4 \cdot 2\sin(v) + 2\sin(v) \cdot 2\cos(v) = 8 \cdot \sin(v) + 4 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$

Som ønsket. Vi definerer funktionen som i bogen.

$T(v) := 8 \cdot \sin(v) + 4 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$

$$v \rightarrow 8\sin(v) + 4\sin(v)\cos(v) \quad \textbf{(17.1.1)}$$

Vi betemmer nu $T'(v) = 0$

$T'(v) = 0$

$$8\cos(v) + 4\cos(v)^2 - 4\sin(v)^2 = 0 \quad \textbf{(17.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for v}}$

$$\left[\left[v = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\right], \left[v = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]\right] \quad \textbf{(17.1.3)}$$

evalf[5]((**17.1.3**))

$$[[v = 1.1960], [v = 3.1416 - 0.83142\,I]] \quad \textbf{(17.1.4)}$$

På matematik A arbejder man ikke med komplekse tal, så vi bruger at $v = 1.1960$, så vi undersøger, om dette giver den maksimale værdi, så vi indsætter i $T''(v)$.

$T''(1.1960)$

$$-12.89538284 \quad \textbf{(17.1.5)}$$

Da outputtet er negativt, er $v = 1.1960$ den søgte løsning.

Matematik A STX december 2009
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 5 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 1

Betragt vektoren

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ og punktet $P = (3; 8)$, vi ønsker at bestemme den rette linje, som går gennem P og er parallelt med $\boldsymbol{a}$. Vi bestemmer den tværvektor til $\boldsymbol{a}$, som der vil løbe parallelt med den kommende linje.

$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ vi bruger nu linjens ligning

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, så vi har:

$-5 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y - 8) = 0 \Leftrightarrow -5x + 15 + y - 8 = 0 \Leftrightarrow -5x + y = -15 + 8 \Leftrightarrow y = 5x - 7$

Opgave 2

Givet funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x$, vi har endvidere fået differentialligningen

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + y$, vi skal undersøge, om $f(x)$ løser differentialligningen.

$f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$, så vi har:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ og $y = f(x)$, dvs.

$2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \frac{2 \cdot x^2 \cdot e^x}{x} + x^2 \cdot e^x$

$2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

Da begge udsagn er sande, er $f(x)$ løsningen til differentialligningen.

Opgave 3

Givet funktionen $f(x) = 4x^3 - 8x$, samt punktet $P = (1; 5)$, så vi bestemmer stamfunktionen.

$F(x) = x^4 - 4x^2 + k$, og indsætter P

$5 = 1^4 - 4 \cdot 1^2 + k \Leftrightarrow 5 = 1 - 4 + k \Leftrightarrow 5 = -3 + k \Leftrightarrow k = 8$, så forskriften er:

$F(x) = x^4 - 4x^2 + 8$.

