



Instituto Politécnico de Leiria

Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Fundamentos de Matemática

Folha 2 - Números Complexos

1. Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações:

(a) $x^2 + 9 = 0$;

(b) $x^2 - 4x + 5 = 0$;

(c) $x^2 + x + 2 = 0$;

(d) $x^3 + 25x = 0$.

2. Efectue as operações indicadas e apresente o resultado na forma algébrica:

(a) $(2 - 3i) + (5 - 9i)$;

(b) $(6 + 5i) - (7 - i)$;

(c) $-4(2 + 5i)$;

(d) $3i(7 - 2i)$;

(e) $(1 + i)(1 - i)$;

(f) $(2 + 3i)(1 - i)$;

(g) $(3 - i)^2$;

(h) $(2 - i)^3$;

(i) $\frac{3 - 5i}{i}$;

(j) $\frac{1}{5 + i}$;

(k) $\frac{2 + 5i}{1 - 2i}$;

(l) $\left(\frac{2 + i}{1 - 2i}\right)^2$.

3. Dado o número complexo $z = (3x - 8) + (5 - 9y)i$, determine os números reais x e y tais que:

(a) $z = 0$;

(b) z seja um número complexo imaginário puro;

(c) z seja um número real.

4. Determine os números reais x e y tais que $\frac{7x + 8i}{2 + yi} = 4 - 2i$.

5. Sejam $w = 4 + 3i$ e $z = -2 + i$ dois números complexos. Determine na forma algébrica:

(a) $(3z - 2w)^2$;

(b) $\text{Im}(w^2)$;

(c) $\text{Re}(2w)$;

(d) $w\bar{z} + \text{Re}(\bar{z})$;

(e) $i^{169} - 2\bar{z}$;

(f) $2\bar{z} - z^{-1}$.

6. Considere em \mathbb{C} o número complexo $z = cis\theta$. Prove que $z^{2n} + (\bar{z})^{2n} = 2\cos(2n\theta)$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Determine os números complexos z_1 e z_2 , sabendo que $z_1 - z_2$ é um número real, $\text{Re}(z_1 + z_2) = 2$ e $z_1 \times z_2 = -51 + 8i$.

8. Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações:

(a) $i\bar{z} + 3i = 7 - 3z$;

(b) $3z - 8 = \bar{z} - 2i$;

(c) $2\bar{z} - 4 = z - 9i$.

9. Represente na forma algébrica os seguintes números complexos:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} 2\sqrt{6} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}; & \text{(b)} \sqrt{8} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}; & \text{(c)} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}; \\ \text{(d)} \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}; & \text{(e)} \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}; & \text{(f)} 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}. \end{array}$$

10. Represente na forma trigonométrica e determine o argumento principal dos seguintes números complexos:

$$\text{(a)} 3i^{50}; \quad \text{(b)} \frac{2-2i}{1+i}; \quad \text{(c)} -\sqrt{3} + \sqrt{3}i; \quad \text{(d)} -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

11. Considere o número complexo $z = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8}$. Determine na forma trigonométrica:

- (a) o seu conjugado;
- (b) o seu simétrico;
- (c) o seu inverso.

12. Considere os números complexos: $z_1 = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}$, $z_2 = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$, $z_3 = \sqrt{3} - i$ e $z_4 = 1 + i$.

Determine:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} z_1^{10}; & \text{(b)} (z_1 \times z_2)^8; & \text{(c)} \frac{z_1^3}{-z_2}; \\ \text{(d)} \left(\frac{1}{z_2}\right)^7; & \text{(e)} z_3^{10}; & \text{(f)} \frac{z_3}{2i \cdot (\overline{z_4})^4}. \end{array}$$

Soluções da Folha Prática 5 : Números complexos

1.

(a) $x = \pm 3i$

(b) $x = 2 \pm i$

(c) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

(d) $x = 0 \vee x = \pm 5i$

2.

a. $7 - 12i$

b. $-1 + 6i$

c. $-8 - 20i$

d. $6 + 21i$

e. 2

f. $5 + i$

g. $8 - 6i$

h. $2 - 11i$

i. $-5 - 3i$

j. $\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$

k. $-\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$

l. -1

3.

(a) $x = \frac{8}{3}, y = \frac{5}{9}$

(b) $x = \frac{8}{3}, y \neq \frac{5}{9}$

(c) $x \in \mathbb{R}, y = \frac{5}{9}$

4. $x = 2, y = 3$

5.

a. $187 + 84i$

b. 24

c. 8

d. $-7 - 10i$

e. $4 + 3i$

f. $-\frac{18}{5} - \frac{9}{5}i$

6. -----

7. $z_1 = 7 + 4i$ e $z_2 = -5 + 4i$

8.

a. $z = 3 - 2i$

b. $4 - \frac{1}{2}i$

c. $4 + 3i$

9.

a. $3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

b. $2 + 2i$;

c. $-\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}i$

d. $-1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}i$

e. $-\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}i$

f. $\sqrt{3} - i$

10.

a. $3cis(\pi)$

b. $2cis\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

c. $\sqrt{6}cis\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

d. $2\sqrt{2}cis\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

11.

(a) $\bar{z} = 4cis\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

(b) $-z = 4cis\left(\frac{11}{8}\pi\right)$

(c) $z^{-1} = \frac{1}{4}cis\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

12.

a. $\frac{1}{1024}$

b. $2^8cis\left(\frac{62}{5}\pi\right)$;

c. $\frac{1}{32}cis\left(\frac{13}{20}\pi\right)$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^7 cis\left(-\frac{21}{4}\pi\right)$

e. $2^{10}cis\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$

f. $\frac{1}{4}cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$