Matematik A, STX
Vejledende eksamensopgaver
Løsninger

Af

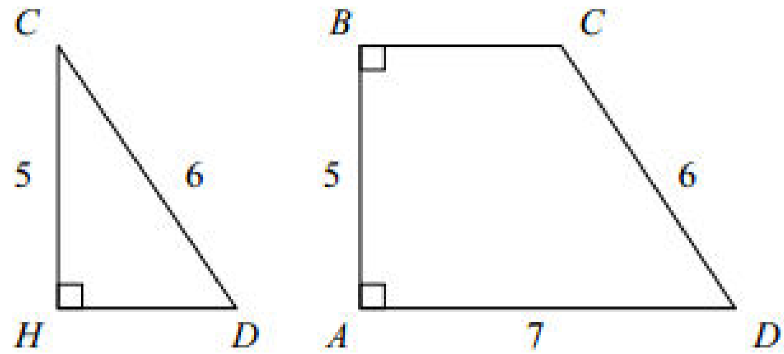
Anders J., Mark K. & Saeid J.

Kun delprøve 2, 2008 til 2010 maj

Må KUN bruges til inspiration!

Matematik A-niveau STX
Maj 2008

Opgave 6



Ovenfor ses en skitse af trekant *CDH* og firkant *ABCD*.

a) Bestem $\angle D$ i trekant *CDH*.

b) Bestem $|BD|$ og $|AC|$ i firkant *ABCD*.

Opgave 6 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi regner vinkel D ved følgende metode: $\mathrm{D} = invSin\left(\frac{modstående\ katete}{hypotenusen}\right)$

$\mathrm{D} = invSin\left(\frac{5}{6}\right)$

$$\mathrm{D} = 56.44269023 \tag{1.1.1}$$

Dermed er vinklen i trekanten CDH fundet, som er 56.44269023°

Delopgave b)

Vi regner |BD|.
Først $a^2 + b^2 = c^2$.
Vi indsætter tallene i Pythagoras' sætning.

$\sqrt{5^2 + 7^2} = c$

$$\sqrt{74} = c \tag{1.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$8.6023 = c \tag{1.2.2}$$

Endelig regner vi |AC|, men først bestemmes |AH|
Vi indsætter tallene i Pythagoras' sætning.

$\sqrt{6^2 - 5^2}$

$$\sqrt{11} \tag{1.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$3.3166 \tag{1.2.4}$$

Afstanden |AH| må være 3.32.
Nu trækker vi tallet fra grundlinjen, som er 7. Dvs. $7 - 3.32$

$$3.68 \tag{1.2.5}$$

Så nu kan vi finde |AC|.
$\sqrt{5^2 + 3.68^2}$

$$6.208252572 \tag{1.2.6}$$

Som er den ønskede længde. Derved er afstandene fundet for trekanten og firkanten.

Opgave 7 I et koordinatsystem i rummet er der givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en ligning for den plan α, der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og som indeholder punktet $P(1, 3, -6)$.

En linje l er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathrm{R},$$

og en plan β er bestemt ved ligningen

$$2x - 3y + z = 7.$$

b) Bestem den spidse vinkel mellem l og β.

Opgave 7 løsning:

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Vi skal lave krydspodukt af vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Vi definerer først vores vektorer.
$\vec{a} := \langle -2, 4, 5 \rangle$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

$\vec{b} := \langle 1, -3, -2 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

Vi ønsker derfor at lave krydsprodukt af dem.

$linalg[crossprod](\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

Som er vores koordinater. Vi indsætter det i planens ligning.

$\alpha : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2.1.4)$$

Da indsætter vi blot vores oplysninger samt oplysningerne fra punktet P, som er følgende: $P(1, 3, -6)$.

$\alpha := 7(x - 1) + 1(y - 3) + 2(z - (-6)) = 0$

$$7x + 2 + y + 2z = 0 \quad (2.1.5)$$

Dvs. at ligningen for planen α der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og indeholder punktet P(1,3,-6) er: $7x + 2 + y + 2z = 0$

Delopgave b)

Vi skal her bestemme den spidse vinkel mellem l og β. Dvs. vi har fået angivet nogle nye oplysninger.

$l := \langle x, y, z \rangle = \langle -1, 2, 4 \rangle + t \cdot \langle 1, 1, 3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + t \\ 2 + t \\ 4 + 3t \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

Hvor $t \in \mathbb{R}$.

Planen β er givet ved:

$\beta := 2x - 3y + z = 7$

$$2x - 3y + z = 7 \quad (2.2.2)$$

Vi bestemmer vinklen med følgende formel, hvoraf retningsvektoren fra linjen og normalvektoren fra planen β indsættes.

$cosv = \frac{r_l \cdot n_\beta}{|r_l| \cdot |n_\beta|}$. Vi indsætter vores oplysninger fra tidligere.

$V = invCos\left(\frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}\right)$

$$V = 80.72550020 \quad (2.2.3)$$

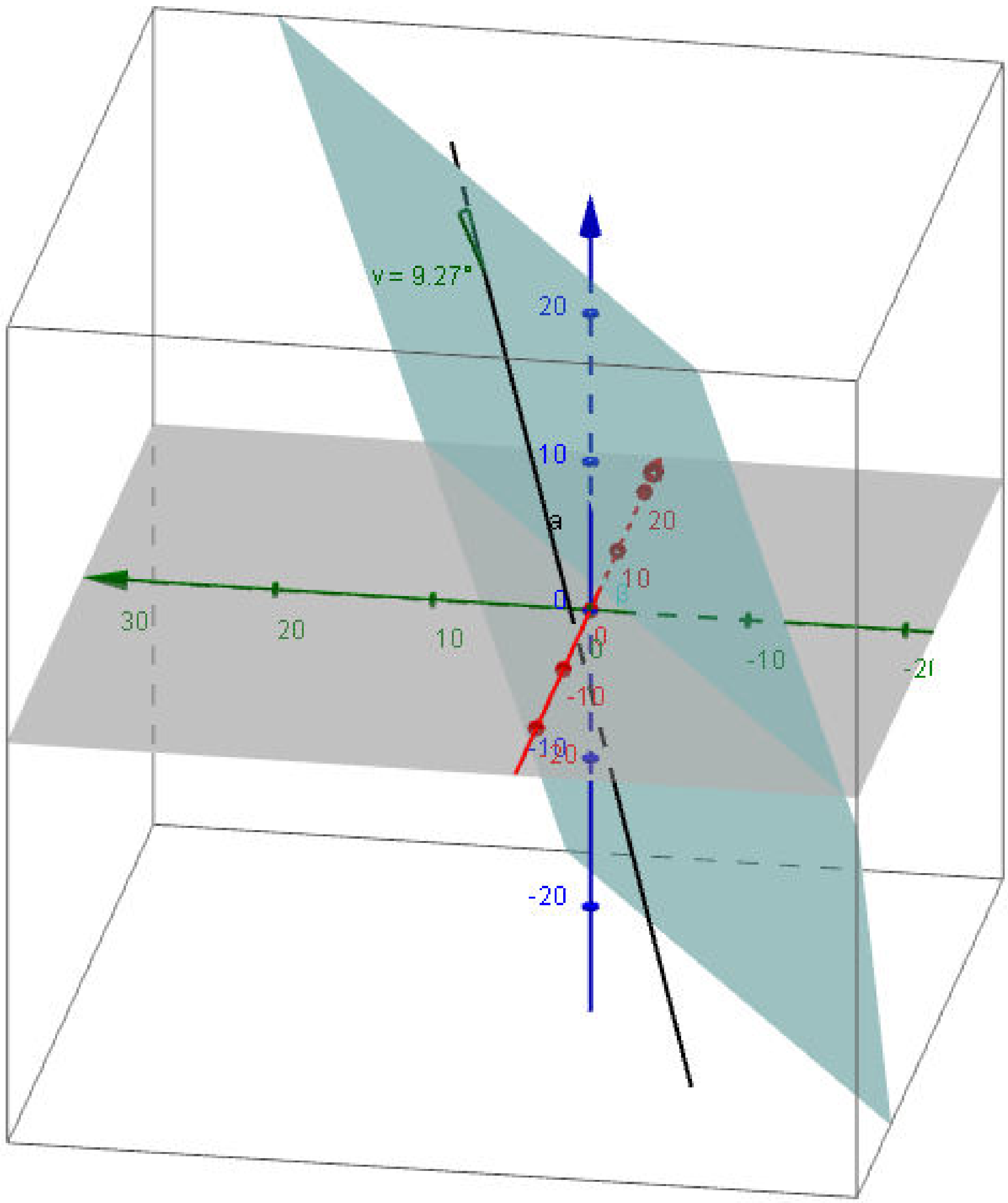
Så vinklen V er 80.72550020°, som er den vinkel mellem l og normalvekoren fra β. Vi skal derfor trække vinklen fra 90. Dvs.

$90 - 80.72550020$

$$9.27449980 \tag{2.2.4}$$

Bemærk, at vinklen er spids idet: $0 < v < 90$. En visualisering i GeoGebra ses her:

▸ 3D Grafik



Som er det ønskede.

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 10x^4 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

a) Bestem den stamfunktion F til f, der opfylder, at $F(1) = 25$.

Opgave 8 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi ønsker at finde stamfunktionen til *f*. Vi får angivet *f* som følgende:

$f(x) := 10\,x^4 + \frac{1}{x}$

$$x \rightarrow 10\,x^4 + \frac{1}{x} \tag{3.1.1}$$

Hvor $x > 0$.

Vi bestemmer stamfunktionen vha. Maple.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$$2\,x^5 + \ln(x) \tag{3.1.2}$$

Maple vælger ikke at sætte konstanten *k* efterfølgende, men det gør vi nedenfor:

$F(x) = 2\,x^5 + \ln(x) + k$.

Vi skal løse en ligning for at finde konstanten *k*, for følgende er givet: $F(1) = 25$.

Vi indsætter i $F(x)$.

$25 = 2 \cdot 1^5 + \ln(1) + k$

$$25 = 2 + k \tag{3.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 23]] \tag{3.1.4}$$

Så vi ved, at konstanten er 23. Derved er vores forskrift for $F(x)$ følgende:

$F(x) = 2\,x^5 + \ln(x) + 23$

$$F(x) = 2\,x^5 + \ln(x) + 23 \tag{3.1.5}$$

Som er det ønskede.

Opgave 9 I nedenstående tabel ses den forventede levealder for nyfødte i henholdsvis 1900 og 1975.

Årstal	1900	1975
Forventet levealder for nyfødte (år)	46	70

Den forventede levealder (målt i år) for nyfødte kan beskrives ved en lineær funktion f af tiden (målt i antal år efter 1900).

a) Bestem en forskrift for f.

Den forventede levealder (målt i år) for 65-årige kan beskrives ved den lineære funktion

$$g(x) = 0{,}053x + 76\,,$$

hvor x er antal år efter 1900.

b) Benyt funktionerne f og g til at bestemme det år, hvor den forventede levealder for nyfødte er den samme som den forventede levealder for 65-årige.

Opgave 9 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har med en lineær funktion at gøre. Vi laver regression over oplysningerne, idet det vil give en meget præcis forskrift. Først definerer vi vores x'er og y'er.

$x := [0, 75]$

$$[0, 75] \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

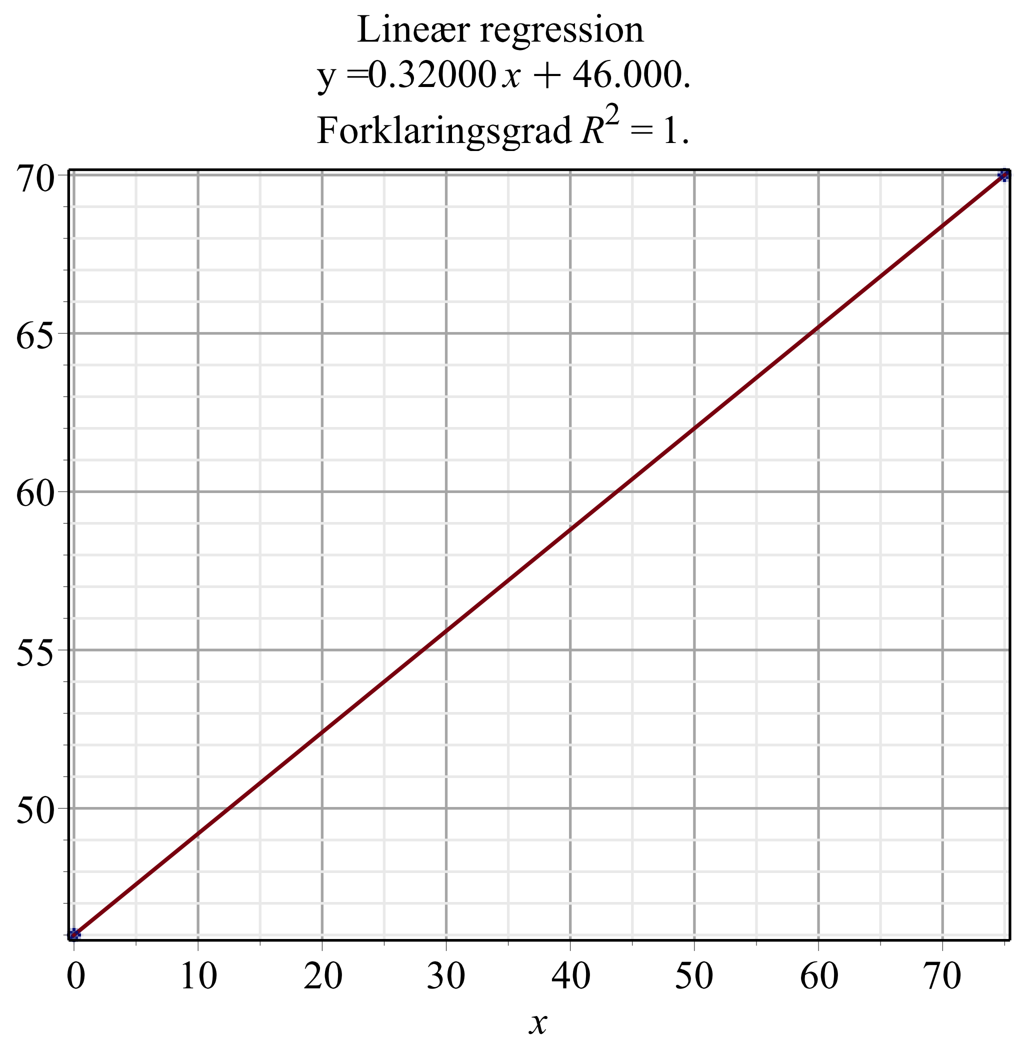
$y := [46, 70]$

$$[46, 70] \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

Bemærk, at jeg ikke skriver 1900 og 1975, for hvis dette sker, vil det give en ret anderledes funktion, som ikke vil passe i denne sammenhæng.

Vi laver regression ved følgende kommando:

LinReg(x, y)



En utrolig god forklaringsgrad på 1. Funktionen passer meget godt. Forskriften er givet ved:
$f(x) := 0.32\,x + 46$

$$x \rightarrow 0.32\,x + 46 \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

Her bør man bemærke, at tallene a og b også bliver bestemt, idet der er tale om en regression.
Tallene a og b fortæller:
a angiver den ekstra levealders udvikling der sker pr. år, fra år 1900, og b er den forventede levealder i 1900 for en nyfødt.

