ПЪРВИ КЛАС

1) Ако в централното кръгче поставим числото 1, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 13. Сега трябва да представим поне по три начина числото 13 като сбор на две различни едноцифрени числа без участието на 1. Имаме 13 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7. Могат да се попълнят и трите линии.

2) Ако в централното кръгче стои числото 2, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 12. Имаме 12 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7. Могат да се попълнят и трите линии.

3) Ако в централното кръгче стои числото 3, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 11. Имаме 11 = 2 + 9 = 4 + 7 = 5 + 6. Могат да се попълнят и трите линии.

4) Ако в централното кръгче стои числото 4, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 10. Имаме 10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 . Могат да се попълнят и трите линии.

5) Ако в централното кръгче стои числото 5, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 9. Имаме 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6. Могат да се попълнят и трите линии.

6) Ако в централното кръгче стои числото 6, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 8. Имаме 8 = 1 + 7 = 3 + 5. Могат да се попълнят само две от линиите.

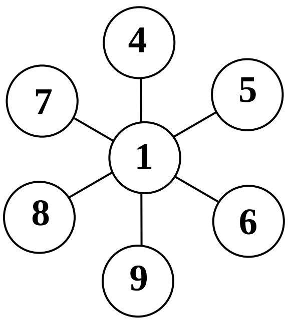
7) Ако в централното кръгче стои числото 7, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 7. Имаме 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4. Могат да се попълнят и трите линии.

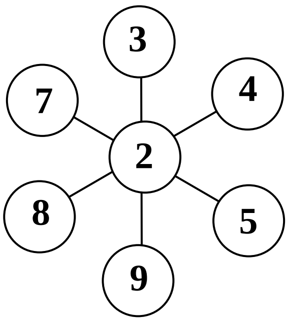
8) Ако в централното кръгче стои числото 8, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 6. Имаме 6 = 1 + 5 и 2 + 4. Могат да се попълнят само две от линиите.

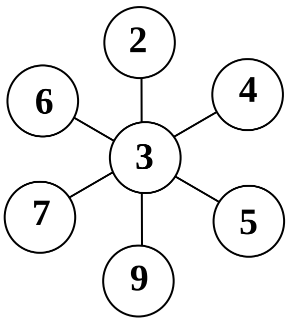
9) Ако в централното кръгче стои числото 9, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 5. Имаме 5 = 1 + 4 = 2 + 3. Могат да се попълнят само две от линиите.

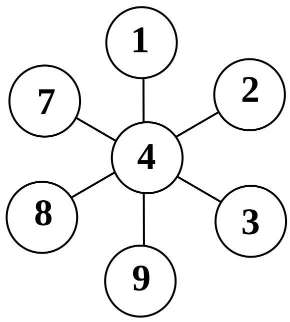
Възможни са 6 различни начина за попълване.

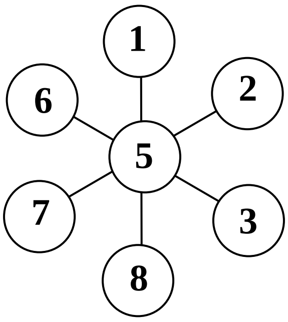
За посочване на един начин – **1 точка**, за посочване на два начина – **2 точки** и за всеки допълнителен начин по **2 точки**.

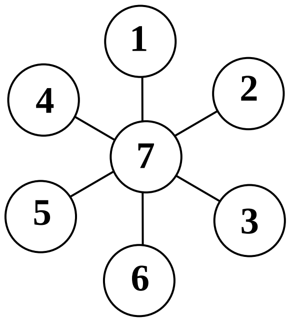












ВТОРИ КЛАС

1) Ако в централното кръгче поставим числото 1, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 14. Сега трябва да представим поне по три начина числото 14 като сбор на две различни едноцифрени числа без участието на 1. Имаме 14 = 5 + 9 = 6 + 8.

Заключаваме, че могат да се попълнят само две от линиите и този случай не води до решение.

2) Ако в централното кръгче стои числото 2, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 13. Имаме 13 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7. Могат да се попълнят и трите линии.

3) Ако в централното кръгче стои числото 3, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 12. Имаме 12 = 4 + 8 = 5 + 7. Могат да се попълнят само две от линиите.

4) Ако в централното кръгче стои числото 4, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 11. Имаме 11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 5 + 6. Могат да се попълнят и трите линии.