Opgave 4

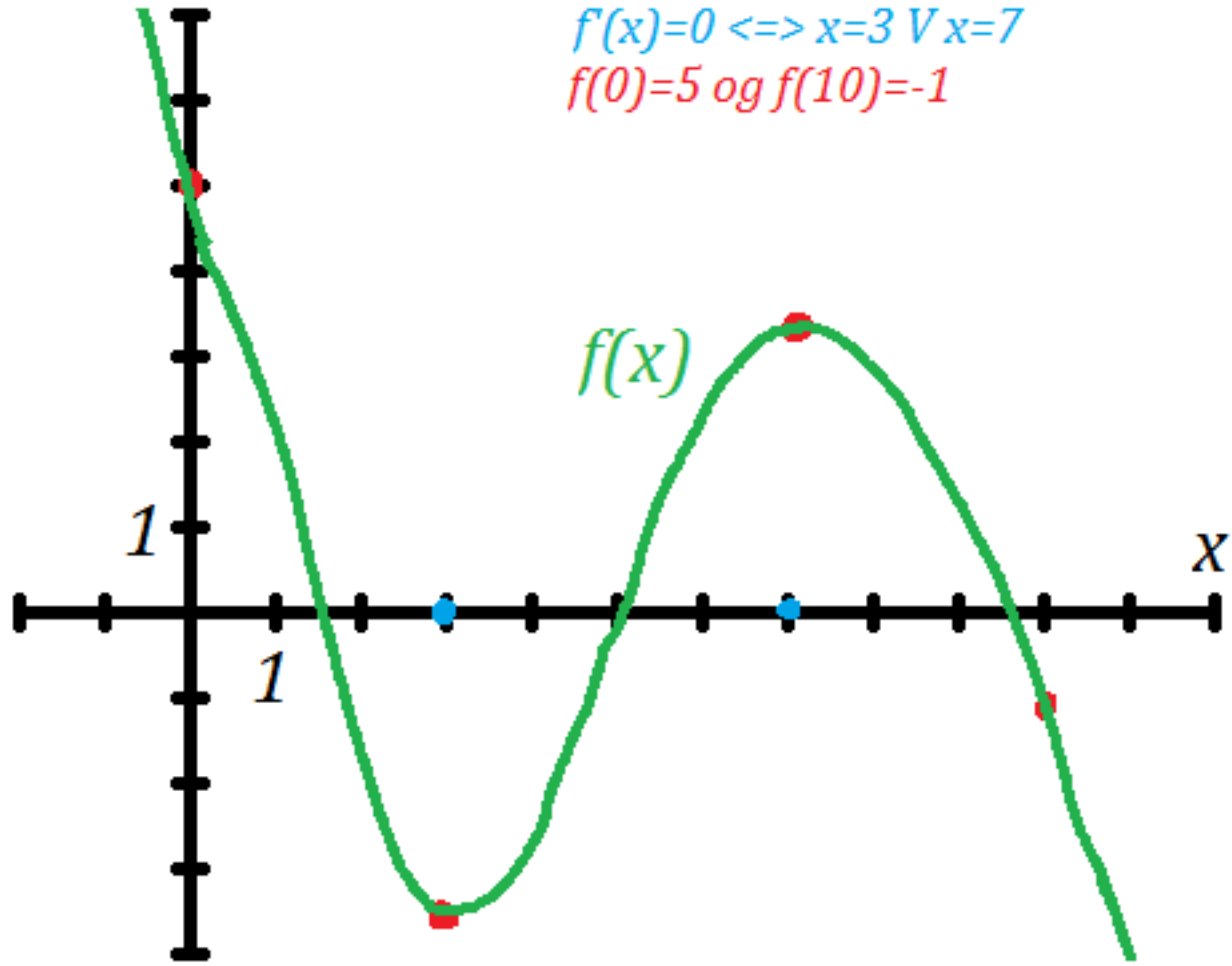
Givet forskriften

$m(t) = -3t + 85$, her er $m(t)$ vandmængden, målt i ltr. og t er tiden, målt i minutter.

For hvert minut der går, aftager vandbeholderen med 3ltr vand. I starten inden beholderen blev åbnet, var der 85ltr vand.

Opgave 5

Vi har følgende betingelser:
$f(0)=5, f(10)=-1$
$f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; 3]$ og $[7; \infty[$ samt voksende i intervallet $[3; 7]$.
$f(x)$ har minimum i $x=3$ og maksimum i $x=7$. Vi har tegnet en mulig graf:



De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 6

restart :; *with*(*Gym*) :
Vi definerer hele pivtøjet
obs := ⟨⟨20 ..30, 30 ..40, 40 ..50, 50 ..60, 60 ..70|1, 19, 5, 33, 14⟩⟩ :