Delopgave b)

Vi får her en ny funktion, som gælder for den forventede levealder for folk på 65 år.
Vi definerer den nye funktion:
$g(x) := 0.053\,x + 76$

$$x \rightarrow 0.053\,x + 76 \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

Vi skal bestemme det år, hvor den forventede levealder er ens for de nyfødte som for de ældre.
Derfor sætter vi $f(x)$ og $g(x)$ mod hinanden og løser en ligning.

$f(x) = g(x)$

$$0.32\,x + 46 = 0.053\,x + 76 \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 112.3595506]] \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

Så i år 2012 (fordi $1900 + 112.35 = 2012.35$) vil de nyfødte samt de ældre have den samme forventede levealder. Hermed er det ønskede bevist.

Opgave 10 I 2005 var bevillingerne til forskning og uddannelse i et bestemt land 20 mia. kr. Det bliver besluttet, at disse bevillinger skal stige med en fast årlig procent, så de i 2020 når op på 60 mia. kr.

a) Bestem den årlige procentvise stigning i bevillingerne.

Opgave 10 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har med en eksponentiel funktion at gøre, hvor vi skal bestemme den årlige procentvise bevilling for forskning og uddannelse. Vi bestemmer tallet *a*.

$$a = \sqrt[(x_2 - x_1)]{\frac{y_2}{y_1}} .$$

Vi indsætter vores oplysninger.

$$a = \sqrt[(15-0)]{\frac{60}{20}}$$

$$a = 3^{1/15}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$a = 1.0760 \qquad (5.1.2)$$

Her kender vi tallet *a*. Dette er nok for at kommentere den procentvise ændring. Vi omskriver *a* til procent.
$a = 1 + r$ dvs. fremskrivningsfaktoren.

$1.0760 = 1 + r$

$$1.0760 = 1 + r \qquad (5.1.3)$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = 0.07600000000]] \qquad (5.1.4)$$

Dette ganges med 100.

$0.0760 \cdot 100$

$$7.6000 \qquad (5.1.5)$$

Så fra år 2005 til 2015 steg bevillingerne med 7.6 % pr. år.

Hvilket er det ønskede.

Opgave 11 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - x + 2,$$
$$g(x) = -x^2 + 5x - \frac{5}{2}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

Det oplyses, at graferne for f og g har netop ét fælles punkt Q.

b) Bestem koordinatsættet til Q.

Opgave 11 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

I den her opgave skal vi bestemme tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.
Vi definerer derfor $f(x)$.

$f(x) := x^2 - x + 2$

$$x \to x^2 - x + 2 \quad \textbf{(6.1.1)}$$

Den differentierer vi.
$f'(x)$

$$2x - 1 \quad \textbf{(6.1.2)}$$

Vi indsætter tallet 2 på hhv. $f(x)$ og $f'(x)$'s plads. Dvs. x's plads.

$f(2)$

$$4 \quad \textbf{(6.1.3)}$$

$f'(2)$

$$3 \quad \textbf{(6.1.4)}$$

Vi indsætter disse tal samt 2 fra punktet i tangentligningen.
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

$y = 3 \cdot (x - 2) + 4$

$$y = 3x - 2 \quad \textbf{(6.1.5)}$$

Som er vores ønskede forskrift for tangentlinjen.

Delopgave b)

I den her delopgave skal vi bestemme koordinatsættet til Q idet f og g har et fælles punkt.

$g(x) := -x^2 + 5x - \frac{5}{2}$

$$x \rightarrow -x^2 + 5x - \frac{5}{2} \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

Vi sætter vores $g(x) = f(x)$.

$f(x) = g(x)$

$$x^2 - x + 2 = -x^2 + 5x - \frac{5}{2} \qquad \textbf{(6.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{3}{2}\right], \left[x = \frac{3}{2}\right]\right] \qquad \textbf{(6.2.3)}$$

Derved kender vi nu vores fælles x for Q. Vi mangler y.

Vi indsætter det i een af funktionerne. Jeg vælger $g(x)$.

$g\left(\frac{3}{2}\right)$

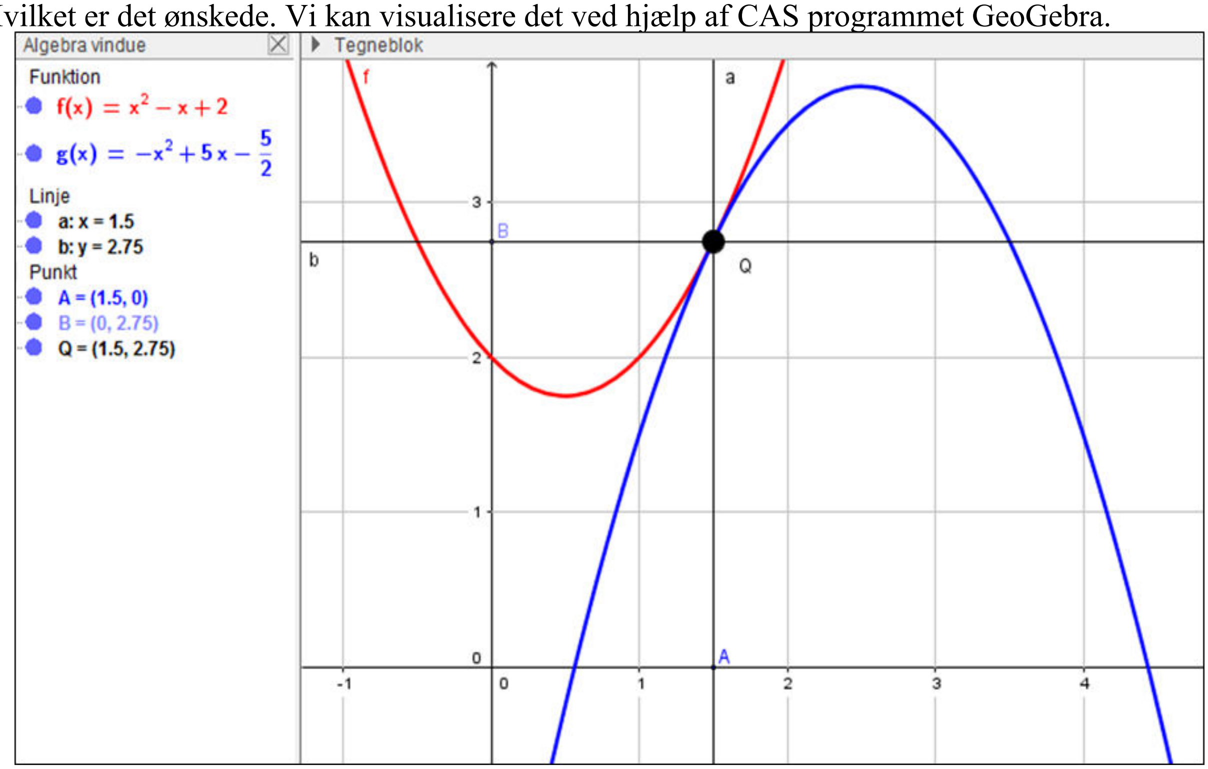
$$\frac{11}{4} \qquad \textbf{(6.2.4)}$$

Så koordinatsættet for punktet Q er følgende:

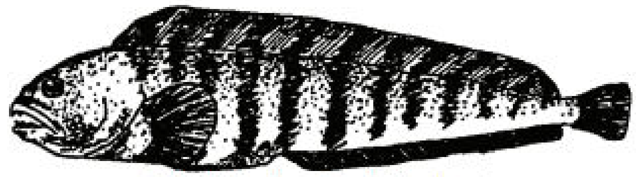
$\left(x = \frac{3}{2}, y = \frac{11}{4}\right)$

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{11}{4} \qquad \textbf{(6.2.5)}$$

Hvilket er det ønskede. Vi kan visualisere det ved hjælp af CAS programmet GeoGebra.



Opgave 12



Atlantisk havkat (*Anarhichas lupus*)

Længde (cm)	0-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
Procentdel	0	9	11	0	31	25	19	5

Tabellen viser fordelingen af længden af atlantiske havkatte fanget i dybden 5-40 m i *Gulf of Maine*. Det oplyses, at den korteste og den længste havkat er henholdsvis 51 cm og 120 cm.

a) Tegn sumkurven, og bestem kvartilsættet.

Kvartilsættet for længden af atlantiske havkatte fanget i dybden 40-80 m er 46 cm, 81 cm og 95 cm. Den korteste og den længste havkat fanget i dette dybdeinterval er henholdsvis 6 cm og 123 cm.

b) Benyt de to kvartilsæt til på samme figur at lave to boksplot for længden af havkatte fanget i de to dybdeintervaller, og kommentér forskellen.

Opgave 12 løsning:

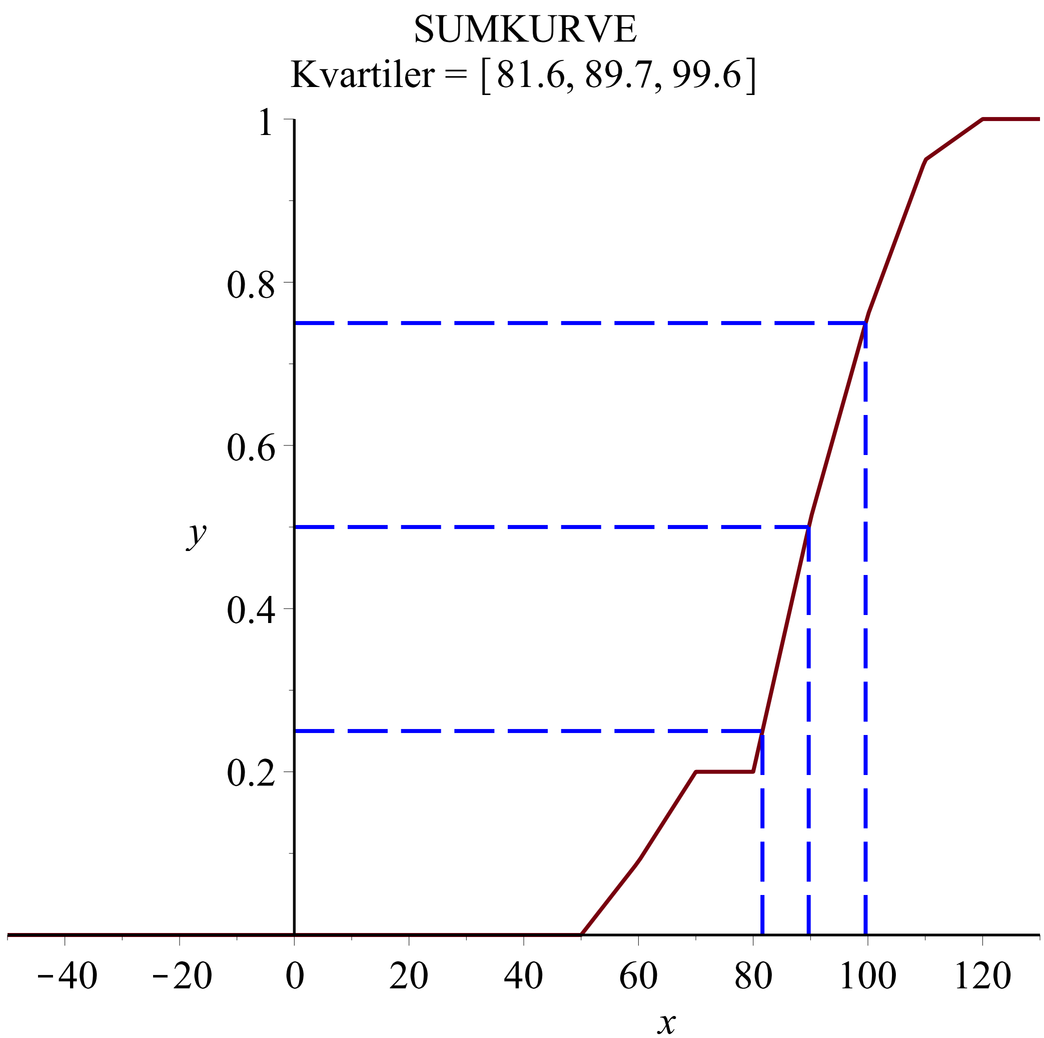
restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

For at tegne en sumkurve og bestemme kvartilsættet, så defineres først en matrix med de givne informationer:

$$M := \begin{bmatrix} 0..50 & 0 \\ 50..60 & 9 \\ 60..70 & 11 \\ 70..80 & 0 \\ 80..90 & 31 \\ 90..100 & 25 \\ 100..110 & 19 \\ 110..120 & 5 \end{bmatrix} :$$

Nu kan sumkurven tegnes vha. følgende kommando:
plotSumkurve(*M*)



Maple giver sammen med sumkurven også kvartilsættene, dvs. at
Nedre kvartil: 81.6
Median: 89.7
Øvre kvartil: 99.6

Delopgave b)

Jeg aflæser opgavens informationer og får følgende kvartilsæt:

Start	6
Nedre	46
Median	81
Øvre	95
Slut	123

Disse informationer er nok til at tegne et andet boksplot, udover det første, som vi fandt ud fra vores oplysninger. Vi kan tegne et boksplot i Maple.

