Matematik B-niveau STX
7. december 2012
Delprøve 1

Opgave 1

Delopgave a

Af trekanterne ABC og DEF ses

ABC med b = 6 og c = 10. Der bestemmes for a.

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

Tallene indsættes

$$|BC|^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow |BC|^2 = \sqrt{10^2 - 6^2} \Leftrightarrow |BC|^2 = \sqrt{64} \Leftrightarrow |BC| = 8$$

Så sidelængden $|BC|$ er regnet til 8.

For at bestemme de ukendte sider i trekanten DEF forudsættes det, at man kender min. 2 sider. Derfor anvendes forstørrelsesfaktoren k.

$$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{30}{6} = 5$$

Nu bestemmes $|EF|$ og $|DE|$.

$$|EF| = k \cdot |BC| = 5 \cdot 8 = 40$$

$$|DE| = k \cdot |AB| = 5 \cdot 10 = 50$$

Hvilket er de ukendte sidelængder i trekanten DEF.

Opgave 2

Delopgave a

Andengradspolynomiet er givet ved

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 7$$

Dette har et toppunkt der kan regnes på følgende formel.

$$T_{x,y} = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{d}{4a} \right)$$

Diskriminanten udregnes.

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 84 = -48, \ d < 0$$

Indsættes værdierne i $T_{x,y}$ fås

$$T_{x,y} = \left(-\frac{-6}{2 \cdot 3} ; -\frac{-48}{4 \cdot 3} \right) = (1; 4)$$

Som er toppunktet for $P(x)$.

Opgave 3

Delopgave a

Der opstilles en lineær model over oplysningerne
$b = 1.5\ L$ og $a = -0.2\ L$

$$f(x) = -0.2x + 1.5$$

Fordi der fordamper $0.2\ L$ vand, dvs. en aftagende model.

Opgave 4

Delopgave a

Modellen er givet ved

$$\frac{p \cdot h}{4} = 4M \Leftrightarrow p \cdot h = 16M \Leftrightarrow h = \frac{16M}{p}$$

Opgave 5

Delopgave a

Vækstmodellen for N individer bestemmes for $t = 50$.

Af aflæsning fra grafens ses det, at for $t = 50$ fås hældningen for tangenten til grafen for t.

$$V = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1} = \frac{110 - 50}{80 - 5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Så ved tidspunktet $t = 50$ fås væksthastigheden af dyrene med 0.67 om dagen.

Opgave 6

Delopgave a

Funktionerne

$f(x) = 2x^{3.5} + x^2 + 10$ og $g(x) = 7x^{2.5} + 2x$ er givet

$g(x)$ integreres og ses om det giver $f(x)$. Svarende til $G(x)$.

$$G(x) = 7 \cdot \left(\frac{1}{2.5+1}\right) \cdot x^{2.5+1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{1+1}\right) \cdot x^{1+1} = \frac{7}{3.5} \cdot x^{3.5} + \frac{2}{2} \cdot x^2 + k = 2 \cdot x^{3.5} + x^2 + k$$

Ergo er f stamfunktion til g.

