Delprøve 1

Opgave 1: Her aflæses den summerede graf. Vi ser, (og det også oplyst) at 90% fraktilen er $158\,000 kr$, og det betyder, at 90% af salgsprisen er på $158\,000 kr$ eller mindre.

Kvartilsættet aflæses til at være $\{70\,000, 100\,000, 125\,000\}$.

Opgave 2: De oplyste informationer omskrives til punkter i planen. $A(100,4000)$ og $B(150,4500)$. En forskrift for de samlede omkostninger kan bestemmes således:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4500 - 4000}{150 - 100} = 10,$$
$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 4000 - 10 \cdot 100 = 3000,$$

Og hermed er $f(x) = 10x + 3000$.

Opgave 3: Funktionen differentieres.

$$f'(x) = -2x + 7$$

Heri er $f'(2) = -2 \cdot 2 + 7 = -4 + 7 = 3$. Denne værdi angiver hældningen for tangenten til grafen i netop $x = 2$.

Opgave 4: Arealet af trekanten bestemmes vha. ½-appelsinformlen.

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$$

Så

$$T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0.75 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Opgave 5: Indsættes $x = 1$ fås $0 = 0$, som er sandt. Vi løser ligningen

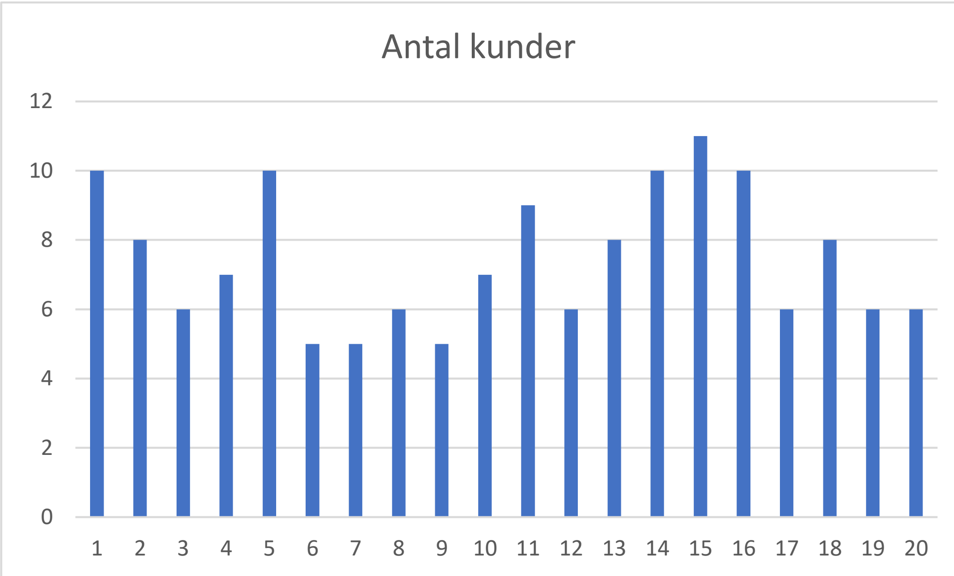
$$3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$$

Hermed er løsningerne til ligningen $x = -2 \vee x = 1$.

Delprøve 2

Opgave 1:

a) Vi åbner Excel op og indtaster de oplyste værdier. Ved hjælp af ”Anbefalede diagrammer” kan man få følgende graf:



Vi ser, at på de tyve dage er antallet af besøgende kunder forskelligt, og det viser sig vidst at der ikke tages højde for evt. weekend og hverdage, hvis det forholder sig til oplysningerne fra sættet.
Her er y-aksen antal kunder og x-aksen er antal dage.

b) Dette er u-grupperet statistik. Vi vil anvende følgende statistiske deskriptorer, så kan resten overlades til læseren.

- Kvartilsæt
- Varians
- Standardafvigelse

Kvartilsættet bestemmes ved aflæsning af de oplyste tal og sættes i rækkefølge, som vist her:

$$5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 11$$

Medianen er nemmest at starte med, så den aflæses i midten, dvs. tallet mellem det røde 7-tal og blå 7-tal, da der er totalt 20 observationer, er medianen

$$\frac{7+7}{2} = 7$$

Nedre kvartil aflæses kun ved de røde tal.

$$\frac{6+6}{2}=6$$

Øvre kvartil aflæses kun ved de blå tal.

$$\frac{9+10}{2}=9.5$$

Altså er kvartilsættet: $\{6, 7, 9.5\}$.