$obs1 := [51, 81.6, 89.7, 99.6, 120]$

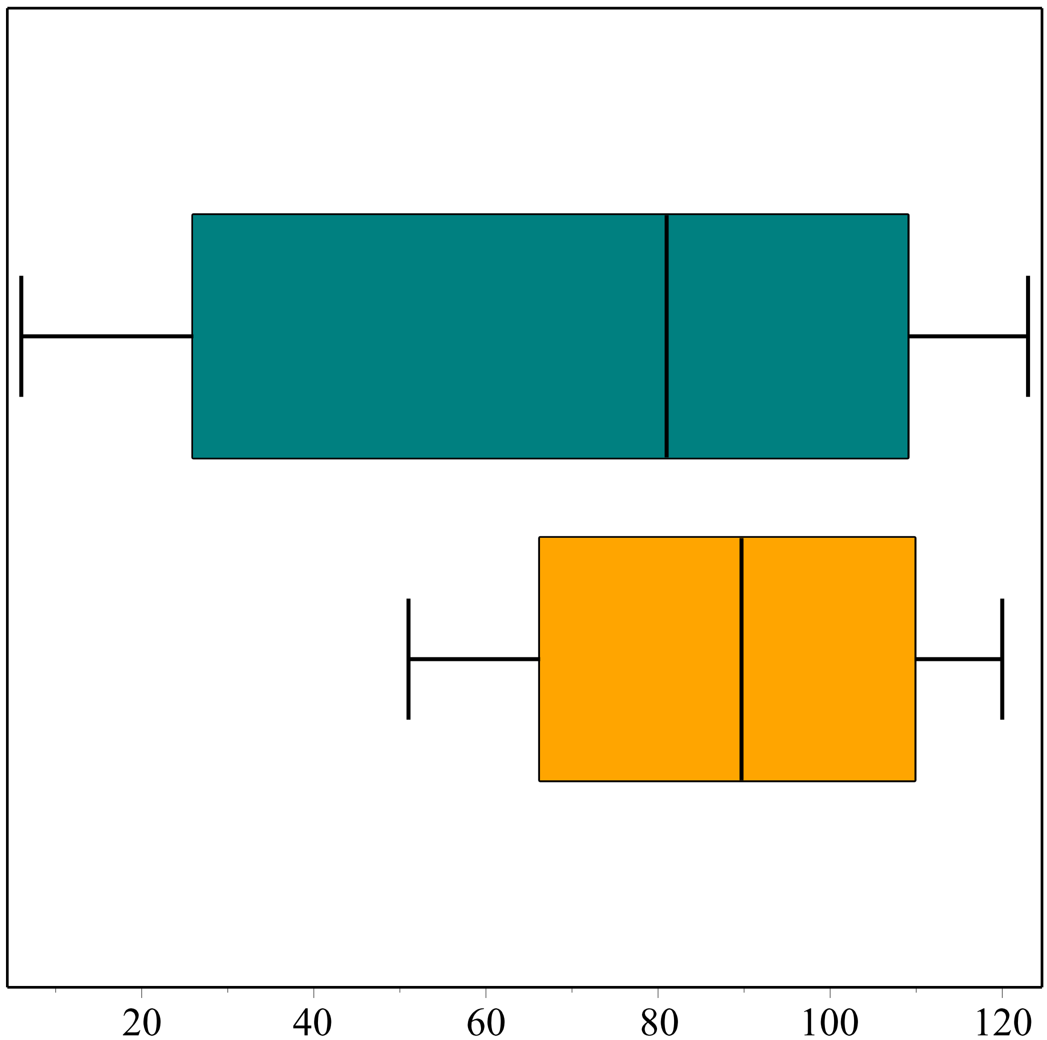
$$[51, 81.6, 89.7, 99.6, 120] \tag{7.2.1}$$

$obs2 := [6, 46, 81, 95, 123]$

$$[6, 46, 81, 95, 123] \tag{7.2.2}$$

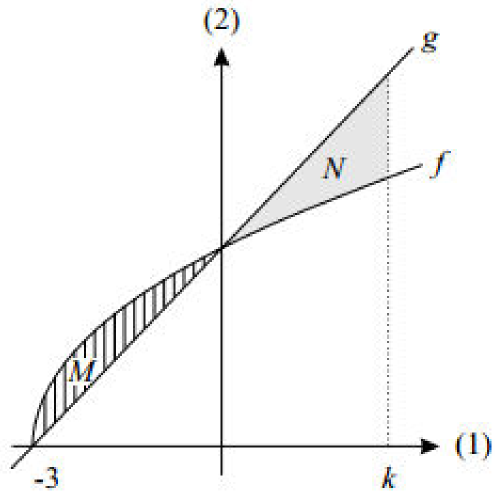
Vi laver et boksplot over informationerne. Bemærk, at *obs1* er det vi fandt i opgave a. *obs2* er de nye informationer.

$boksplot(obs1, obs2)$



Forklaring:
Boksplottene for **obs1** viser os spredningen af fisk fanget på lavt vand, altså 5-40m, hvor **obs2** viser spredningen af fisk fanget på dybere vand ved 40-80m. Det ses, at fiskene generelt er længere på lavere vand. Samtidig er der en meget stor spredning af fisk mellem ca. 50 og 80 cm. på dybt vand, hvor spredningen på mindre vand er meget lavere.

Opgave 13 To funktioner f og g har forskrifterne $f(x)=\sqrt{3x+9}$ og $g(x)=x+3$.
Graferne for f og g afgrænser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.



a) Bestem arealet af M.

For $k>0$ afgrænser graferne for de to funktioner sammen med linjen med ligningen $x=k$ i første kvadrant en punktmængde N.

b) Bestem k, så arealerne af M og N er lige store.

Opgave 13 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi definerer først vores funktioner:

$f(x) := \sqrt{3\,x+9}$

$$x \rightarrow \sqrt{3\,x+9} \tag{8.1.1}$$

$g(x) := x+3$

$$x \rightarrow x+3 \tag{8.1.2}$$

Herved har vi vores funktioner. Vi skal bestemme arealet af *M*. Dette gøres på følgende måde:

$\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\, dx$

$$\frac{3}{2} \tag{8.1.3}$$

Som er arealet af *M*.

Delopgave b)

Vi skal næsten det samme i denne opgave, vi skal dog blot finde *k* så *M* og *N* er lige store. Vi gør følgende:

$$\int_0^k (g(x) - f(x))\, dx = \frac{3}{2}$$

$$6 + \frac{1}{2} k^2 + 3k - \frac{2}{9} (3k+9)^{3/2} = \frac{3}{2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$\left[[k = -3], \left[k = \frac{7}{3}\right] \right] \quad \textbf{(8.2.2)}$$

Arealet skal være større end 0 idet $x > 0$. Derfor skal k være $\frac{7}{3}$.

Hvilket er det ønskede.

Opgave 14 I en model kan udviklingen i biltætheden (målt i antal biler pr. 1000 indbyggere) i Danmark i perioden efter 1968 beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}0004 \cdot N \cdot (315 - N),$$

hvor N betegner biltætheden til tiden t (målt i antal år efter 1968).

a) Bestem en forskrift for biltætheden N som funktion af tiden t, idet det oplyses, at biltætheden i 1968 var 198.

b) Giv ved hjælp af den fundne funktion et skøn over biltætheden i 2008, og kommentér resultatet.

Opgave 14 løsning:

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a)

I den her opgave regner vi med en differentialligning. Vi skriver den op.

$$\frac{dN}{dt} = 0.0004 \cdot N \cdot (315 - N)$$

$$\frac{dN}{dt} = 0.0004\, N\, (315 - N) \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Her ved vi, at N er biltætheden tid fra år 1968 og efter. Vi regner derfor ligningen for $N'(t)$.

$dsolve([N(0) = 198, N'(t) = 0.0004 \cdot N(t) \cdot (315 - N(t))])$

$$N(t) = \frac{6930}{22 + 13\, e^{-\frac{63}{500} t}} \quad \textbf{(9.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$N(t) = \frac{6930.}{22. + 13.\, e^{-0.12600\, t}} \tag{9.1.3}$$

Herved har vi en forskrift for *N*. Vi definerer den:

$N(t) := \frac{6930.}{22. + 13.\, e^{-0.12600\, t}}$

$$t \rightarrow \frac{6930.}{22. + 13.\, e^{(-1) \cdot 0.12600\, t}} \tag{9.1.4}$$

Hvilket er det ønskede.

Delopgave b)

Vi skal regne hvor meget biltætheden er i år 2008. Dette gøres ved at sige:

$2008 - 1968$

$$40 \tag{9.2.1}$$

Så vi indsætter 40 i funktionen.

$N(40)$

$$313.7995920 \tag{9.2.2}$$

Så i år 2008 vil biltætheden være 313.8 pr. 1000 indbygger.

Opgave 15 I den såkaldte Gompertz model for en bestemt population af kyllinger kan sammenhængen mellem en kyllings vægt *M* (målt i kg) og kyllingens alder *t* (målt i døgn efter udklækning) beskrives ved

$$\ln(M) = 1{,}6524 - 4{,}612 \cdot e^{-0{,}0423\, t}\,.$$

a) Benyt modellen til at bestemme vægten af en kylling, der er 30 døgn gammel, og bestem *M* som funktion af *t*.

Opgave 15 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi bestemmer en kyllings vægt efter 30 døgn ved blot at indsætte 30 i modellens *t*.

$\ln(M) = 1.6524 - 4.612 \cdot e^{-0.0423 \cdot 30}$

$$\ln(M) = 0.355908717 \tag{10.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for M}}$

$$[[M = 1.427477238]] \tag{10.1.2}$$

Så efter 30 dage, vil kyllingens vægt være 1.42kg.

Vi skal nu bestemme en forskrift for modellen. Vi gør det sådan:

$\ln(M) = 1.6524 - 4.612 \cdot e^{-0.0423 \cdot t}$

$$\ln(M) = 1.6524 - 4.612\, e^{-0.0423\, t} \quad \textbf{(10.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for M}}$

$$\left[\left[M = e^{1.652400000 - 4.612000000\, e^{-0.04230000000\, t}}\right]\right] \quad \textbf{(10.1.4)}$$

Så herved er funktionen givet:

$M(t) = e^{1.652400000 - 4.612000000\, e^{-0.04230000000\, t}}$

$$M(t) = e^{1.652400000 - 4.612000000\, e^{-0.04230000000\, t}} \quad \textbf{(10.1.5)}$$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 16 I en model er antallet P af individer i en bestemt population en funktion af tiden t (målt i døgn). Den hastighed, hvormed P vokser til tidspunktet t, er proportional med produktet af antallet af individer til tidspunktet t og forskellen mellem 2600 og antallet af individer til tidspunktet t.
Det oplyses, at væksthastigheden er 10, når der er 100 individer i populationen.

a) Opskriv en differentialligning, som P må opfylde.

Opgave 16 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

$solve(10 = k \cdot 100 \cdot (2600 - 100))$

$$\frac{1}{25000} \quad \textbf{(11.1.1)}$$

Differentialligningen må være følgende:

$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{25000} \cdot P(t) \cdot (2600 - P(t))$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{25000}\, P(t)\, (2600 - P(t)) \quad \textbf{(11.1.2)}$$

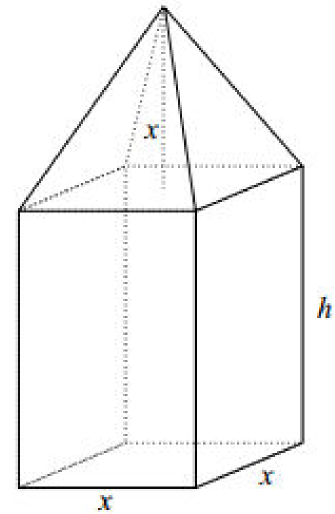
Som er det ønskede.

Opgave 17a En bestemt type af beholdere har form som vist på figuren. For en beholder af denne type, hvor rumfanget skal være 100 cm^3, gælder, at

$$\tfrac{1}{3}x^3 + hx^2 = 100 \text{ og}$$
$$S = \left(1+\sqrt{5}\right)x^2 + 4xh\,,$$

hvor S er beholderens overflade (målt i cm^2), og hvor h (målt i cm) og x (målt i cm) er angivet på figuren.

a) Bestem S udtrykt ved x, og bestem x, så beholderens overfladeareal bliver mindst mulig.



Opgave 17a løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi aflæser opgavens formuleringer og ser følgende:

$\frac{1}{3}x^3 + h\cdot x^2 = 100$

$$\frac{1}{3}\,x^3 + h\,x^2 = 100 \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

$S = (1 + \text{sqrt}(5))x^2 + 4\,xh$

$$S = \left(1 + \sqrt{5}\,\right)x^2 + 4\,xh \qquad \textbf{(12.1.2)}$$

Vi skal flette disse sammen. Dette gøres ved at isoler h i (**12.1.1**)

$\frac{1}{3}x^3 + h\cdot x^2 = 100$

$$\frac{1}{3}\,x^3 + h\,x^2 = 100 \qquad \textbf{(12.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for h}}$

$$h = \frac{100 - \frac{1}{3}\,x^3}{x^2} \qquad \textbf{(12.1.4)}$$

Ved indsættelse af dette i (**12.1.2**) fås følgende:

$S(x) := (1 + \text{sqrt}(5))\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot\left(\frac{100 - \frac{1}{3}\,x^3}{x^2}\right)$

$$x \rightarrow \left(1 + \sqrt{5}\,\right)x^2 + \frac{4\,x\left(100 - \frac{1}{3}\,x^3\right)}{x^2} \qquad \textbf{(12.1.5)}$$

Vi differentierer funktionen.

$S'(x)$

$$2\left(1+\sqrt{5}\right)x-\frac{4\left(100-\frac{1}{3}x^3\right)}{x^2}-4x \tag{12.1.6}$$

Endelig kan vi bestemme x.

$S'(x)=0$

$$2\left(1+\sqrt{5}\right)x-\frac{4\left(100-\frac{1}{3}x^3\right)}{x^2}-4x=0 \tag{12.1.7}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$4.719368868 \tag{12.1.8}$$

Endelig kan vi bestemme monotoniforholde for $S(x)$ hvor tallene $\neq x$.

Vi vælger 4 og 5.

$S'(4)$

$$-\frac{83}{3}+8\sqrt{5} \tag{12.1.9}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-9.778 \tag{12.1.10}$$

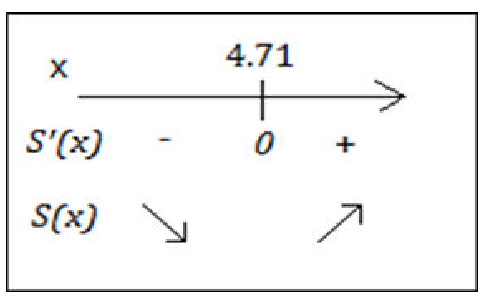
$S'(5)$

$$-\frac{58}{3}+10\sqrt{5}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$3.028 \tag{12.1.12}$$

Vi ved nu hvornår funktionen er voksende og aftagende.



Så $S(x)$ har følgende:
Funktionen f er aftagende i intervallet $]-\infty; 4.71]$
Funktionen f er voksende i intervallet $[4.71; \infty[$.

Hvilket er det ønskede.

Opgave 17b I et koordinatsystem i rummet er en kugle K givet ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36,$$

og en linje l er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Undersøg, om l er tangent til K.

Opgave 17b løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Her har vi fået angivet en kugle med ligningen. Vi kalder kuglen for K.

$K := x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z = 36 \tag{13.1.1}$$

Samt en linje l med parameterfremstillingen:

$l := \langle x, y, z \rangle = \langle -8, 2, -3 \rangle + t \cdot \langle -5, 7, -3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 - 5t \\ 2 + 7t \\ -3 - 3t \end{bmatrix} \tag{13.1.2}$$

Vi skal bestemme, om l er tangent til kuglen. Derfor indsætter vi hhv. x, y og z fra l i kuglen vi kaldte for K og løser en ligning for t.