Matematik B-niveau STX
7. december 2012
Delprøve 2

Opgave 7

Delopgave a

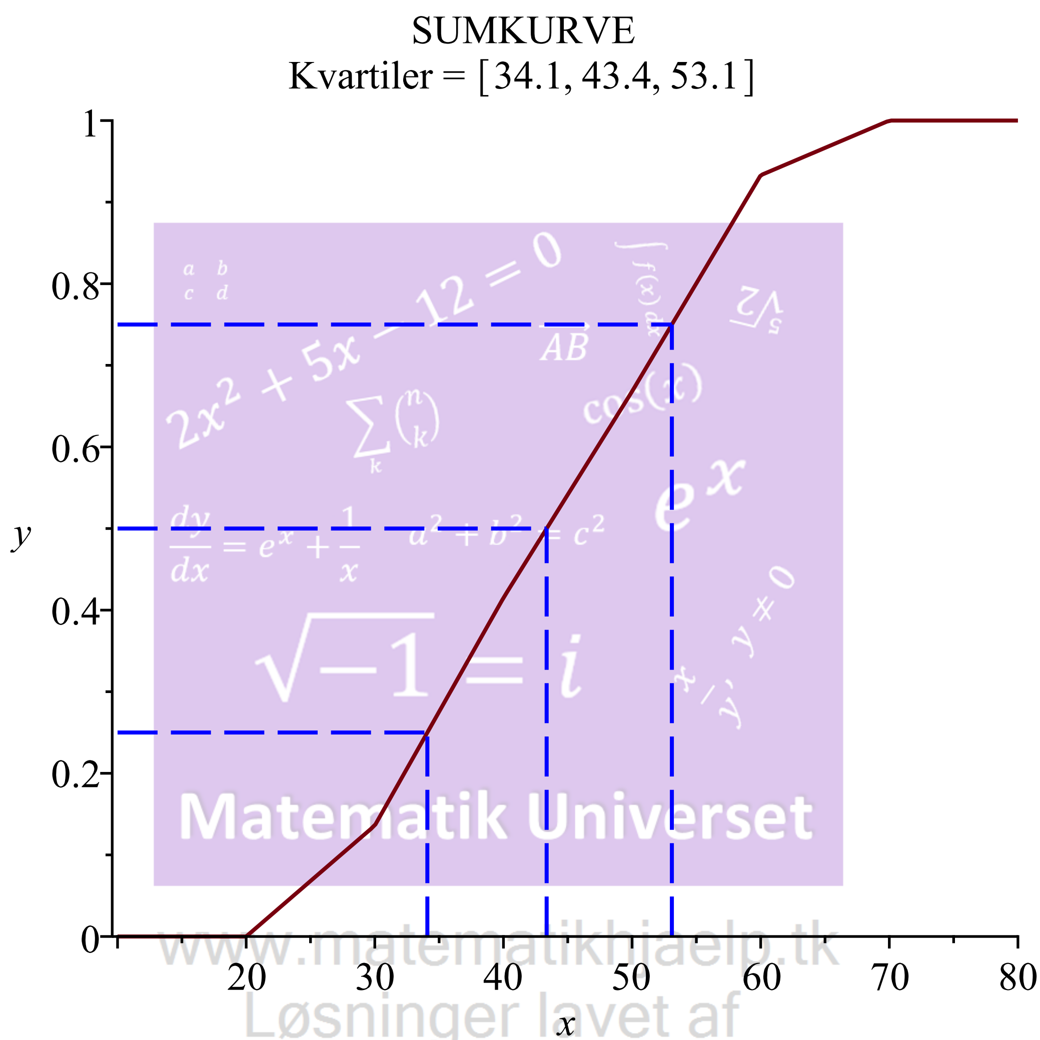
Oplysningerne defineres og indsættes i en matrix.

$$obs := \begin{bmatrix} 20..30 & 13.6 \\ 30..40 & 27.9 \\ 40..50 & 25.3 \\ 50..60 & 26.5 \\ 60..70 & 6.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20..30 & 13.6 \\ 30..40 & 27.9 \\ 40..50 & 25.3 \\ 50..60 & 26.5 \\ 60..70 & 6.7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.1)}$$

Sumkurven kan tegnes ved manuel metode ved at finde de kumulerede frekvenser eller ved hjælp af maple kommandoen:

plotSumkurve(*obs*)



Kvartilsættet samt sumkurven blev hhv. bestemt og tegnet.

Dette kan bestemmes pr. håndkraft ved indsættelse af skemaet med oplysningerne.

Alder	20 − 30	30 − 40	40 − 50	50 − 60	60 − 70
Procentvis andel	13.6 %	27.9 %	25.3 %	26.5 %	6.7 %
Kumuleret frekvenser	13.6%	41.5 %	66.8 %	93.3 %	100 %

Heraf kunne man indsætte punkterne i et koordinatsystem og tegne sumkurven, men dette nøjes læseren med at gøre.

Opgave 8

Delopgave a

Oplysningerne defineres, således man kan udføre eksponentiel regression.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4]$