Spgm. a

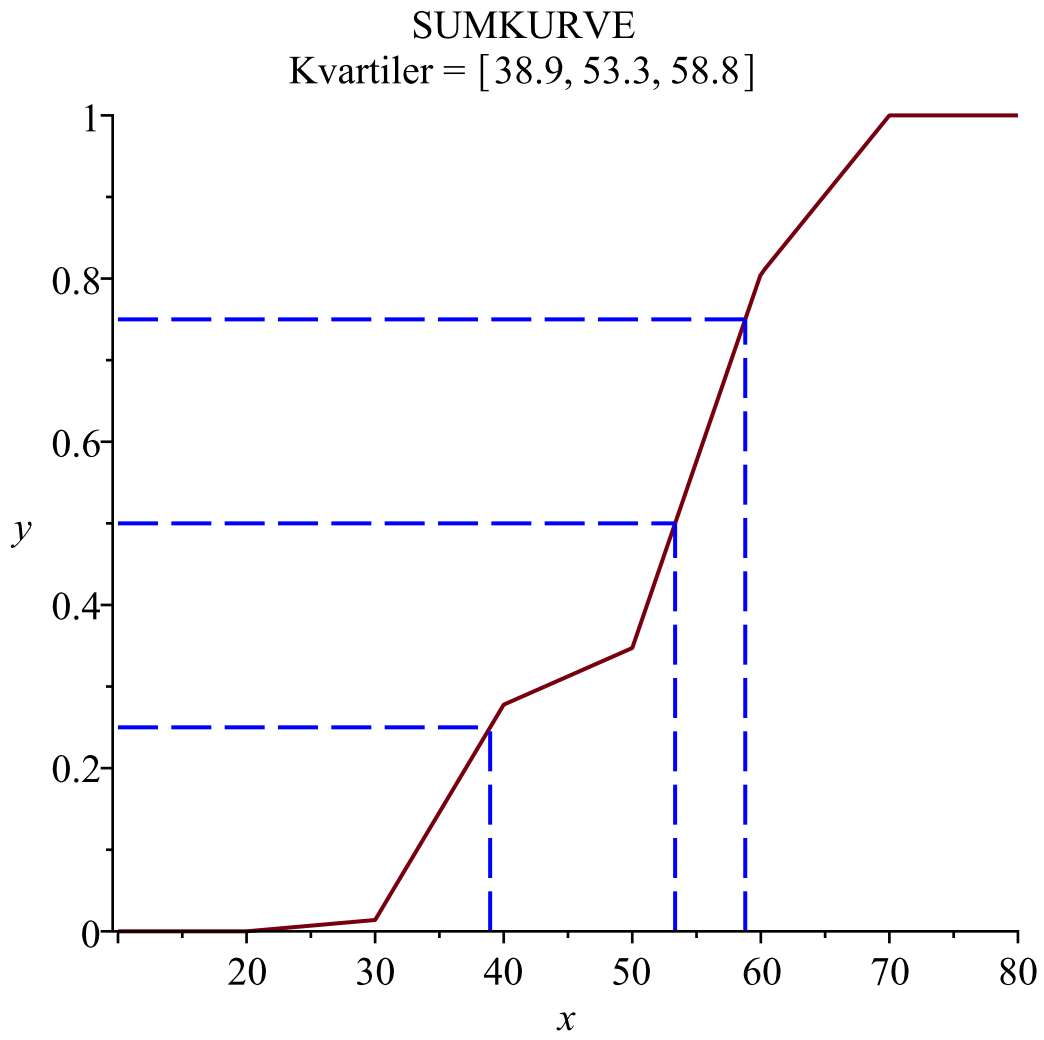
Vi opstiller en tabel over oplysningerne.
frekvensTabel(*obs*)

observation	hyppighed	frekvens	kumuleret

```
20 .. 30          1        1.389        1.39
30 .. 40         19        26.39        27.8
40 .. 50          5        6.944        34.7
50 .. 60         33        45.83        80.6
60 .. 70         14        19.44         100
```

Det overlades til læseren at tegne sumkurven og bestemme kvartilsættet pr. håndkraft. Imens tegner vi sumkurven i Maple.

plotSumkurve(*obs*)



Udover sumkurven fik vi også bestemt kvartilsættet, som er *nedre* = 38.9, *median* = 53.3 og *øvre* = 58.8

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet to vektorer:

$\boldsymbol{a} := \langle 6, 2 \rangle$:; $\boldsymbol{b} := \langle 3, 4 \rangle$:

Vi bestemmer projektionen af vektor $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{b}$. Vi betegner $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}} = P$, så

$$P = \frac{6\cdot 3 + 2\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}^2}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{26}{25}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{78}{25}\\ \frac{104}{25}\end{bmatrix}$$

Alternativt kunne man skrive
$P = proj(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$$P = \begin{bmatrix}\frac{78}{25}\\ \frac{104}{25}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(24.1.1)}$$

Hermed fandt vi koordinatsættet til projektionen.