$(-8 - 5t)^2 - 4(-8 - 5t) + (2 + 7t)^2 + 2(2 + 7t) + (-3 - 3t)^2 - 2(-3 - 3t) = 36$

$$(-8 - 5t)^2 + 42 + 40t + (2 + 7t)^2 + (-3 - 3t)^2 = 36 \tag{13.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = -1], [t = -1]] \tag{13.1.4}$$

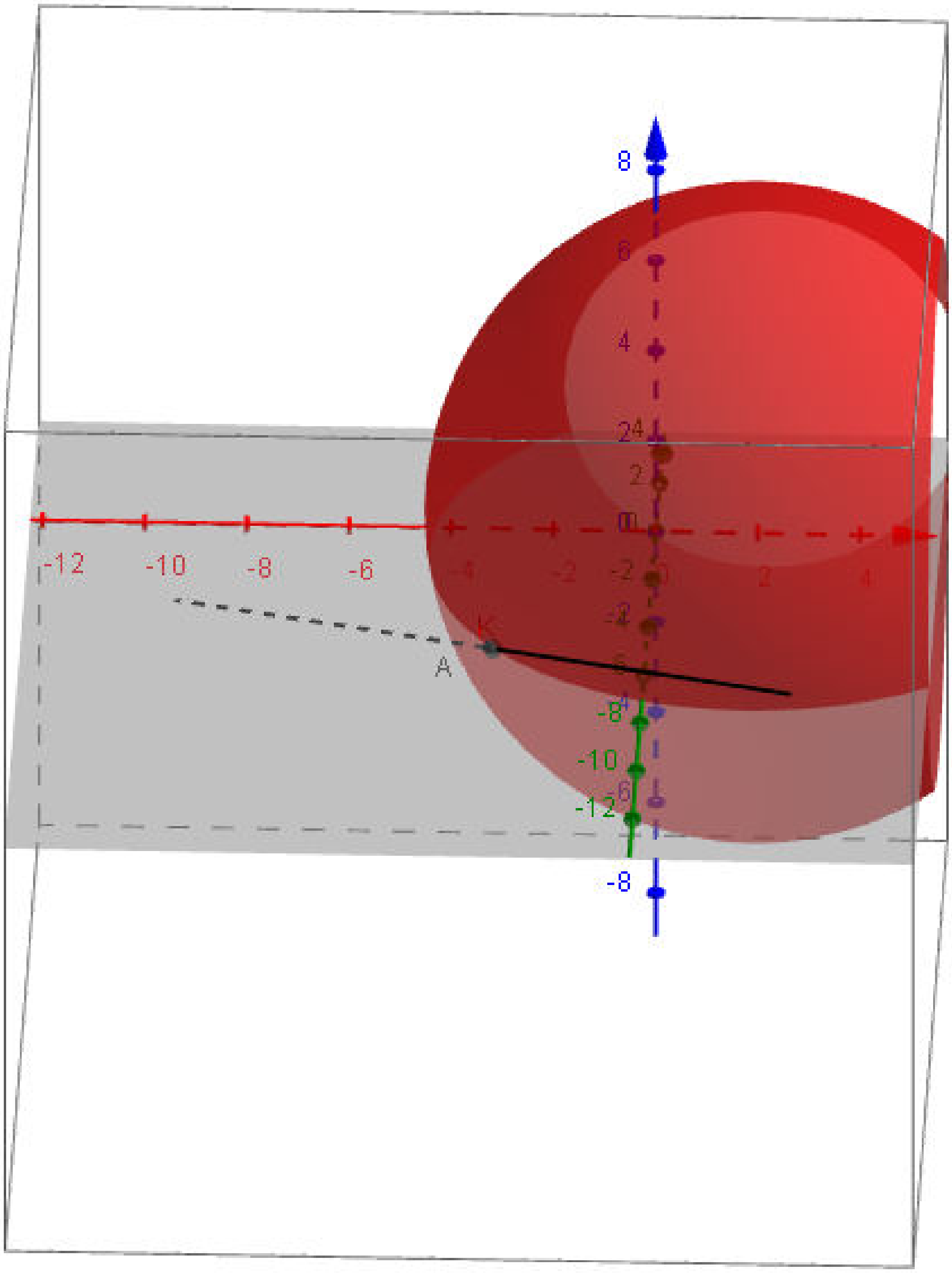
Da $t = -1$ vil der være ét skærningspunkt. Vi undersøger det ved at indsætte $t = -1$ i linjen l.

$l := \langle x, y, z \rangle = \langle -8, 2, -3 \rangle + (-1) \cdot \langle -5, 7, -3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.1.5}$$

Som er koordinaterne til skæringspunktet for tangenten til kuglen K. En visualisering ses her:

▶ 3D Grafik



Hvilket er det ønskede.

Matematik A-niveau STX
Maj 2009

Opgave 6 I et koordinatsystem i rummet har en kugle centrum i $C(0,0,5)$, og punktet $P(2,-1,7)$ ligger på kuglen.

a) Bestem en ligning for kuglen.

En tangentplan α til kuglen er givet ved ligningen

$$x+2y-2z+1=0.$$

b) Bestem den spidse vinkel mellem α og linjen gennem C og P.

c) Bestem koordinatsættet til α's røringspunkt med kuglen.

Opgave 6 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Først definerer jeg oplysningerne.
$C := \langle 0\,,0\,,5\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14.1.1)}$$

$P := \langle 2,-1, 7\rangle$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14.1.2)}$$

Nu finder jeg længden.
$P - C$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14.1.3)}$$

Dette tages i den anden eksponent.

$r = 2^2 + (-1)^2 + 2^2$

$$r = 9 \tag{14.1.4}$$

Endelig kan vi finde ligningen for kuglen. Den kalder jeg for K.

$K := (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-5)^2 = 9$

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9 \tag{14.1.5}$$

Som er kuglens ligning.

Delopgave b)

For at bestemme den spidse vinkel, skal vi først lige definere vores α.

$\alpha := x + 2\,y - 2\,z + 1 = 0$

$$x + 2\,y - 2\,z + 1 = 0 \tag{14.2.1}$$

$\overrightarrow{CP} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{14.2.2}$$

Men det kræver en normalvektor. Den tages fra α.

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 1, 2, -2 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{14.2.3}$$

Vinklen regnes på følgende måde:

$V = invCos\left(\dfrac{(2\cdot 1) + (-1\cdot 2) + (2\cdot(-2))}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right)$

$$V = 116.3878000 \tag{14.2.4}$$

Som altså er en stump vinkel. Men der ønskes en spids vinkel, så det gøres på følgende måde:

$V - 90$

$$V - 90 \tag{14.2.5}$$

Dvs.

$116.387799961243 - 90$

$$26.3878000 \tag{14.2.6}$$

Vinklen V er så 26.3878000°.

Delopgave c)

Jeg laver en parameterfremstilling og kalder den for l.

$l := \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 0, 5 \rangle + t\cdot\langle 1, 2, -2 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2\,t \\ 5-2\,t \end{bmatrix} \tag{14.3.1}$$

Den sætter jeg ind i planens ligning og regner for variablen *t*.

Koordinatsættet til α

$t+2\,(2\,t)\,-2\,(5-2\,t)\,+1=0$

$$9\,t-9=0$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=1]] \tag{14.3.3}$$

Herefter indsætter jeg *t* i parameterfremstillingen og så vil jeg have koordinatsættet.

$t := 1$

$$1 \tag{14.3.4}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2\,t \\ 5-2\,t \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{14.3.5}$$

Som er mit koordinatsæt.

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{2x}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,f(1))$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 7 løsning:

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a)

Først definerer jeg oplysningerne.

$f := x \rightarrow x\cdot e^{2\,x}$

$$x \to x\, e^{2x} \tag{15.1.1}$$

Jeg differentier den.

$f'(x)$

$$e^{2x} + 2\, x\, e^{2x} \ln(e) \tag{15.1.2}$$

En tangentligning skal bestemmes. Der er blevet angivet et punkt $P(1, f(1))$.
Tallet 1 indsættes i funktionen f og den afledte funktion f'.

$f(1)$

$$e^2 \tag{15.1.3}$$

$f'(1)$

$$e^2 + 2\, e^2 \ln(e) \tag{15.1.4}$$

$y := f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

$$\left(e^2 + 2\, e^2 \ln(e)\right) (x - 1) + e^2 \tag{15.1.5}$$

$\overset{\text{factor}}{=}$

$$e^2 \left(2 \ln(e)\, x - 2 \ln(e) + x\right) \tag{15.1.6}$$

Ved hjælp af web2.0calc kan jeg omskrive tangentligningen til en mere brugervenlig version.

$22.167\, x - 14.778$

$$22.167\, x - 14.778 \tag{15.1.7}$$

Som er tangentligningen.

Delopgave b)

Da funktionen allerede er differentieret, skal den blot løses som en ligning, idet $f'(x) \Rightarrow 0$
Derfor gør jeg følgende:

$e^{2x} + 2\, x\, e^{2x} \ln(e) = 0$

$$e^{2x} + 2\, x\, e^{2x} \ln(e) = 0 \tag{15.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{1}{2 \ln(e)}\right]\right] \tag{15.2.2}$$

Ved hjælp af web2.0calc fås

$x = -\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} \tag{15.2.3}$$

Nu kan jeg finde to tal, der er hhv. mindre og større end $-\frac{1}{2}$. Jeg vælger tallet -3 og 3.

restart

$f'(-3) = e^{2\cdot(-3)} + 2\cdot(-3) e^{2\cdot(-3)} \ln(e)$

$$\mathrm{D}(f)(-3) = \frac{1}{e^6} - \frac{6 \ln(e)}{e^6} \tag{15.2.4}$$

$f'(3) = e^{2\cdot(3)} + 2\cdot(3) e^{2\cdot(3)} \ln(e)$

$$\mathrm{D}(f)(3) = e^6 + 6\, e^6 \ln(e) \tag{15.2.5}$$

Ved hjælp af web2.0calc fås følgende:

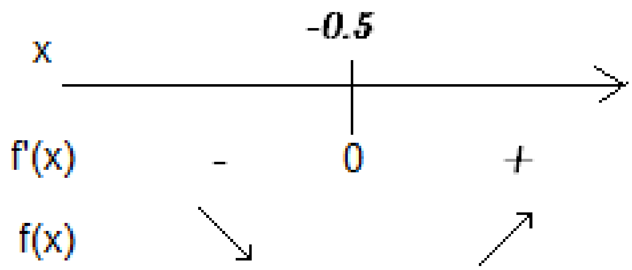
$f'(-3) = -0.00743$

$$D(f)(-3) = -0.00743 \quad \textbf{(15.2.6)}$$

$f'(3) = 1210.286$

$$D(f)(3) = 1210.286 \quad \textbf{(15.2.7)}$$

Som er det ønskede. Nu kan man tegne en monotonilinje.



Så f er aftagende i intervallet $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ hvor f er voksende i intervallet $\left[-\frac{1}{2};\infty\right[$

Opgave 8 Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af længden l (målt i mm) og tørvægten m (målt i mg) for nogle torskelarver.

l	5,1	5,5	6,0	6,2	6,4	6,7	7,2
m	0,14	0,18	0,24	0,27	0,30	0,35	0,45

I en model kan sammenhængen mellem l og m beskrives ved

$$m = b \cdot l^a,$$

hvor a og b er tal.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme tørvægten af en 7,5 mm lang torskelarve, og benyt modellen til at bestemme længden af en torskelarve, som har en tørvægt på 0,60 mg.

Opgave 8 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Da jeg ved det er en potensfunktion, og jeg får så mange punkter, kan jeg vælge at lave en potensregression, så jeg får den præcise forskrift.

$l := [5.1, 5.5, 6, 6.2, 6.4, 6.7, 7.2]$

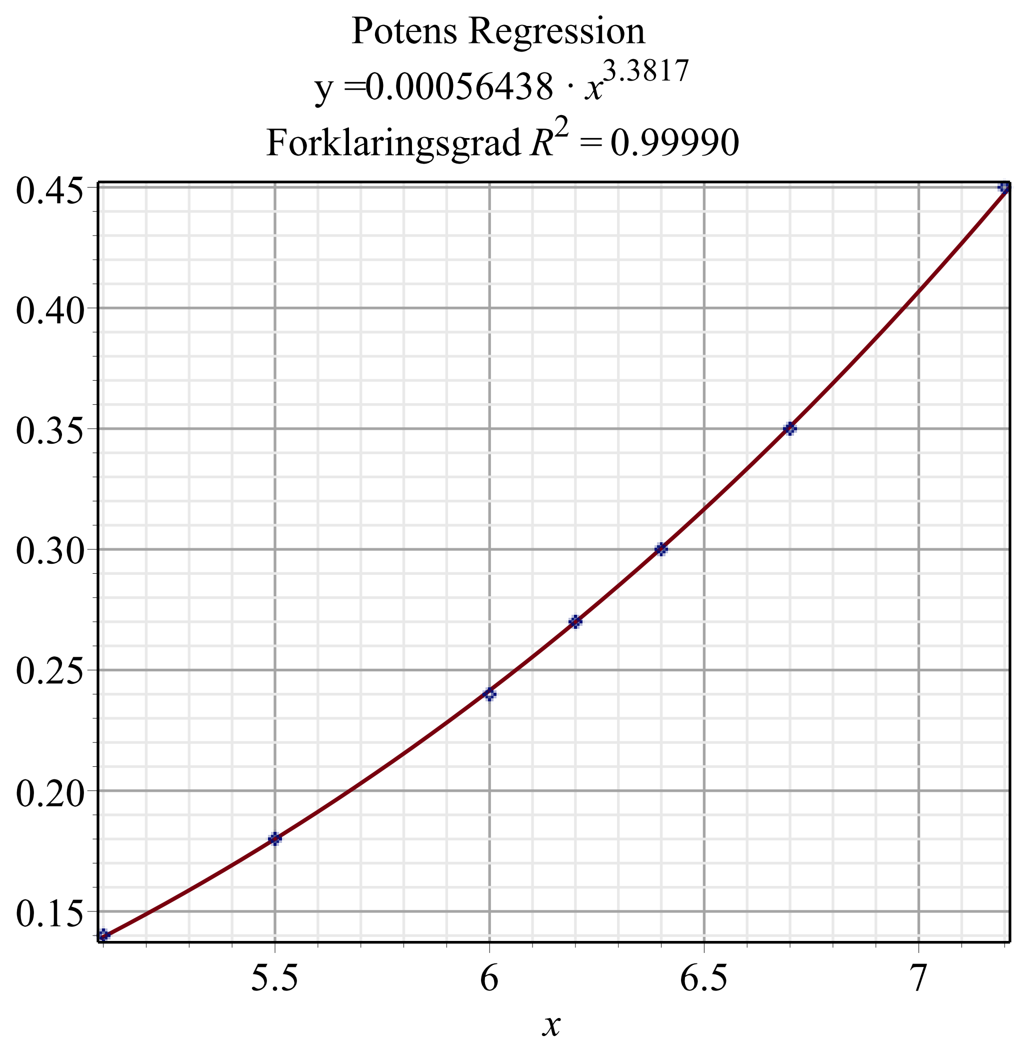
$$[5.1, 5.5, 6, 6.2, 6.4, 6.7, 7.2] \quad \textbf{(16.1.1)}$$

$m := [0.14, 0.18, 0.24, 0.27, 0.3, 0.35, 0.45]$

$$[0.14, 0.18, 0.24, 0.27, 0.3, 0.35, 0.45] \quad \textbf{(16.1.2)}$$

Nu laver jeg en regression.

$PowReg(l, m)$



Som angiver den præcise regneforskrift. Forklaringsgraden R^2 er tæt på 1. Så den passer godt. Jeg angiver forskriften, og her vælger jeg at kalde den for y, idet m allerede er defineret.

$y = 0.00056438 \cdot x^{3.3817}$

$$y = 0.00056438\, x^{3.3817} \qquad \textbf{(16.1.3)}$$

Som er det ønskede.

Delopgave b)

I den her delopgave skal der løses ligninger for hhv. l og m. Tørvægten bestemmes først for en torskelarve på 7.5 mm.

$y = 0.00056438\ (7.5)^{3.3817}$

$$y = 0.5137670996 \qquad \textbf{(16.2.1)}$$

Som er vægten i mg. Nu bestemmes længden af en torskelarve ved en vægt på 0.6mg.

$0.6 = 0.00056438\, x^{3.3817}$

$$0.6 = 0.00056438\, x^{3.3817}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 7.852132513], [x = -2.224256128 + 7.530515898\,\mathrm{I}], [x = -2.224256128 - 7.530515898\,\mathrm{I}]] \qquad \textbf{(16.2.3)}$$

Dog regnes denne opgave inden for de reelle tal, så de komplekse rødder skal ignoreres. Derfor er torskelarven 7.85mm lang med en vægt på 0.6mg.

Opgave 9 I trekant ABC er $|AB| = 5$, $|AC| = 7$ og $\angle A = 114°$.

a) Bestem $|BC|$ og $\angle B$.

b) Bestem højden h_b, og bestem arealet af trekant ABC.