5) Ако в централното кръгче стои числото 5, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 10. Имаме 10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6. Трите линии могат да се попълнят по 4 различни начина в зависимост от това кой от сборовете няма да се използва.

6) Ако в централното кръгче стои числото 6, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 9. Имаме 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5. Могат да се попълнят и трите линии.

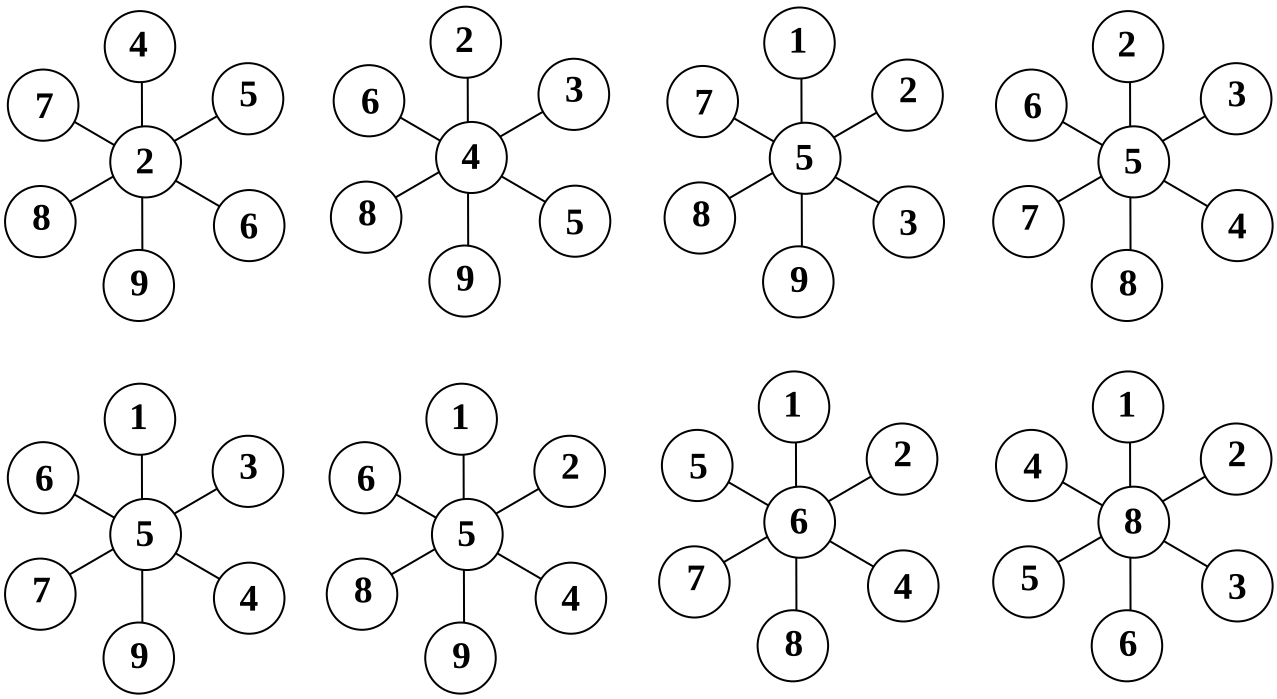
7) Ако в централното кръгче стои числото 7, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 8. Имаме 8 = 2 + 6 = 3 + 5. Не могат да се попълнят и трите линии.

8) Ако в централното кръгче стои числото 8, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 7. Имаме 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4. Могат да се попълнят и трите линии.

9) Ако в централното кръгче стои числото 9, сборът на другите две числа в една линия трябва да е 6. Имаме 6 = 1 + 5 = 2 + 4. Могат да се попълнят само две от линиите.

Възможни са 8 различни начина за попълване.

За всеки посочен начин по **1 точка** до посочване на 6 начина включително, седми и осми начин се оценяват с по **2 точки**.



3 – 4 КЛАС

Ще докажем, че първият ден от месеца, в който са родени тримата, е червен, т.е. датата 1 е червена. Наистина, ако най-малката червена дата е двуцифрена, то зелените цифри преди нея са нечетен брой, а последният зелен участък съдържа четен брой цифри и това противоречи на условието на задачата. Ако най-малката червена дата е едноцифрена, то първият зелен участък съдържа не повече от 8 цифри. Но тогава броят на зелените цифри е не по-голям от $8.4=32$ и заедно с червените получаваме общо не повече от $32+5=37$ цифри, т.е. броят на цифрите, с които се записват датите в разглеждания месец, е 37. В същото време броят на цифрите за записване на датите в най-късия месец (февруари в невисокосна година) е точно $9+19.2=47$. Тъй като $37<47$, стигаме отново до противоречие.