Varians, men for at bestemme den, skal vi kende middeltallet (gennemsnittet). Dette udregnes således:

$$\bar{x}=\frac{10+8+6+\cdots+6}{20}=7.45$$

Variansen er så

$$Var(x)=\frac{(10-7.45)^2+(8-7.45)^2\ +(6-7.45)^2+\cdots+(6-7.45)^2}{20}$$
$$=3.6475$$

Standardafvigelsen (eller spredningen) bestemmes vha. variansen.

$$\sigma(x)=\sqrt{Var(x)}=\sqrt{3.6475}=1.9098$$

I Maple vil alle de statistiske deskriptorer se ud sådan:

```
with(Gym) :
A := [10, 8, 6, 7, 10, 5, 5, 6, 5, 7, 9, 6, 8, 10, 11, 10, 6, 8, 6, 6] :
typetal(A)
                              [6]                                (1)
median(A)
                               7.                                (2)
kvartiler(A)
                          [6., 7., 9.5000]                       (3)
gennemsnit(A)
                          7.450000000                            (4)
varians(A)
                        3.64750000000000                         (5)
spredning(A)
                        1.90984292547843                         (6)
```

Opgave 2:

a) Hovedstolen er $24000kr$.
Lånets ydelse bestemmes vha. formlen
$$Afdrag = Ydelse - Rente$$
Og man har
$$987.76 = Y - 480 \Leftrightarrow Y = 1467.76$$
Renten r på 2% bestemmes vha. formlen
$$Rente = Primo\ Restgæld \cdot r$$
Så
$$480 = 24000 \cdot r \Leftrightarrow r = 0.02$$
Og i procent er det: 2%.

a) Vi anvender formlen for restgælden, så vi får restgælden efter 8 ydelse:
$$24000 \cdot (1+0.02)^8 - \frac{(1+0.02)^8 - 1}{0.02} \cdot 1467.76 = 15522.086$$
Så efter 8. ydelse er restgælden på $15522.086kr$.
Her er formlen:
$$R_n = A_0 \cdot (1+r)^n - y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Opgave 3: Der er givet to funktioner

$$C(x) = 0.0004x^3 - 0.4x^2 + 160x + 170000, \qquad 0 \le x \le 2200$$
$$O(x) = -0.4x^2 + 880x, \qquad 0 \le x \le 2200$$

a) Overskudsfunktionen $R(x)$ bestemmes således:
$$\begin{aligned} &R(x) = O(x) - C(x) \\ &= -0.4x^2 + 880x - (0.0004x^3 - 0.4x^2 + 160x + 170000) \\ &= -0.4x^2 + 880x - 0.0004x^3 + 0.4x^2 - 160x - 170000 \\ &= -0.0004x^3 + 720x - 170000, \qquad 0 \le x \le 2200 \end{aligned}$$
Så overskudsfunktionen passer.

b) Her løses $R'(x) = 0$, så ligningen er
$$-0.0012x^2 + 720 = 0 \Leftrightarrow 0.0012x^2 = 720 \Leftrightarrow x = 774.60$$
Den anden afledede bestemmes.
$$R''(774.60) = -0.0024 \cdot 24 = -1.859040, \quad -1.859040 < 0, \ max.$$
Dermed er den maksimale omsætning når $x = 774.60$. Omsætningen er så
$$R(774.60) = 201806.4012$$

c) Vi anvender $x = 774.60.$ Vi bestemmer $C'(x)$ og $O'(x)$.

$$C'(x) = 0.0012x^2 - 0.8x + 160$$
$$O'(x) = -0.8x + 880$$

Vi indsætter $x = 774.60$, hvis begge har samme tangenthældning når x er størst i $R(x)$, så skal begge give samme resultat.

$C'(774.60) = 0.0012 \cdot 774.60^2 - 0.8 \cdot 774.60 + 160 = 260.326 = 260.3$

$O'(774.60) = -0.8 \cdot 774.60 + 880 = 260.320 = 260.3$

Man kan se, at begge (med præcis afrunding) giver samme hældning.