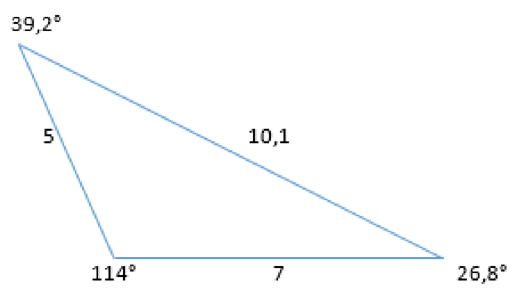
Opgave 9 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Denne opgave kan laves i WordMat. Det gør jeg.

WordMat's trekantsløser anvendes med input: A = 114° , b = 7 , c = 5



A = 114°
B = 39,17734°
C = 26,82266°

|BC|= 10,12282
|AC| = 7
|AB| = 5

Længden af siden a findes vha. en cosinusrelation

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos(A)} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(114°)} = 10{,}12282$$

Vinkel B findes vha. en cosinusrelation

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{|BC|^2 + |AB|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |BC| \cdot |AB|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10{,}12282^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 10{,}12282 \cdot 5}\right) = 39{,}17734°$$

Vinkel C findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$C = 180° - A - B = 180° - 114° - 39{,}17734° = 26{,}82266°$$

Som man kan se, bliver trekanten udregnet ved hjælp af disse formler. Dette er det ønskede.

Delopgave b)

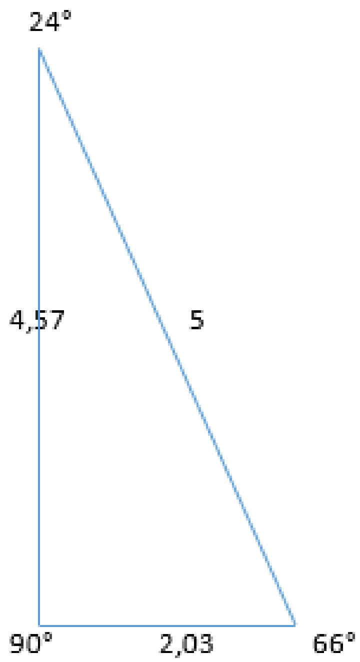
Denne opgave kan laves i WordMat. Det gør jeg. Men det kræver først, at man kender nogle flere oplysninger. Da h betegner højden, og at lille b for højden, må det betyde, at den skal ramme vinkel B. En visualisering kan ses sammen med udregningerne. Da vinkel A kendes, kan man

trække den fra vinkelsummen på 180. Det vil give en spids vinkel.
$180 - 114$

$$66 \tag{17.2.1}$$

Så den nye vinkel A er 66°, som kan bruges i den nye udregning. Den nye trekant vil være retvinklet, hvilket vil give os de informationer, der skal bruges.

WordMat's trekantsløser anvendes med input: H = 90° , A = 66° , h = 5



H = 90°
B = 24°
A = 66°

|AB| = 5
|AH| = 2,033683
|BH| = 4,567727

Vinkel B findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$B = 180° - H - A = 180° - 90° - 66° = 24°$$

Længden af siden b findes vha. cosinus

$$|AH| = |AB| \cdot \cos(A) = 5 \cdot \cos(66) = 2{,}033683$$

Længden af siden a findes vha. sinus

$$|BH| = |AB| \cdot \sin(A) = 5 \cdot \sin(66) = 4{,}567727$$

Arealet af trekanten ABC bestemmes på følgende måde:

$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot \left|BC\right| \cdot |AC| \cdot \sin(C)$. Tallene indsættes i formlen.

$T = \frac{1}{2} \cdot 10.12 \cdot 7 \cdot \sin(26.8)$

$$15.97008249120438$$

Som altså er det ønskede.

Opgave 10 Blandt deltagerne i en undersøgelse var der 531, som ryger mindst 5 cigaretter om dagen. I tabellen nedenfor ses en opgørelse over det daglige cigaretforbrug blandt disse 531 rygere.

Antal cigaretter pr. dag	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
Antal personer	74	119	127	129	32	50

a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn en sumkurve.

b) Bestem kvartilsættet for tabellens data, og bestem, hvor stor en procentdel af rygerne der ryger mindst 21 cigaretter om dagen.

Opgave 10 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Denne opgave kan nemt laves via Maple. Vi definerer vores oplysninger. Vi regner de kumulerede frekvenser først, men det kræver vi definerer vores oplysninger. Derfor indsætter vi oplysningerne i matrix.

$$M := \begin{bmatrix} 5..10 & 74 \\ 10..15 & 119 \\ 15..20 & 127 \\ 20..25 & 129 \\ 25..30 & 32 \\ 30..35 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5..10 & 74 \\ 10..15 & 119 \\ 15..20 & 127 \\ 20..25 & 129 \\ 25..30 & 32 \\ 30..35 & 50 \end{bmatrix} \quad \textbf{(18.1.1)}$$

Som er vores informationer. Vi ønsker at finde de kumuleret frekvenser, men først findes selve frekvenserne

frekvens(*M*)

$$\begin{bmatrix} 5..10 & 0.139 \\ 10..15 & 0.224 \\ 15..20 & 0.239 \\ 20..25 & 0.243 \\ 25..30 & 0.0603 \\ 30..35 & 0.0942 \end{bmatrix} \tag{18.1.2}$$

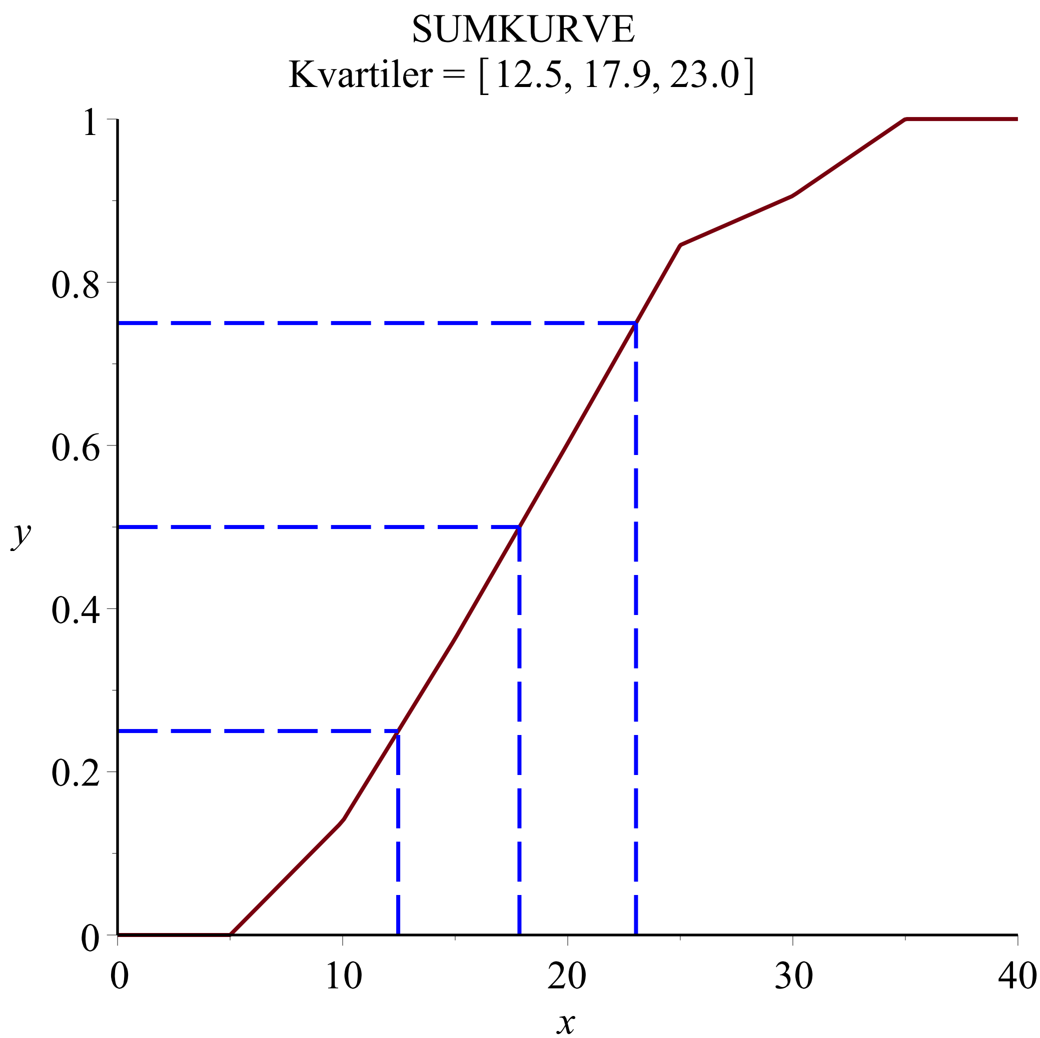
Her har vi frekvenserne over vores oplysninger. Tallene er ikke omregnet til procent. Opgaven ønsker, at vi finder de kumuleret frekvenser, så følgende metode anvendes:

$kumuleretFrekvens(M)$

$$\begin{bmatrix} 5..10 & 0.139 \\ 10..15 & 0.363 \\ 15..20 & 0.603 \\ 20..25 & 0.846 \\ 25..30 & 0.906 \\ 30..35 & 1. \end{bmatrix} \tag{18.1.3}$$

Hermed har vi vores kumuleret frekvenser. Endvidere ønsker opgaven en sumkurve, dette udføres på følgende måde. Bemærk, at Maple ikke omregner til procent.
Vi tegner en sumkurve.

$plotSumkurve(M)$



Her kan man se, at man får angivet kvartilsættet udover selve sumkurven.

Delopgave b)

Sumkurven gav også kvartilsættet, derved kan vi definere vores sumkurve.

$m(x) := sumkurve(M, x)$:
$m(21)$

$$0.651224105461394 \tag{18.2.1}$$

Så dvs. at personer der ryger mindst 21 cigaretter pr. dag er ca. 35 % idet 100 % − 65 % = 35 %.

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}.$$

Grafen for f, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x=1$ og $x=4$ afgrænser et område M, der har et areal. Når området M drejes 360° om førsteaksen, fremkommer et omdrejningslegeme.

a) Bestem rumfanget af dette omdrejningslegeme.

Opgave 11 løsning:

restart
with(*Gym*) :

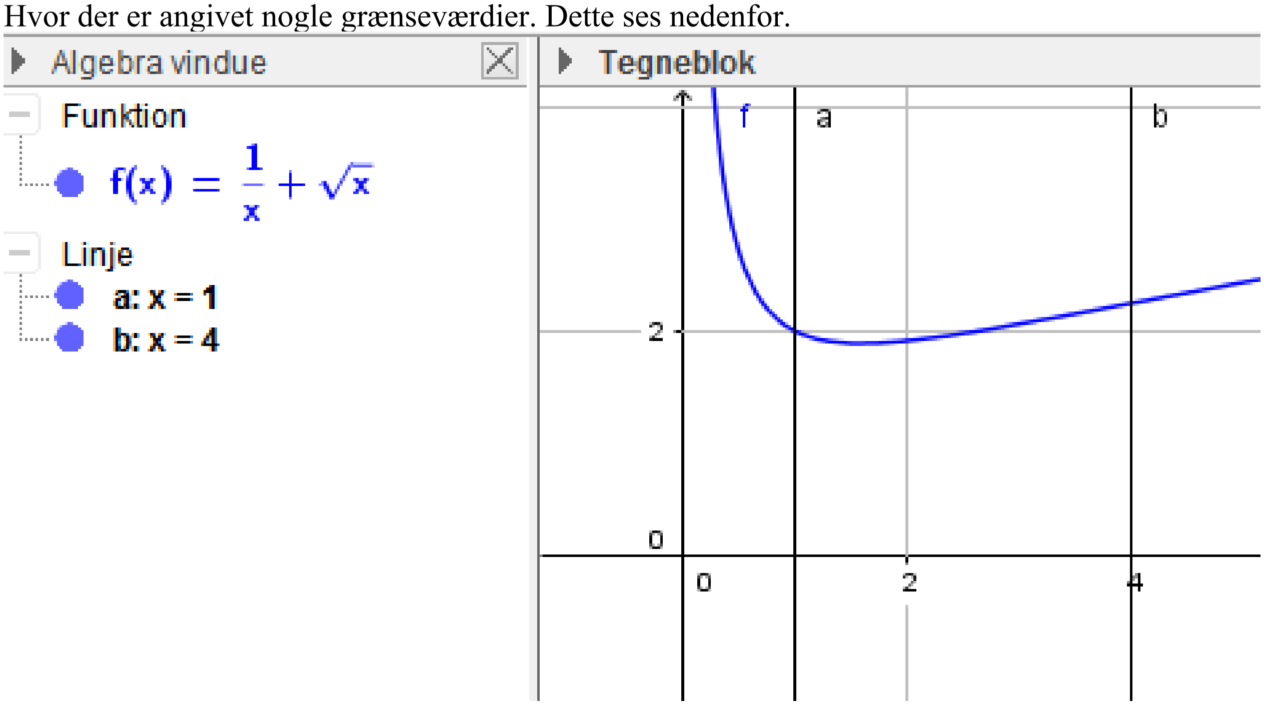
Delopgave a)

Denne opgave handler om omdrejningslegemer. Funktionen er angivet:

$f(x) := \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

$$x \rightarrow \frac{1}{x} + \sqrt{x} \qquad \textbf{(19.1.1)}$$

Hvor der er angivet nogle grænseværdier. Dette ses nedenfor.



Da man ønsker at finde rumfanget efter f er drejet 360° rundt om første aksen, gøres det på følgende måde:

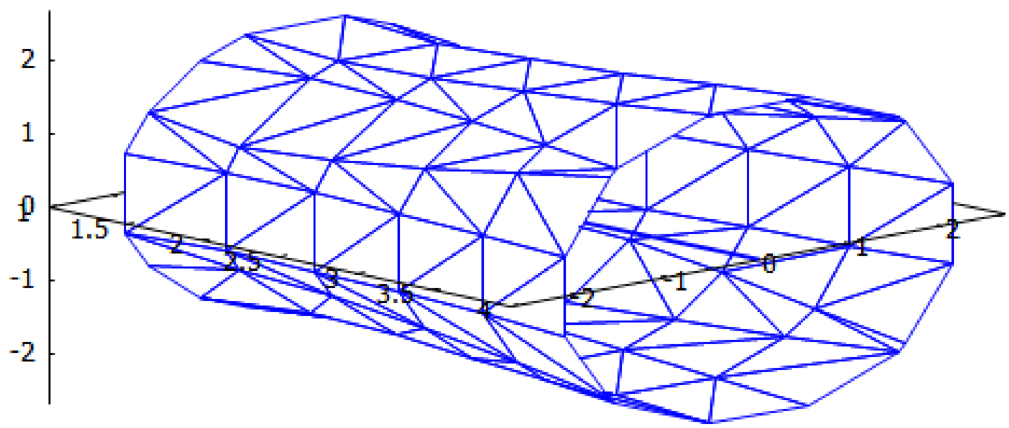
$$V=\pi\cdot\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$V = \frac{49}{4}\pi \tag{19.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$V = 38.485 \tag{19.1.3}$$

Som er det ønskede. Visualiseringen i 3D kan ses nedenfor.