Spgm. b

Vi bestemmer arealet af det parallelogram, som vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspænder.

$$A = det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = det\left(\begin{bmatrix}6 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right) = 6\cdot 4 - 2\cdot 3 = 24 - 6 = 18$$

Så arealet af parallelogrammet A er bestemt til at være 30. Vi kunne også bruge kommandoen:
$A = det(a, b)$

$$A = 18 \qquad \textbf{(24.2.1)}$$

Opgave 8

$restart :; with(Gym) :$
Tabellens oplysninger defineres.
$L1 := [0, 1, 2] :; L2 := [50808, 78924, 128964] :$

Spgm. a

Vi benytter os af eksponentiel regression.
$P(t) := ExpReg(L1, L2, t) :$
$P(t)$

$$50381.1831928991\ 1.59319229319189^t \qquad \textbf{(25.1.1)}$$

Hermed blev tallene $P_0 = 50381.1831928991$ og $a = 1.59319229319189$ bestemt.

Spgm. b

$restart :; with(Gym) :$
Vi har fået begyndelsesværdien $P_0 = 31692$ og vi har fået renten $r = 49\ \%$, så vi bestemmer a.

$$a = 1 + \frac{49}{100} = 1.49$$

Så forskriften er:
$P(t) = 31692\cdot 1.49^t$

$$P(t) = 31692\ 1.49^t \qquad \textbf{(25.2.1)}$$

Hvor $P(t)$ er den årlige IP-trafik og t er tiden, målt i år efter 2006. Her er tallet a fremskrivningsfaktoren, så for hvert år der går, stiger mængden af IP-trafikken med 49 %.
Vi bestemmer fordoblingstiden.

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.49)}$

$$T_2 = 2.507672726 \ln(2) \quad \textbf{(25.2.2)}$$

evalf[5]((**25.2.2**))

$$T_2 = 1.7382 \quad \textbf{(25.2.3)}$$

Så fordobles mængden af IP-trafikken, hver gang der er gået 1.7382år.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Givet funktionen

$w(t) := 20 \cdot (1 - 0.89 \cdot \exp(-0.17 \cdot t))^3$:

Spgm. a

Vi bestemmer vægten, når den er tre år, dvs. $t = 3$, så

$w(3)$

$$2.018152562 \quad \textbf{(26.1.1)}$$

Fisken vejer ca. 2kg, når den er tre år.

Spgm. b

Vi løser ligningen

$w(t) = 13$

$$20\left(1 - 0.89\, e^{-0.17\, t}\right)^3 = 13 \quad \textbf{(26.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = -3.514549850 - 2.836713798\, I], [t = 11.14804485], [t = -3.514549850 + 2.836713798\, I]] \quad \textbf{(26.2.2)}$$

De komplekse talværdier forkastes, så fiskens alder er ca. 11.14 år, når den vejer 13kg.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Længden af BC kan bestemmes ved at kende vinkel C og vinkel A samt længden AB. Så vinkel C bestemmes.

$\angle C = 180 - \angle A - \angle B = 180 - 58 - 80 = 42$

Vi bestemmer nu længden BC via sinusrelationerne.

$\frac{Sin(A)}{BC} = \frac{Sin(C)}{AB}$, så vi indsætter tallene og løser ligningen for BC.

$\frac{Sin(58)}{BC} = \frac{Sin(42)}{10}$

$$\frac{0.8480480961}{BC} = 0.06691306063 \quad \textbf{(27.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for BC}}$

$$[[BC = 12.67387993]] \quad \textbf{(27.1.2)}$$

Dermed fandt vi den ønskede længde BC til at være 12.674 m.

Spgm. b

Længden af BD bestemmes via cosinusrelationerne.

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot Cos(A)}$, så vi har:

$BD = \sqrt{3^2 + 10^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot Cos(58)}$

$$BD = 8.786628713 \quad \textbf{(27.2.1)}$$

Så længden af stålstangen BD er ca. 8.787 m.

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

$A := [2, 0, 0] :; C := [0, 0, 4] :; B := [0, 6, 0] :$

Spgm. a

Vi bestemmer ligningen for planen α, men først opstilles to vektorer, sådan så vi kan bestemme en normalvektor via et krydsprodukt og derfra opstille ligningen til planen.