Да разгледаме месец с 31 дни. Датите в такъв месец се записват с $9+22.2=53$ цифри. От тях 5 са червени и 48 са зелени. Бройката 48 може да се раздели на три групи по 16 цифри и оттук получаваме следните рождени дати на тримата приятели: 1, 14 и 23. Числото 48 може да се представи и като сума на две четни числа $24+24=48$, откъдето получаваме още следните възможни дати на тримата приятели: 1, 18 и 31.

Да разгледаме месец с 30 дни. Дните в такъв месец се записват с $9+21.2=51$ цифри. От тях 5 са червени и 46 са зелени. Числото 46 не може да се раздели на три групи с един и същ брой цифри. То не може да се представи и като сума на две четни числа. Следователно не е възможно тримата приятели да са родени в такъв месец.

Да разгледаме месец февруари с 29 дни. Дните в такъв месец се записват с $9+20.2=49$ цифри. От тях 5 са червени и 44 са зелени. Числото 44 не може да се раздели на три групи с един и същ брой цифри, но то може да се представи като сума на две четни числа $22+22=44$. Оттук получаваме следните рождени дати на тримата приятели: 1, 17 и 29.

Да разгледаме месец февруари с 28 дни. Дните в такъв месец се записват с $9+19.2=47$ цифри. От тях 5 са червени и 42 са зелени. Числото 42 не може да се представи като сума на две четни числа, но може да се раздели на три групи по 14 цифри. Оттук получаваме следните рождени дати на тримата приятели: 1, 13 и 21.

Задачата има 16 решения:

през месеците януари, март, май, юли, август, октомври и декември възможните рождени дати на тримата приятели са: 1, 14 и 23 или 1, 18 и 31;

през месец февруари на високосна година възможните рождени дати на тримата приятели са: 1, 17 и 29;

през месец февруари на невисокосна година възможните рождени дати на тримата приятели са: 1, 13 и 21.

По **2 точки** за всяка открита тройка дати (1, 13, 21), (1, 14, 23), (1, 18, 31) и (1, 17,1 29). **Пълен брой точки** се дават за посочване на всичките 16 решения. Ако не е открита нито една дата, но е доказано, че първият ден от месеца е рожден ден на някой от тримата – **2 точки**. В противен случай точки не се присъждат.

5 – 6 КЛАС

Да разгледаме тялото, „разрязано“ на хоризонтални слоеве. „Открита“ ще наричаме всяка стена на кубче, която е част от повърхнината на тялото. Лицето на стена на кубче е 1 кв. см.

Да номерираме слоевете започвайки отдолу нагоре. Лесно се вижда, че първият и петият слой са еднакви, както вторият и четвъртият слой са еднакви. **(1 т.)** В първия слой има 20 кубчета. От тях 8 имат по 3 „открити“ стени, 8 имат по 2 „открити“ стени и 4 имат по 4 „открити“ стени. Следователно повърхнината на първия слой е 56 кв. см. **(1 т.)** Във втория слой има 16 кубчета, като 4 имат по 2 „открити“ стени и 12 – по 3 „открити“ стени. Следователно повърхнината на втория слой е 44 кв. см. **(1 т.)** В третия слой има 4 кубчета, като всички имат по 4 „открити“ стени. Следователно повърхнината на третия слой е 16 кв. см. **(1 т.)** Общата повърхнина на тялото е 2.56 + 2.44 + 16 = 216 кв. см. **(1 т.)** В първия и третия слой има по 8 бели кубчета с по 2 „открити“ стени. **(1 т.)** Във втория и четвъртия слой има по 4 бели кубчета с по 3 „открити“ стени и по 4 бели кубчета с по 2 „открити“ стени **(1 т.)**, а в третия слой няма бели кубчета. **(1 т.)** Следователно оцветената в бяло повърхнина на тялото е 72 кв. см **(1 т.)** и тя е $\frac{1}{3}$ от цялата повърхнина. **(1 т.)**