Som angiver $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ indenfor grænserne $x = 1$ og $x = 4$.

Opgave 12 I en model for udviklingen af antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antallet af individer til tiden t (målt i døgn). I modellen antages det, at N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00013 \cdot N \cdot (1000 - N),$$

og at der er 50 individer i populationen til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 0$, og bestem antallet af individer til hvert af de tidspunkter, hvor væksthastigheden er 31 individer pr. døgn.

Opgave 12 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Denne opgave handler om differentialligninger. Når $t = 0$ vil der være 50 individer.

$N := 50$

$$50 \tag{20.1.1}$$

$\frac{dN}{dt} = 0.00013 \cdot N \cdot (1000 - N)$

$$\frac{dN}{dt} = 6.17500 \tag{20.1.2}$$

Som er det antal individer når $t = 0$.

restart

$31 = 0.00013 \cdot N \cdot (1000 - N)$

$$31 = 0.00013\, N\, (1000 - N) \tag{20.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for N}}$

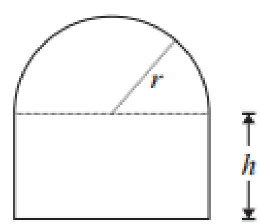
$$[[N = 607.4172311], [N = 392.5827689]] \tag{20.1.4}$$

Dvs. når væksthastigheden er på 31, skal antallet af individer være på 392 eller 607.

Opgave 13 Et blomsterbed har form som et rektangel sammensat med en halvcirkel (se figuren).

a) Opstil et udtryk for blomsterbedets omkreds udtrykt ved h og r.

b) Bestem blomsterbedets areal udtrykt ved r, når blomsterbedets omkreds er 16.



Opgave 13 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi aflæser opgaven og opstiller udtrykket ud fra formlerne omkring cirkler og rektangler.
Vi opstiller udtrykket.

$\text{O} = \frac{1}{2} \cdot 2\, \pi \cdot r + 2\, h + 2\, r$

$$O=\pi r+2h+2r \tag{21.1.1}$$

Som gælder for blomsterbedet.

Delopgave b)

Her får vi afvide, at omkredsen af blomsterbedet er 16 og at arealet ønskes. Vi opstiller en model.

$16=\pi r+2h+2r$

$$16=\pi r+2h+2r$$

$\xrightarrow{\text{solve for h}}$

$$\left[\left[h=-\frac{1}{2}\pi r-r+8\right]\right] \tag{21.2.2}$$

Arealformlen:

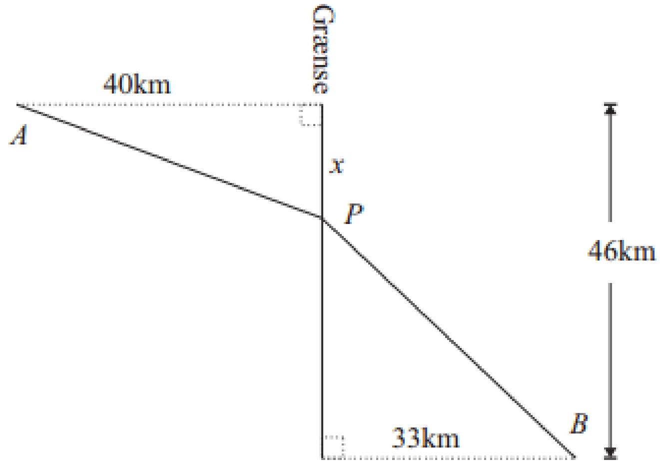
$\left(-\frac{1}{2}\pi r-r+8\right)\cdot 2r+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$

$$2\left(-\frac{1}{2}\pi r-r+8\right)r+\frac{1}{2}\pi r^2$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$\left[[r=0],\left[r=\frac{32}{\pi+4}\right]\right] \tag{21.2.4}$$

Opgave 14



Mellem to punkter A og B i to forskellige lande skal der etableres en vej APB som vist på figuren. Prisen for stykket AP er 50 mio. kr. pr. km, og prisen for stykket PB er 60 mio. kr. pr. km.

a) Bestem $|AP|$ og $|PB|$ udtrykt ved x, idet $0 \le x \le 46$ (se figuren).

b) Bestem prisen for vejen udtrykt ved x, og bestem den værdi af x, der gør vejen APB billigst mulig.

Opgave 14 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Geometri + optimering

$AP := \sqrt{40^2 + x^2}$

$$\sqrt{x^2 + 1600} \quad \textbf{(22.1.1)}$$

$BP := \sqrt{33^2 + (46 - x)^2}$

$$\sqrt{1089 + (46 - x)^2} \quad \textbf{(22.1.2)}$$

Delopgave b)

$f(x) := 50 \cdot AP + 60 \cdot BP$

$$f(x) = 50\sqrt{x^2 + 1600} + 60\sqrt{1089 + (46 - x)^2} \quad \textbf{(22.2.1)}$$

$f(x) := 50\sqrt{x^2 + 1600} + 60\sqrt{1089 + (46 - x)^2}$

$$x \rightarrow 50\sqrt{x^2 + 1600} + 60\sqrt{1089 + (46 - x)^2} \quad \textbf{(22.2.2)}$$

$f'(x)$

$$\frac{50\,x}{\sqrt{x^2+1600}}+\frac{30\,(2\,x-92)}{\sqrt{1089+(46-x)^2}} \quad \textbf{(22.2.3)}$$

Sådan ser funktionen ud når den er differentieret. Nu ønsker vi at finde x.

$$\frac{50\,x}{\sqrt{x^2+1600}}+\frac{30\,(2\,x-92)}{\sqrt{1089+(46-x)^2}}=0$$

$$\frac{50\,x}{\sqrt{x^2+1600}}+\frac{30\,(2\,x-92)}{\sqrt{1089+(46-x)^2}}=0 \quad \textbf{(22.2.4)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$28.03024865 \quad \textbf{(22.2.5)}$$

Som altså må være den billigste metode for at anlægge vej.

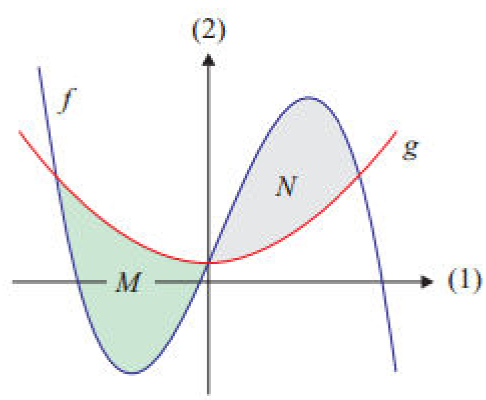
Opgave 15 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$$
$$g(x) = x^2 + 3,$$

hvor k er et positivt tal.

Graferne for f og g afgrænser for $x \leq 0$ et område M, der har et areal, og for $x \geq 0$ et andet område N, der har et areal.

a) Gør rede for, at de to områder M og N har samme areal for alle værdier af k.



Opgave 15 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

I den her opgave skal man finde ud af, om M og N har samme areal. Jeg definerer følgende funktioner.

$f(x) := -x^3 + x^2 + k \cdot x + 3$

$$x \rightarrow -x^3 + x^2 + k\,x + 3 \quad \textbf{(23.1.1)}$$

$g(x) := x^2 + 3$

$$x \rightarrow x^2 + 3 \quad \textbf{(23.1.2)}$$

$f(x) = g(x)$

$$-x^3 + kx + x^2 + 3 = x^2 + 3 \quad \textbf{(23.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = \sqrt{k}], [x = -\sqrt{k}]] \quad \textbf{(23.1.4)}$$

$$\int_0^{k^{\frac{1}{2}}} f(x) - g(x)\, dx$$

$$\frac{1}{4} k^2 \quad \textbf{(23.1.5)}$$

$$\int_{k^{\frac{1}{2}}}^{0} g(x) - f(x)\, dx$$

$$\frac{1}{4} k^2 \quad \textbf{(23.1.6)}$$

Dvs. arealerne passer for alle positive tal.

Opgave 16 Et vandbad opvarmes fra 20°C til 100°C. Den indre temperatur (målt i °C) i et bestemt objekt, der befinder sig i vandbadet under opvarmningen, er en funktion f af tiden t (målt i sekunder). Det oplyses at f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}03 \cdot (g(t) - y),$$

hvor $g(t)$ er vandbadets temperatur til tiden t. Endvidere oplyses det, at til tidspunktet $t = 0$ er objektets indre temperatur 10°C, og at

$$g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t, \quad 0 \le t \le 320.$$

a) Bestem objektets indre temperatur, når vandbadets temperatur bliver 100°C.

Opgave 16 løsning:

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Vi definerer $g(x)$.

$g(t) := 20 + 0.25 \cdot t$

$$t \rightarrow 20 + 0.25\, t \quad \textbf{(24.1.1)}$$

Vi løser ligningen

$dsolve([y(0) = 10, y'(t) = 0.03 \cdot (g(t) - y(t))])$

$$y(t) = \frac{1}{4}\,t + \frac{35}{3} - \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{100}\,t} \qquad \textbf{(24.1.2)}$$

$y(t) := \frac{1}{4}\,t + \frac{35}{3} - \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{100}\,t}$

$$t \rightarrow \frac{1}{4}\,t + \frac{35}{3} - \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{100}\,t} \qquad \textbf{(24.1.3)}$$

$100 = g(t)$

$$100 = 20 + 0.25\,t$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 320.]] \qquad \textbf{(24.1.5)}$$

Dette tal indsættes i diff. ligningen.

$y(320.)$

$$91.66655379 \qquad \textbf{(24.1.6)}$$

Så når vandet er 100 grader, vil objektet være 91.66 grader efter 320 sekunder.

Matematik A-niveau STX
Maj 2010

Opgave 7 I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

a) Bestem for $t = 4$ vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem de værdier af t, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Opgave 7 løsning:

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Først definerer jeg oplysningerne.

$\vec{a} := \langle t-1, 2\rangle$

$$\begin{bmatrix} t-1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{25.1.1}$$

$\vec{b} := \langle 3, t\rangle$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ t \end{bmatrix} \tag{25.1.2}$$

$t := 4$

$$4 \tag{25.1.3}$$

Vinklen skal bestemmes. Jeg kalder vinklen for v.

$$v = invCos\left(\frac{((4-1)\cdot 3)+(2\cdot 4)}{\sqrt{(4-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}\right)$$

$$v = 19.44003487 \tag{25.1.4}$$

Så vinklen v mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 19.44003487°.

Delopgave b)

Nu skal vi finde værdierne for t når $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Det gøres på følgene måde:

$det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Hvor

$((t-1)\cdot t)-(2\cdot 3)=0$

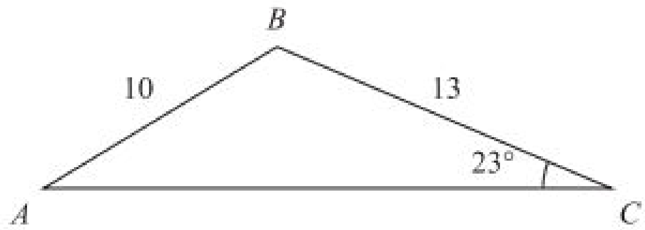
$$(t-1)\,t-6=0 \tag{25.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=3], [t=-2]] \tag{25.2.2}$$

Som er det ønskede.

Opgave 8



I trekant ABC er $a = 13$, $c = 10$ og $\angle C = 23°$. Det oplyses, at $\angle A$ er spids.

a) Bestem $\angle A$.

b) Bestem b.

Opgave 8 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a & b)

Vi ønsker at regne en trigonometriopgave. Vi skal finde vinkel A og længden b. Dette gøres ved følgende command: *trekantsolve* hvor man så indsætter sine oplysninger fra figuren.

$trekantsolve(a = 13, c = 10, C = 23)$

$$\{A = 30.52740764, B = 126.4725923, b = 20.58042588\}, \{A = 149.4725923, B = 7.5274076, b = 3.352700299\} \quad \textbf{(26.1.1)}$$

Her kan vi se, at der er to løsninger, dvs. at der findes to trekanter. Mén vinkel A skal være spids.

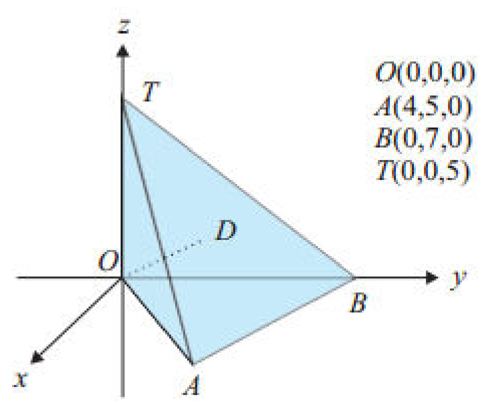
Her bliver vinkel A og længden b fundet. Derved er det ønskede opfyldt.

Opgave 9 På figuren ses en glasbygning indlagt i et koordinatsystem. Glasbygningen har hjørnerne O, A, B og T (se figuren).

a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder sidefladen ABT.

En metalstang skal gå fra O til et punkt D på sidefladen ABT, således at metalstangen står vinkelret på sidefladen ABT.

b) Bestem koordinatsættet til punktet D.



Opgave 9 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Jeg bestemmer en ligning for α. Men først defineres alle punkterne. Bemærk, at O er fra det Kyrilliske alfabet

$О := \langle 0, 0, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{A} := \langle 4, 5, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.1.2)}$$

$\vec{B} := \langle 0, 7, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.1.3)}$$

$\vec{T} := \langle 0, 0, 5\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.1.4)}$$

Nu kan planen bestemmes.

$\vec{B} - \vec{A}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.1.5)}$$

$\vec{T} - \vec{A}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.1.6)}$$

$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27.1.7)$$

$\overrightarrow{AT} := \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (27.1.8)$$

$linalg[crossprod](\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT})$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 28 \end{bmatrix} \quad (27.1.9)$$

Planens ligning: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (27.1.10)$$

$\alpha = 10(x - 4) + 20(y - 5) + 28(z - 0)$

$$\alpha = 10\,x - 140 + 20\,y + 28\,z \quad (27.1.11)$$

Dvs. at ligningen for planen α der udspændes af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AT}$ og indeholder punktet $\overrightarrow{AT}$(-4,-5,5) er:
$10\,x - 140 + 20\,y + 28\,z$

Delopgave b)

Her defineres en parameterfremstilling fra $\vec{\mathrm{O}}$ til $\vec{\mathrm{D}}$. Jeg kalder den for *l*.

$l := \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle + t\cdot\langle 10, 20, 28\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,t \\ 20\,t \\ 28\,t \end{bmatrix} \quad (27.2.1)$$

Den sættes ind i planens ligning.

$10(10\,t - 4) + 20(20\,t - 5) + 28(28\,t - 0) = 0$

$$1284\,t - 140 = 0 \quad (27.2.2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = \frac{35}{321}\right]\right] \quad (27.2.3)$$

Tallet sættes ind i parameterfremstillingen.

$t := \frac{35}{321}$

$$\frac{35}{321} \quad (27.2.4)$$

$l := \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle + t\cdot\langle 10, 20, 28\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{350}{321} \\ \frac{700}{321} \\ \frac{980}{321} \end{bmatrix} \quad \textbf{(27.2.5)}$$

Som er koordinatsættet til $\vec{D}$.

Opgave 10 For fødsler i anden halvdel af 2006 viser nedenstående tabel fordelingen af mødrenes alder på fødselstidspunktet.