$\boldsymbol{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(28.1.1)}$$

$\boldsymbol{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(28.1.2)}$$

Dernæst tager vi krydsproduktet af de to vektorer.

$linalg[crossprod](\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})$

$$\begin{bmatrix} 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad \textbf{(28.1.3)}$$

Eller

$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \textbf{(28.1.4)}$$

Så har man en normalvektor for planen α. Vi vælger punktet A som et fast punkt og har ligningen (hvor vi indsætter tallene):

$24 \cdot (x - 2) + 8 \cdot (y - 0) + 12 \cdot (z - 0) = 0$

$$24\,x - 48 + 8\,y + 12\,z = 0 \quad \textbf{(28.1.5)}$$

Dermed er ligningen for planen givet.

Spgm. b

Vi har fået parameterfremstillingen, som vi viser nedenfor:

$$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Vinklen mellem planen og linjen l kan bestemmes via normalvektoren og retningsvektoren. Vi har:

$$\boldsymbol{n_\alpha} := \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} :; \boldsymbol{r_l} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} :$$

Så

$$w := invCos\left(\frac{\boldsymbol{n_\alpha} \cdot \boldsymbol{r_l}}{len(\boldsymbol{n_\alpha}) \cdot len(\boldsymbol{r_l})} \right)$$

$$54.32323484 \quad \textbf{(28.2.1)}$$

Og eftersom dette ikke er den søgte vinkel, så trækkes tallet fra 90 og vi får:
$v = 90 - w$

$$v = 35.67676516 \quad \textbf{(28.2.2)}$$

Dvs. vinklen mellem ligningen og planen er $v = 35.67676516^o$.

Spgm. c

Vi ved, at kuglens ligning er:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r$ og vi har centrum, så vi indsætter
$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = r$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r \quad \textbf{(28.3.1)}$$

Så vi mangler radius. Vi kan nu bruge distformlen, så afstanden fra planen til kuglen bestemmes. Denne afstand vil være radius.

$dist(C, \alpha) = \dfrac{|ax + by + cx + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, så vi har:

$$r = \frac{|24 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 - 48|}{\sqrt{24^2 + 8^2 + 12^2}}$$

$$r = \frac{12}{7} \quad \textbf{(28.3.2)}$$

Så ligningen for kuglen med planen α som tangent er:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{144}{49} \quad \textbf{(28.3.3)}$$

Opgave 12

$restart :; with(Gym)$: Givet funktionen
$f(x) := x^2 \cdot \ln(x) - 3x - 1$:
Her er $x > 0$. (Overvej hvorfor).

Spgm. a

Vi har fået givet et punkt og vi ønsker at bestemme en ligning for tangenten til grafen for $f(x)$. Vi har:

$f(1)$

$$-4 \tag{29.1.1}$$

$f'(1)$

$$-2 \tag{29.1.2}$$

Så tangenten er:

$y = -2 \cdot (x-1) + (-4)$

$$y = -2x - 2 \tag{29.1.3}$$

Dermed er tangenten bestemt. Ellers kunne man også bare skrive det sådan:

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$$y = -2x - 2 \tag{29.1.4}$$

Spgm. b

Vi bestemmer monotoniforholde for $f(x)$. Vi løser ligningen $f'(x) = 0$ nedenfor:

$f'(x) = 0$

$$2x\ln(x) + x - 3 = 0 \tag{29.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = e^{\mathrm{LambertW}\left(\frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}}\right]\right] \tag{29.2.2}$$

$evalf[5]$(**(29.2.2)**)

$$[[x = 1.5735]] \tag{29.2.3}$$

Hermed har vi en rod vi kan arbejde med. Vi bestemmer den dobbelte afledede og indsætter roden fra $f'(x) = 0$.

$f''(1.5735)$

$$3.906604875 \tag{29.2.4}$$

Da outputtet er positivt, så har vi et minimum. Altså er konklusionen:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $]0; 1.5735]$ og voksende i intervallet $[1.5735; \infty[$.

Man kan også bruge den alm. metode til at argumentere for grafens forløb, så dette overlades til læseren.