Opgave 4: Givet funktionen $f(x) = 33131 \cdot 1.03^x$

a) Tallet 1.03 er fremskrivningsfaktoren. Dvs. for hver måne der går, efter december 2009, stiger antallet af boliger der er til salg med 3% pr. måned ifølge modellen.

Modellen gælder fra $\boldsymbol{december}$ 2009, og vi ønsker at finde ud af det i $\boldsymbol{august}$ 2010, så

$$f(8) = 33131 \cdot 1.03^8 = 41969.357$$

Ifølge modellen vil der i august 2010 være 41969 boliger til salg.

b) Fordoblingskonstanten bestemmes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.03)} = 23.449 \approx 23.5$$

For hver 23.5 måned der går, fordobles antallet af boliger, der er til salg ifølge modellen.

Opgave 5:

a) Forskriften $f(x,y)$ bestemmes. Ved aflæsning af informationerne kan vi slutte, at forskriften er

$$f(x,y) = 30x + 20y$$

b) Niveaulinjen $N(200)$ ønskes bestemt. Så man har

$$200 = 30x + 20y \Leftrightarrow y = 10 - \frac{3}{2}x$$

Ved anvendelse af hjørnemetoden, tester vi følgende punkter:

$$(0{,}17.5), \qquad (3{,}16), \qquad (12{,}4), \qquad (14{,}0)$$

Punkterne kan også fås ved beregning af ligninger ud fra de oplyste linjer. Så vi har:

$$f(0{,}17.5) = 350, \;\; f(3{,}16) = 410, \;\; f(12{,}4) = 440, \;\; f(14{,}0) = 420$$

Man kan se, at $f(12{,}4)$ giver det største mulige samlede dækningsbidrag pr. dag. Så der skal altså produceres 12 planglas og 4 spejle.

Opgave 6A:

a) Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$\angle A = \arccos\left(\frac{13^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 13 \cdot 8}\right) = 43.049^o$$

b) Endepunktet for h_B på grundlinjen AC betegnes H. Vi ved, at $\angle H = 90^o$ samt $\angle A = 43.049^o$ og $|AB| = 8$, dermed er h_B (eller $|BH|$) bestemt ved

$$h_B = 8 \cdot \sin(43.049) = 5.46$$

Opgave 6B:

a) Vi vælger følgende punkter:
- Monotoniforhold
- Ekstrema

Monotoniforhold: Polynomiet $p(x)$ differentieres og ligningen $p'(x) = 0$ løses.

$$3x^2 - 8x + 3 = 0$$

Ved anvendelse af kvadratkomplettering får vi

$$\begin{aligned}
&3x^2 - 8x = -3 \Leftrightarrow \\
&x^2 - \frac{8}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = -1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \\
&x - \frac{4}{3} = \pm\sqrt{\frac{7}{9}} \Leftrightarrow \\
&x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}
\end{aligned}$$

Dermed er løsningerne

$$x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

Eller approksimeret:

$$x = 0.45138 \vee x = 2.2152$$

Vi anvender anden afledede til argumentation for hvornår der er maksimum og minimum.

$$p''(x) = 6x - 8$$

Resultaterne fra ligningen indsættes i ovenstående, så man får

$$p''(0.45138) = -5.29172$$

$$p''(2.2152) = 5.2912$$

Da $p''(0.45138) < 0$ så er der lokalt maksimum. Da $p''(2.2152) > 0$ så er der lokalt minimum. Vi kan slutte, at

$p(x)$ er voksende i intervallet $x \in (-\infty; 0.45138] \cup [2.2152; \infty)$

$p(x)$ er aftagende i intervallet $x \in [0.45138; 2.2152]$.

Ekstrema: Vi indsætter de fundne værdier fra monotoniforhold testen. Disse indsættes i $p(x)$, så

$$p(0.45138) = 0.63113$$
$$p(2.2152) = -2.1126$$

Vi konkluderer, at $p(x)$ har lokalt maksimum 0.63113 i $x = 0.45138$ og lokalt minimum -2.1126 i $x = 2.2152$. **Bemærk**, at der ikke er globalt maksimum eller minimum i dette tilfælde, så kan man tænke over det…

b) Grafen for $p(x)$ tegnes i GeoGebra, inkl. punkter fra spgm. a.