Mors alder på fødselstidspunktet	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
Procentdel	1,4	9,8	32,2	38,2	15,6	2,7	0,1

a) Tegn sumkurven, og bestem den procentdel af mødrene, som på fødselstidspunktet var mindst 37 år.

Opgave 10 løsning:

restart
with(*Gym*) :

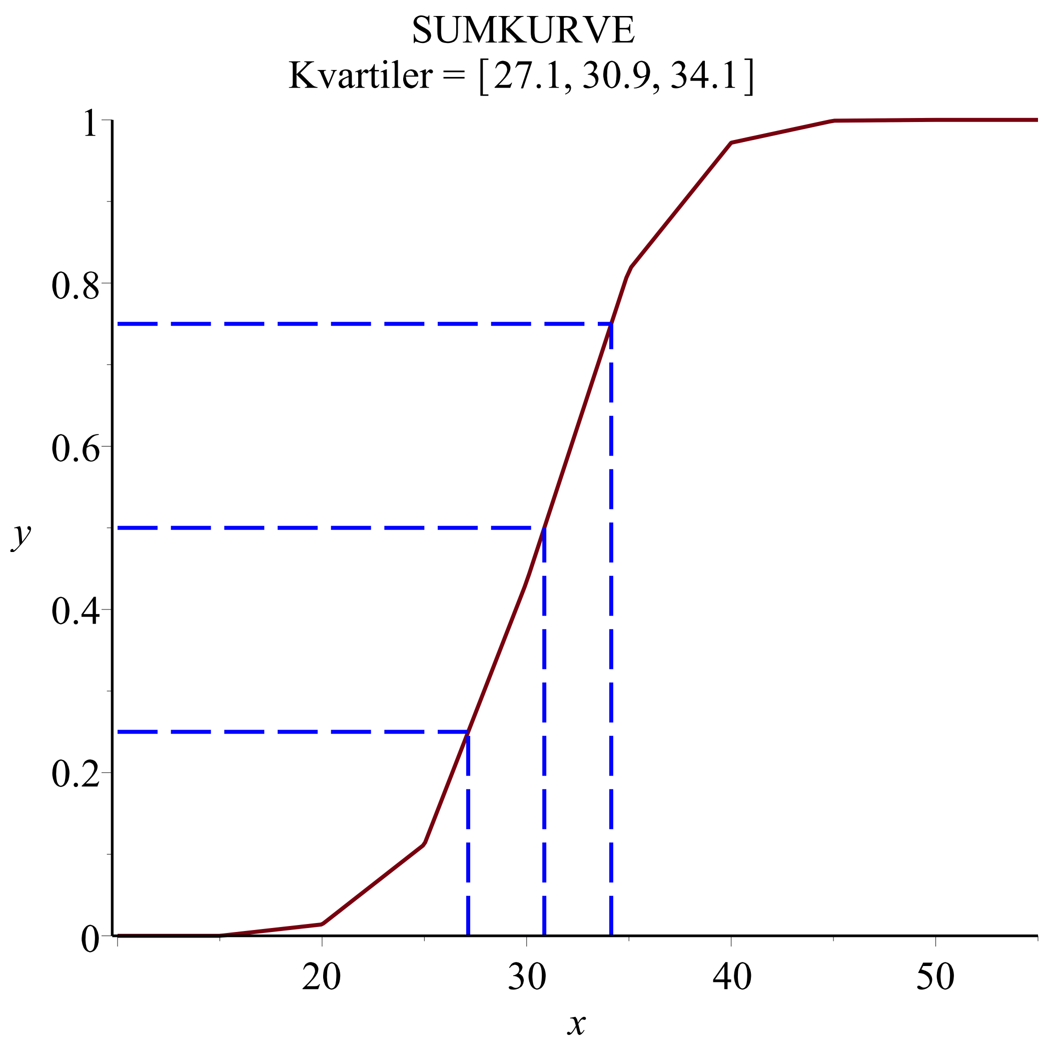
Delopgave a)

For at tegne en sumkurve og bestemme kvartilsættet, så defineres først en matrix med de givne informationer:

$$M := \begin{bmatrix} 15..20 & 1.4 \\ 20..25 & 9.8 \\ 25..30 & 32.2 \\ 30..35 & 38.2 \\ 35..40 & 15.6 \\ 40..45 & 2.7 \\ 45..50 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15..20 & 1.4 \\ 20..25 & 9.8 \\ 25..30 & 32.2 \\ 30..35 & 38.2 \\ 35..40 & 15.6 \\ 40..45 & 2.7 \\ 45..50 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(28.1.1)}$$

Nu kan sumkurven tegnes vha. følgende kommando:
$plotSumkurve(M)$



Maple giver sammen med sumkurven også kvartilsættene, dvs. at
Nedre kvartil: 27.1
Median: 30.9
Øvre kvartil: 34.1

Vi skal finde ud af, hvor mange procent af kvinderne der føder et barn, når de er 37 år gamle. Vi definerer en funktion af sumkurven.
$m(x) := sumkurve(M, x)$:

$m(37)$

$$0.878400000000000 \qquad (28.1.2)$$

I følge sumkurven vil der være ca. 13% kvinder, der vil føde et barn når de er 37 år gamle. Fordi $100\ \% - 87\ \% = 13\ \%$.

Som er det ønskede.

Opgave 11 Sammenhængen mellem maksimal relativ væksthastighed V (målt i døgn^{-1}) og kropsmasse M (målt i gram) for flercellede vekselvarme dyr er givet ved

$$\log V = -1{,}64 - 0{,}27 \log M .$$

a) Bestem V, når $M = 3000$.

b) Bestem V som funktion af M.

Opgave 11 løsning:

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Her skal man løse ligninger for at finde de ubekendte samt lave en funktion.

$\log(V) = -1.64 - 0.27 \cdot \log(M)$

$$\ln(V) = -1.64 - 0.27 \ln(M) \qquad (29.1.1)$$

Delopgave A

Her bestemmes V, når M er 3000.

$\log_{10}(V) = -1.64 - 0.27 \cdot \log_{10}(3000)$

$$\frac{\ln(V)}{\ln(10)} = -1.64 - \frac{0.27 \ln(3000)}{\ln(10)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for V}}$

$$[[V = 0.002637407648]] \qquad (29.1.3)$$

Som er 0.002637407648^{-1} døgn.

Delopgave b)

Her bestemmes V, som funktion af M.

$\log_{10}(V) = -1.64 - 0.27 \cdot \log_{10}(M)$

$$\frac{\ln(V)}{\ln(10)} = -1.64 - \frac{0.27\ln(M)}{\ln(10)} \quad \textbf{(29.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for V}}$

$$[[V = e^{-0.2700000000\ln(M) - 3.776239553}]] \quad \textbf{(29.2.2)}$$

Som er funktionen.

Opgave 12 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{x-0,8x^2}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 12 løsning:

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Her har vi med en tangentligning at gøre. Dvs. vi skal finde en.

$f(x) := e^{x-0.8x^2}$

$$x \rightarrow e^{x + (-1)\cdot 0.8x^2} \quad \textbf{(30.1.1)}$$

Den differentieres.

$f'(x)$

$$e^{x-0.8x^2}(1-1.6x)\ln(e) \quad \textbf{(30.1.2)}$$

Sådan ser den ud. Nu indsættes 1, idet $P(1, f(1))$

$f(1)$

$$e^{0.2} \quad \textbf{(30.1.3)}$$

$f'(1)$

$$-0.6\,e^{0.2}\ln(e) \quad \textbf{(30.1.4)}$$

$y = -0.6\,e^{0.2}\ln(e)\cdot(x-1) + e^{0.2}$

$$y = -0.6\,e^{0.2}\ln(e)\,(x-1) + e^{0.2} \quad \textbf{(30.1.5)}$$

Omskrives til

$y = -0.732\,x + 1.9534$

$$y = -0.732\,x + 1.9534 \qquad \textbf{(30.1.6)}$$

Hvilket er tangentligningen.

Delopgave b)

Her er den afledte funktion allerede fundet. Den sættes lig med 0.

$e^{x-0.8x^2}(1 - 1.6x)\ln(e) = 0$

$$e^{x-0.8x^2}(1 - 1.6x)\ln(e) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 0.6250000000]] \qquad \textbf{(30.2.2)}$$

Derved kan man vælge nogle tal, der er hhv. større og mindre end 0.625. Jeg vælger -2 og 2.

$f'(-2)$

$$\frac{4.2\ln(e)}{e^{5.2}} \qquad \textbf{(30.2.3)}$$

$f'(2)$

$$-\frac{2.2\ln(e)}{e^{1.2}} \qquad \textbf{(30.2.4)}$$

Disse tal omskrives via web2.0calc.

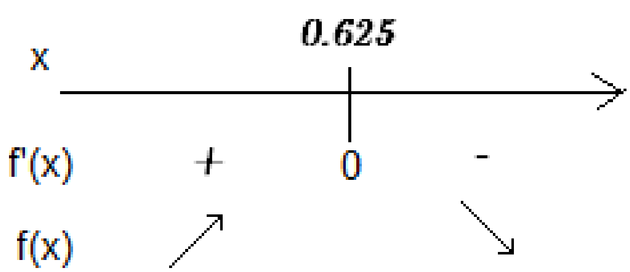
$f'(-2) = 0.0231695705671952$

$$\frac{4.2\ln(e)}{e^{5.2}} = 0.0231695705671952 \qquad \textbf{(30.2.5)}$$

$f(2) = -0.6626272662068447$

$$\frac{1}{e^{1.2}} = -0.6626272662068447 \qquad \textbf{(30.2.6)}$$

Nu tegnes monotonilinjen.



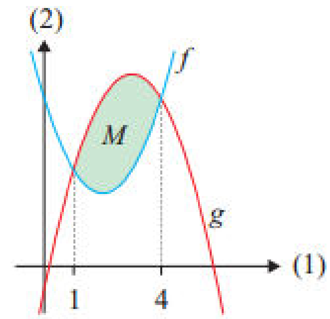
Som indikerer om hvornår funktionen enten er voksende eller aftagende. Dvs. at f er voksende i intervallet $]-\infty; 0.625]$ hvor f er aftagende i intervallet $[0.625; \infty[$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 13 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$
$$g(x) = -x^2 + 6x - 1.$$

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.



a) Bestem arealet af M.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 13 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Her skal man finde et areal M samt lave et omdrejningslegeme. Jeg definerer følgende:

$f(x) := x^2 - 4x + 7$

$$x \rightarrow x^2 - 4x + 7 \qquad \textbf{(31.1.1)}$$

$g(x) := -x^2 + 6x - 1$

$$x \rightarrow -x^2 + 6x - 1 \qquad \textbf{(31.1.2)}$$

Jeg finder arealet M.

$\int_1^4 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$

$$9 \qquad \textbf{(31.1.3)}$$

Som er arealet af M.

Delopgave b)

Her skal vi finde rumfanget. Jeg kalder rumfanget for V.

$V = \pi\left(\int_1^4 g(x)^2\,\mathrm{d}x\right) - \pi\left(\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)$

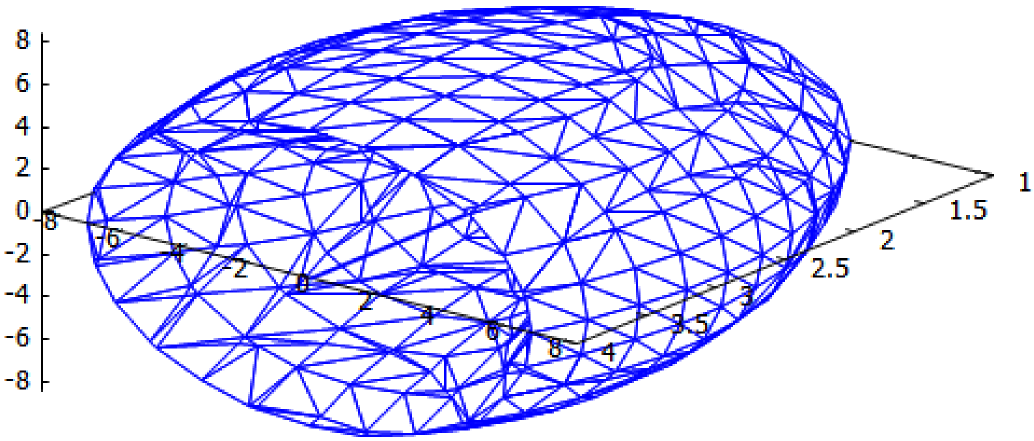
$$V = \pi\left(\frac{753}{5}\right) - \pi\left(\frac{258}{5}\right) \qquad \textbf{(31.2.1)}$$

Omregnes via [web2.0calc]

$V = 311.0176727053895306$

$$V = 311.0176727053895306 \quad \textbf{(31.2.2)}$$

Hvilket kan visualiseres.



Som er det ønskede.

Opgave 14 Tabellen viser sammenhørende værdier af to størrelser x og y.

x	0	56	112	224	448	896
y	1,91	1,36	0,94	0,47	0,17	0,01

Det oplyses, at sammenhængen mellem x og y med god tilnærmelse kan beskrives ved

$$y = g(x),$$

hvor $g(x) = b \cdot a^x$.

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

I en model for dyrkning af en afgrøde på en mark antages, at

$$U(x) = \frac{15{,}5}{1+g(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1500,$$

hvor $U(x)$ er tørstofudbyttet (målt i ton), når der tilføres x kg kunstgødning.

b) Skitsér grafen for U, og giv en fortolkning af tallet 15,5.

Opgave 14 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Den her del vælger jeg at lave som en regression for eksponentielle funktioner.