Opgave 13

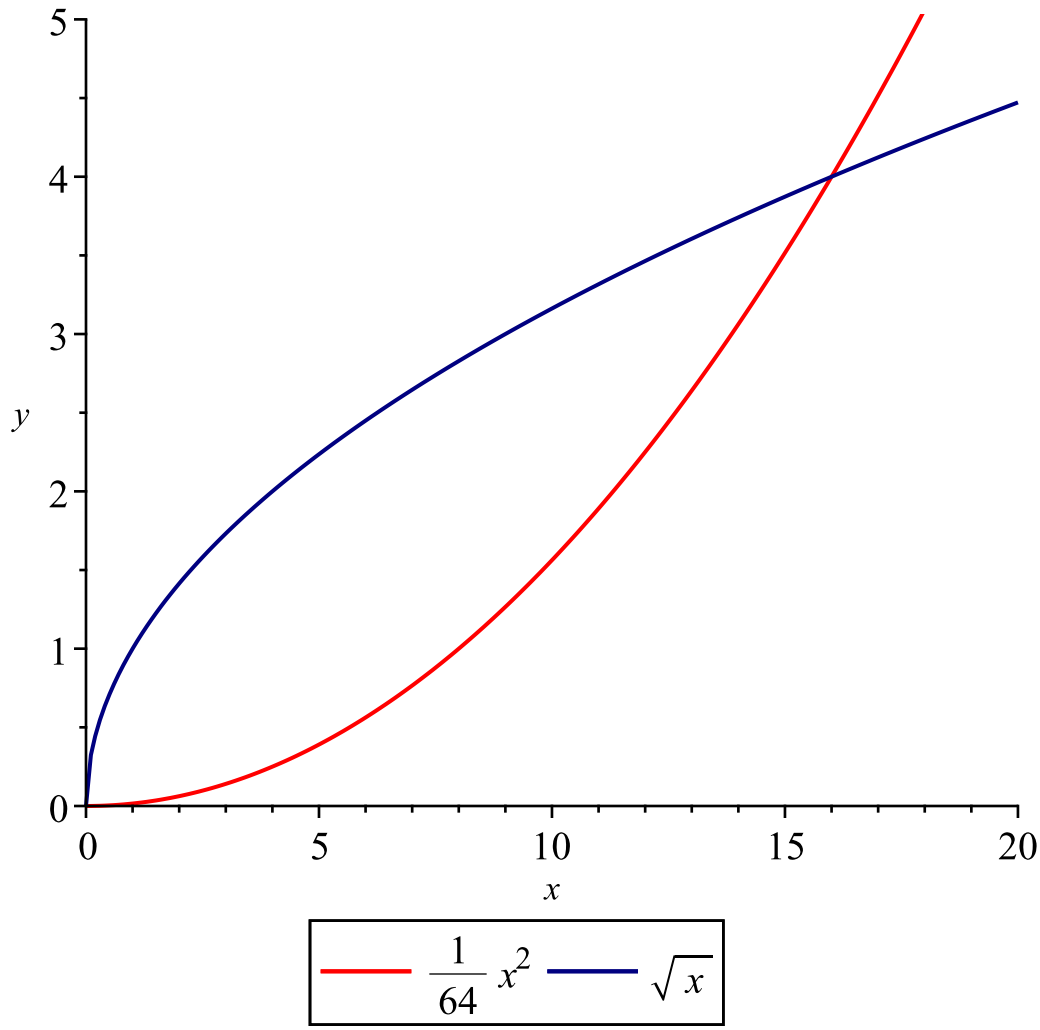
$restart :; with(Gym)$: Vi definerer to funktioner nedenfor:

$f(x) := \frac{1}{64} \cdot x^2 :; g(x) := \mathrm{sqrt}(x)$:

Spgm. a

Vi mennesker kan godt lide at se det for os grafisk, så lad os tegne de to funktioner, afgrænset i første kvadrant.