7 – 8 КЛАС

Отг. $\angle BAC = 60^\circ$. От $\frac{HM}{CM}+\frac{HN}{AN}+\frac{HP}{BP}=\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BCH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=1$ следва, че $BH:HP=2:1$. От $HP=HN$ следва, че $BH=AH$ и $BH=2HN$ (**5 точки**). Тогава, ако построим $HL\perp BC\left(L\in BC\right)$, ще следва, че $BH=2HL=2HN$. Това означава, че $N\equiv L$ и AN е височина в триъгълника (**3 точки**). От еднаквостта на ΔAHP и ΔBHN по първи признак следва, че и BP е също височина в триъгълника и $AP=BN$. Тогава $\angle ACB=60^\circ$ и от еднаквостта на ΔCPH и ΔCNH по катет и хипотенуза следва, че $CP=CN$. Излиза, че ΔABC е равнобедрен (**1 точка**) с $\angle ACB=60^\circ$ и следователно е равностранен (**1 точка**). Така получаваме, че $\angle BAC=60^\circ$.

9 – 10 КЛАС

а) Ще докажем, че $A\le 23$ за всички реални числа x и y, за които $x^2+y^2\ne 0$. Неравенството $\frac{14x^2+12xy+19y^2}{x^2+y^2}\le 23$ е еквивалентно с $\frac{-9x^2+12xy-4y^2}{x^2+y^2}\le 0$, откъдето $\frac{9x^2-12xy+4y^2}{x^2+y^2}\ge 0$ и $\frac{(3x-2y)^2}{x^2+y^2}\ge 0$. Последното неравенство е очевидно. (**7 точки**)

б) От а) следва, че $A=23$ при $3x=2y$. Оттук $y=\frac{3}{2}x$, което е уравнение на права линия през началото на координатната система. Всички точки от тази права, с изключение на началото, имат координати, за които A достига максималната си стойност 23. (**3 точки**)

11 – 12 КЛАС

От условието следва, че $\sphericalangle CLF+\sphericalangle CKF=180^\circ$. Следователно четириъгълникът $CKFL$ е вписан в окръжност k_0 (**1 точка**). Ако $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, от косинусовата теорема за ΔABC следва, че $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ и $\cos\beta=\frac{1}{8}$ (**1 точка**). Оттук следва още, че $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\sin\beta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. От синусовата теорема за ΔABL имаме равенствата $\frac{BL}{\sin\alpha}=\frac{AL}{\sin(120^\circ+\alpha)}=\frac{AB}{\sin 120^\circ}$. Следователно $BL=\frac{40\sqrt{3}\sin\alpha}{3}=\frac{10\sqrt{21}}{3}$ и $AL=\frac{20}{\sin 120^\circ}(\sin\alpha\cos 120^\circ+\sin 120^\circ\cos\alpha)=\frac{5\left(9-\sqrt{21}\right)}{3}$ (**1 точка**). Аналогично от синусовата теорема за ΔABK, която се изразява с равенствата $\frac{AK}{\sin\beta}=\frac{BK}{\sin(120^\circ-\beta)}=\frac{AB}{\sin 60^\circ}$, следват равенствата $AK=5\sqrt{21}$ и $BK=\frac{5\left(\sqrt{21}+1\right)}{2}$ (**1**

точка). От свойствата на секущите към окръжността k_0 следват равенствата $AF.AK = AL.AC$ и $BF.BL = BK.BC$. Оттук, като вземем предвид получените по-рано равенства, намираме $AF = \dfrac{8\left(3\sqrt{21}-7\right)}{7}$ и $BF = \dfrac{4.\left(\sqrt{21}+21\right)}{7}$ **(1 точка)**. Нека M е средата на AB и k_1 е описаната около ΔPMF окръжност. Ако втората пресечна точка на k_1 с AB е N, от свойствата на секущите към k_1 следва $AN.AM = AF.AP$. Тъй като $AM = \dfrac{AB}{2} = 10$, $AP = \dfrac{AK}{2}$ и $MN = AM - AN$, то $MN = 2\left(\sqrt{21}-4\right)$. Нека k_1 пресича за втори път BM в точка Q'. От свойството на секущите към k_1, изразяващо се с равенството $BQ'.BF = BM.BN$, и равенствата $BM = 10$ и $BN = BM + MN$ следва $BQ' = \dfrac{5\sqrt{21}}{3}$. Следователно $BQ' = \dfrac{BL}{2}$. Това означава, че Q' е среда на BL, т.е. $Q' \equiv Q$. Следователно $k_1 \equiv k$ **(3 точки)**. Затова k пресича AB в точките M и N **(1 точка)**. За разстоянието между тях вече намерихме $MN = 2\left(\sqrt{21}-4\right)$ **(1 точка)**.