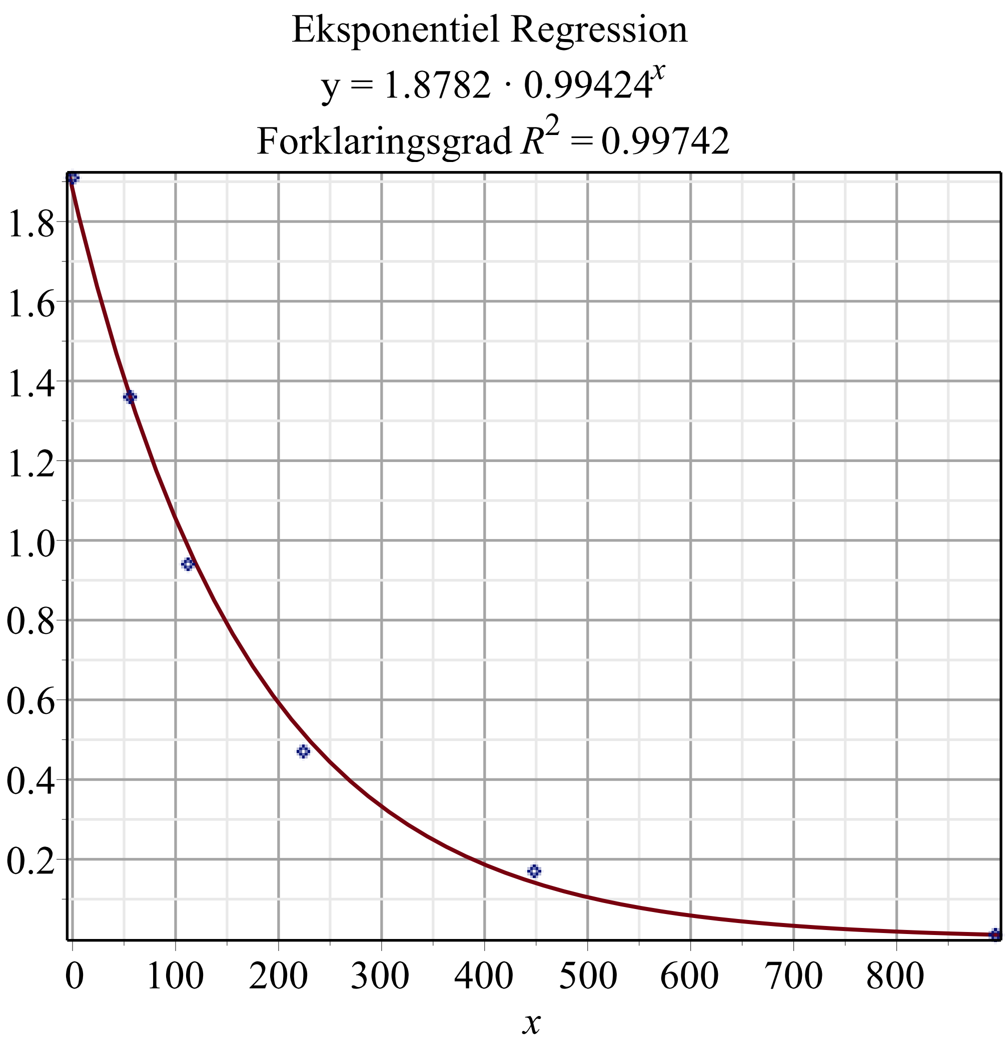
$x := [0, 56, 112, 224, 448, 896]$

$$[0, 56, 112, 224, 448, 896] \quad \textbf{(32.1.1)}$$

$y := [1.91, 1.36, 0.94, 0.47, 0.17, 0.01]$

$$[1.91, 1.36, 0.94, 0.47, 0.17, 0.01] \quad \textbf{(32.1.2)}$$

ExpReg(x, y)



Jeg får følgende funktion:

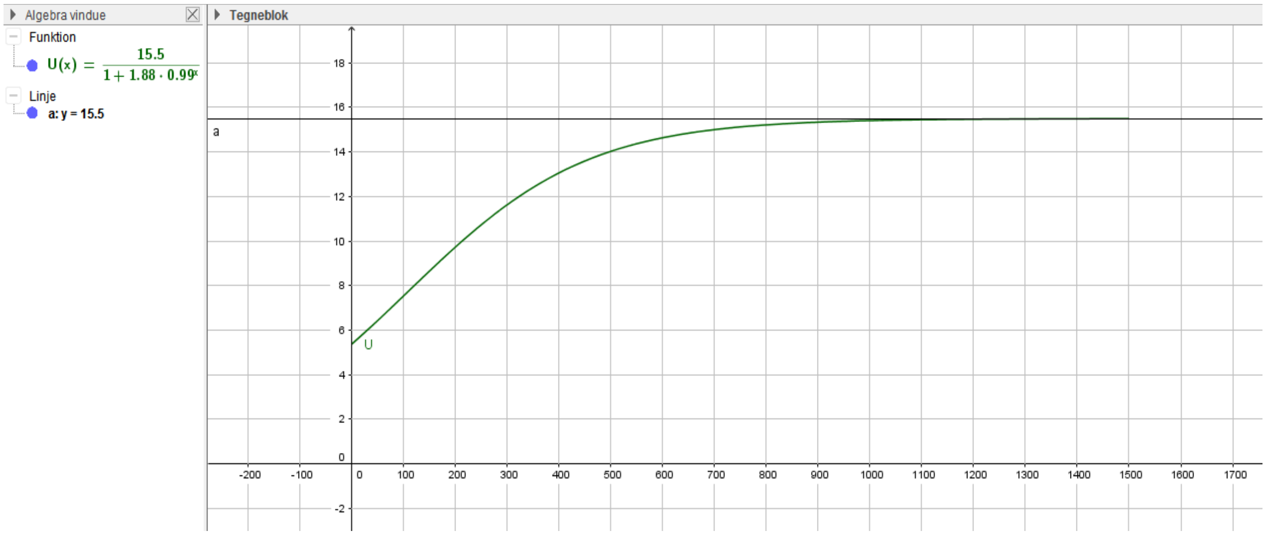
$g(x) := 1.8782 \cdot 0.99424^x$

$$x \rightarrow 1.8782\ 0.99424^x \qquad \textbf{(32.1.3)}$$

Delopgave b)

$U(x) = \dfrac{15.5}{1 + g(x)}$

$$U(x) = \frac{15.5}{1 + 1.8782\ 0.99424^x} \qquad \textbf{(32.2.1)}$$



Grafen lavet i GeoGebra. Hvor $0 \leq x \leq 1500$

Tallet 15.5 fortæller, at $U(x)$ har den maksimale øvre grænse på 15,5 tons tørstofudbytte.

Opgave 15 I en model for udviklingen af befolkningstallet i Mexico efter 2007 antages det, at den årlige vækstrate r er en funktion af tiden t (målt i antal år efter 2007), som tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dr}{dt} = -0{,}025r\,,$$

og at $r(0) = 0{,}017$.

a) Bestem r som funktion af t.

Endvidere antages det, at befolkningstallet $N(t)$ (målt i mio.) som funktion af tiden t (målt i antal år efter 2007) tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = r(t) \cdot N\,,$$

og at $N(0) = 106{,}5$.

b) Bestem N som funktion af t, og benyt N til at bestemme, hvor mange år der går fra 2007, til befolkningstallet når op på 200 mio.

Opgave 15 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi løser ligningen

$dsolve([r(0)=0.017, r'(t)=-0.025\, r(t)])$

$$r(t) = \frac{17}{1000}\, e^{-\frac{1}{40} t}$$

$r(t) := 0.017000\, e^{-0.025000\, t}$

$$t \rightarrow 0.017000\, e^{(-1)\cdot 0.025000\, t} \qquad \textbf{(33.1.2)}$$

Som er funktionen.

Delopgave b)

$dsolve([N(0)=106.5, N'(t)=r(t)\cdot N(t)])$

$$N(t) = \frac{213}{2}\, \frac{e^{-\frac{17}{25} e^{-\frac{1}{40} t}}}{e^{-\frac{17}{25}}}$$

$N := \frac{213}{2}\, \frac{e^{-\frac{17}{25} e^{-\frac{1}{40} t}}}{e^{-\frac{17}{25}}}$

$$\frac{213}{2}\, \frac{e^{-\frac{17}{25} e^{-\frac{1}{40} t}}}{e^{-\frac{17}{25}}} \qquad \textbf{(33.2.2)}$$

$N(t) = 200$

$$\frac{213}{2}\, \frac{e^{-\frac{17}{25} e^{-\frac{1}{40} t}}(t)}{e^{-\frac{17}{25}}} = 200 \qquad \textbf{(33.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

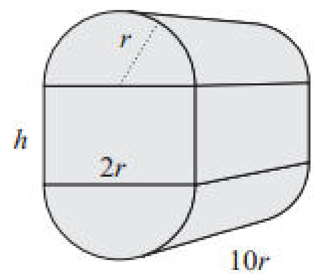
$$104.5409351 \qquad \textbf{(33.2.4)}$$

2007 var altså begyndelsesåret, så i løbet af år 2111 vil befolkningstallet være på 200 mio. Fordi $2007 + 104.540$

$$2111.540 \qquad \textbf{(33.2.5)}$$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 16 En postkasse har form som vist på figuren, hvor hver af postkassens endeflader er sammensat af et rektangel og to halvcirkler. Disse halvcirkler har radius r, mens rektanglets sider er $2r$ og h. Desuden er postkassens bredde $10r$.



a) Bestem postkassens overfladeareal udtrykt ved r og h.

For en bestemt type postkasse med denne form er postkassens rumfang V som funktion af r bestemt ved

$$V(r) = \frac{25r(500 - \pi r^2)}{3}, \qquad 0 < r < 12.$$

b) Bestem r, så en postkasse af denne type har størst muligt rumfang.

Opgave 16 løsning:

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Ud fra oplysningerne, skal man bruge følgende formler:
Cirkler

$A = \pi \cdot r^2$

$$A = \pi r^2 \qquad \textbf{(34.1.1)}$$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$$O = 2 \pi r h \qquad \textbf{(34.1.2)}$$

Rektangel

$V = l \cdot b \cdot h$

$$V = l\, b\, h \qquad \textbf{(34.1.3)}$$

Hvis man ser på figuren, kan man starte med cirklen. Den kan man slå sammen, dvs. toppen og bunden.
Der vil være overflader, som regnes på følgende måde:
$A = 2(\pi \cdot r^2)$

$$A = 2\,\pi\,r^2 \tag{34.1.4}$$

Fordi der er to flader.

Nu kigges der på resten af cylinderen. Længden må være den samme som rektanglen.

$O = 2\cdot\pi\cdot r\cdot 10\,r$

$$O = 20\,\pi\,r^2 \tag{34.1.5}$$

Nu lægges de sammen. Jeg kalder cirklen for C.

$C = 2\,\pi\,r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot(10\cdot r)$

$$C = 22\,\pi\,r^2 \tag{34.1.6}$$

Nu kigges der på rektanglen.

$V = 2(10\,r\cdot h)$

$$V = 20\,r\,h \tag{34.1.7}$$

$V = 2(2\,r\cdot h)$

$$V = 4\,r\,h \tag{34.1.8}$$

Den lægges sammen med C.

$f(x) = 22\,\pi\,r^2 + (20\,rh + 4\,rh)$

$$f(x) = 22\,\pi\,r^2 + 24\,rh \tag{34.1.9}$$

Som er den ønskede funktion.

Delopgave b)

Funktionen skal differentieres. Jeg omdøber r til x.

$V := x \rightarrow \dfrac{25\cdot x\cdot\left(500 - \pi\cdot x^2\right)}{3}$

$$x \rightarrow \frac{25}{3}\,x\left(500 - \pi\,x^2\right) \tag{34.2.1}$$

$V'(x)$

$$-25\,\pi\,x^2 + \frac{12500}{3} \tag{34.2.2}$$

Ligningen løses for x ved at sætte $V'(x) = 0$.

$-25\,\pi\,x^2 + \dfrac{12500}{3} = 0$

$$-25\,\pi\,x^2 + \frac{12500}{3} = 0 \tag{34.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{10}{3}\,\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\right], \left[x = \frac{10}{3}\,\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\right]\right] \tag{34.2.4}$$

Disse tal renskrives. Men opgaven lød på, at $0 \le x \le 12$. Så en af løsningerne til x bruges ikke. Den positive tages.

$x = \frac{10}{3} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}$

$$x = \frac{10}{3} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} \qquad \textbf{(34.2.5)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = 7.2833 \qquad \textbf{(34.2.6)}$$

Der tages tal der er hhv. større og mindre end 7.2833. Jeg vælger 6 og 8.

$V'(6) = -25\,\pi \cdot 6^2 + \frac{12500}{3}$

$$-900\,\pi + \frac{12500}{3} = -900\,\pi + \frac{12500}{3} \qquad \textbf{(34.2.7)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$1339.3 = 1339.3 \qquad \textbf{(34.2.8)}$$

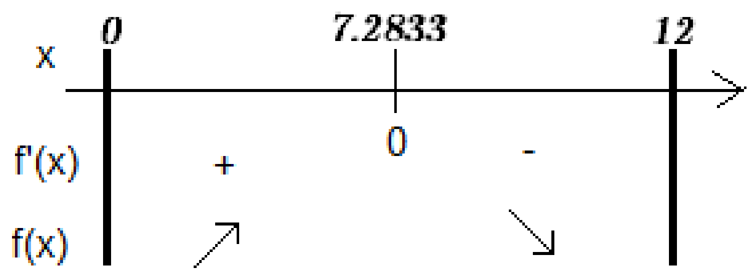
$V'(8) = -25\,\pi \cdot 8^2 + \frac{12500}{3}$

$$-1600\,\pi + \frac{12500}{3} = -1600\,\pi + \frac{12500}{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

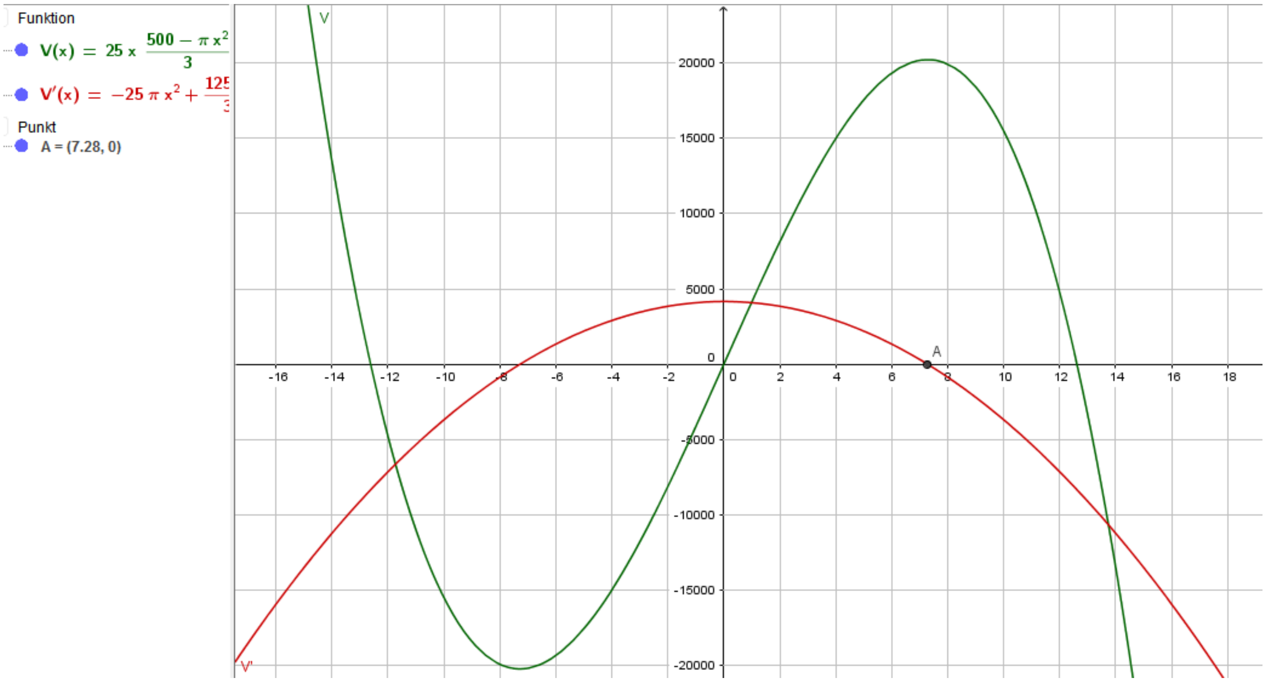
$$-859.9 = -859.9 \qquad \textbf{(34.2.10)}$$

Endelig kan monotonilinjen tegnes.



Så V er voksende i intervallet $[0; 7.2833]$ hvor V er aftagende i intervallet $[7.2833; 12]$

Dvs. postkassen vil have den størst mulige rumfang ved 7.2833. En visualisering kan ses nedenfor.



Hvilket er det ønskede.

Anders J.,
Mark K.,
Saeid J.,
Vejledende løsninger MAT A