$plot([f(x), g(x)], x = 0..20, y = 0..5, legend = [f(x), g(x)], color = [\text{"Red"}, \text{"Navy"}])$



Vi løser ligningen :
$f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{64}x^2 = \sqrt{x} \quad \textbf{(30.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0], [x=16]] \quad \textbf{(30.1.2)}$$

Vi bestemmer arealet af M.

$$M = \int_0^{16} g(x) - f(x)\, dx$$

$$M = \frac{64}{3} \quad \textbf{(30.1.3)}$$

$evalf[5]$(**(30.1.3)**)

$$M = 21.333 \quad \textbf{(30.1.4)}$$

Så arealet af M er 21.333

Opgave 14

$restart$:; $with(Gym)$:

Spgm. a

Givet differentialligningen

$B'(t) = 1.55 \cdot 10^{-4} \cdot B(t) \cdot (2000 - B(t))$

$$D(B)(t) = 0.0001550000000\, B(t)\, (2000 - B(t)) \quad \textbf{(31.1.1)}$$

Vi bruger *dsolve*.

$dsolve(\{B'(t) = 1.55 \cdot 10^{-4} \cdot B(t) \cdot (2000 - B(t)), B(0) = 50\}, B(t))$

$$B(t) = \frac{2000}{1 + 39\, e^{-\frac{31}{100} t}} \quad \textbf{(31.1.2)}$$

Hermed har vi den partikulære løsning. Vi definerer funktionen.

$B(t) := \frac{2000}{1 + 39\, e^{-\frac{31}{100} t}}$

$$t \rightarrow \frac{2000}{1 + 39\, e^{-\frac{31}{100} t}} \quad \textbf{(31.1.3)}$$

Vi bestemmer antallet af bakterier i bakteriekulturen efter 15 dage. Vi har:

$B(15)$

$$\frac{2000}{1 + 39\, e^{-\frac{93}{20}}} \quad \textbf{(31.1.4)}$$

evalf[5](**(31.1.4)**)

$$1456.8 \quad \textbf{(31.1.5)}$$

Så mængden af bakterier i bakteriekulturen efter 15 dage er 1456.8.

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet funktionen

$A(v) := \frac{200 \cdot v}{(v+2)^2}$

$$v \rightarrow \frac{200\, v}{(v+2)^2} \quad \textbf{(32.1.1)}$$

Vi bestemmer v, så arealet bliver størst muligt.

$A'(v) = 0$

$$\frac{200}{(v+2)^2} - \frac{400\, v}{(v+2)^3} = 0 \quad \textbf{(32.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for v}}$

$$[[v = 2]] \quad \textbf{(32.1.3)}$$

Vi indsætter nu $v = 2$ i den dobbelte afledede

$A''(2)$

$$-\frac{25}{8} \quad \textbf{(32.1.4)}$$

Da outputtet er negativt, har vi et maksimum. Dvs. vinklen $v = 2$ giver det største areal.

Opgave 16

$restart :; with(Gym) :$
Givet funktionen
$f(x) := 5 - x^4 :$

Spgm. a

Vi har et rektangel, hvor $0 < h < 5$ er angivet.
Vi bestemmer h udtrykt ved x, så vi har:
$f(x) = h$

$$-x^4 + 5 = h \tag{33.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = (-h+5)^{1/4}], [x = \mathrm{I}\,(-h+5)^{1/4}], [x = -(-h+5)^{1/4}], [x = -\mathrm{I}\,(-h+5)^{1/4}]] \tag{33.1.2}$$

Vi har den første løsning, $x = (-h+5)^{1/4}$ så de tre andre forkastes.
$x = \sqrt[4]{5-h}$ men eftersom bredden også gælder 2. kvandrant, har man:
$x = 2 \cdot \sqrt[4]{5-h}$

Arealet af rektanglet er
$A = l \cdot b$, her er $l = h$ og $b = 2 \cdot \sqrt[4]{5-h}$, så vi har:
$A(h) = h \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{5-h}$

$$A(h) = 2\,h\,(-h+5)^{1/4} \tag{33.1.3}$$

Dermed har vi fået udtrykt arealet via h.

Opgave 17

Spgm. a

Vi opstiller en differentialligning.
Vi har hastigheden på 0.4 L/s, vi har at prportionalitetskonstanten på 0.001 s^{-1}, og da det er den mængde vand der ryger ud, så er det et negativt tal.
Vi betegner vandet med V som funktion af tiden t, så vi har:
$V'(t) = 0.4 - 0.001 \cdot V(t)$.