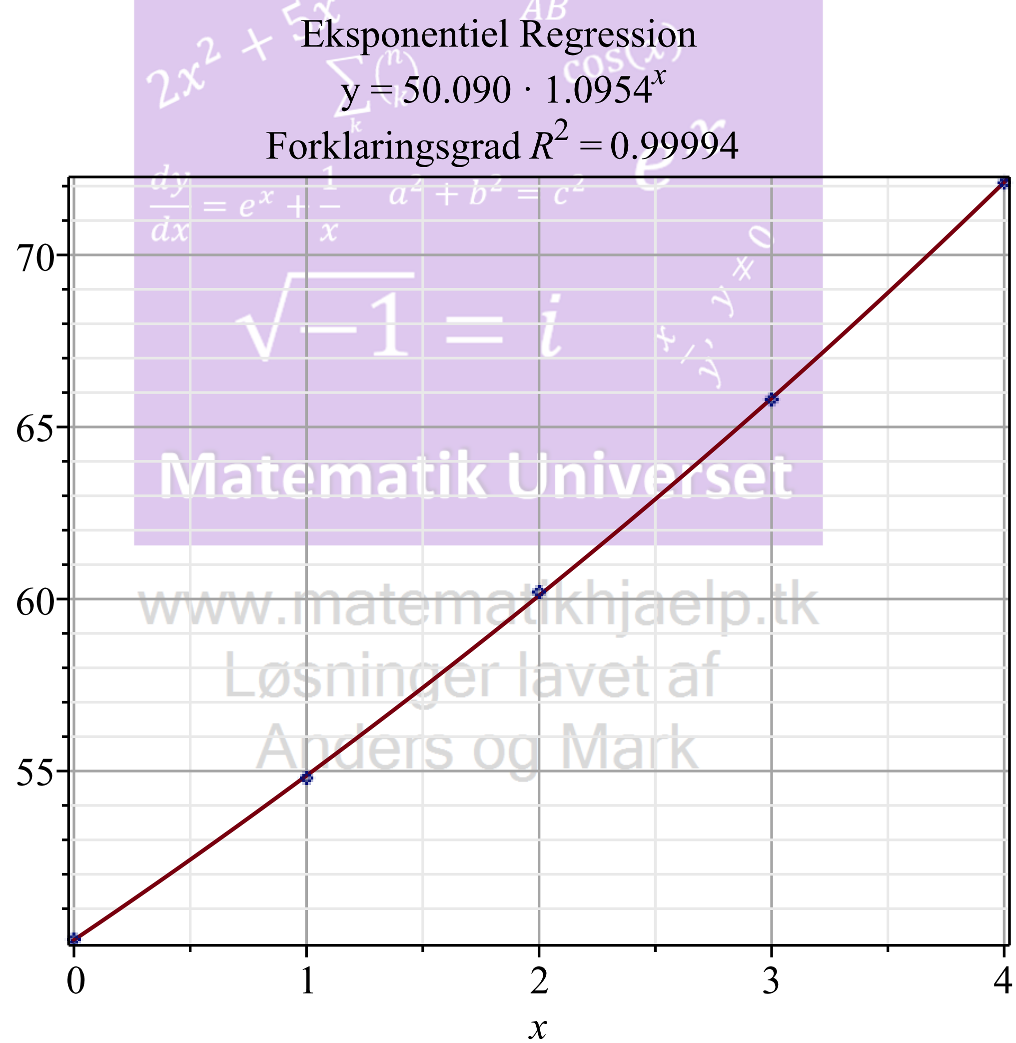
$$[0, 1, 2, 3, 4] \tag{8.1.1}$$

$L2 := [50.1, 54.8, 60.2, 65.8, 72.1]$

$$[50.1, 54.8, 60.2, 65.8, 72.1] \tag{8.1.2}$$

Endelig udføres regressionen.

$ExpReg(L1, L2)$



Forklaringgraden er høj, meget tæt på 1. - Den accepteres!

Derved blev konstanterne a og b bestemt samt forskriften $f(x)$.

Tallet $a := 1.0954$:
Tallet $b := 50.090$:

Funktionen

$f(x) := 50.090 \cdot 1.0954^x$

$$x \rightarrow 50.090\ 1.0954^{x} \quad (8.1.3)$$

Delopgave b

Fordoblingstiden kan bestemmes ved følgende

$$T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)}$$

$$T_2 = \frac{25.26992284 \ln(2)}{\ln(10)} \quad (8.2.1)$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$T_2 = 7.6070 \quad (8.2.2)$$

Lægges til begyndelsesåret.
2006 + 7.6

$$2013.6 \quad (8.2.3)$$

Dvs. at i løbet af år 2013 vil danskernes gæld til det offentlige være fordoblet!

Delopgave c

Her løses en ligning for x. Dvs. der indsættes 120 lig med funktionen.

$$f(x) = 120$$

$$50.090\ 1.0954^{x} = 120 \quad (8.3.1)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 9.588172237]] \quad (8.3.2)$$

Lægges til begyndelsesåret.
2006 + 9.58

$$2015.58 \quad (8.3.3)$$

Dvs. at i løbet af år 2015 vil danskernes gæld til det offentlige være på 120 mia. kr.

Opgave 9

Delopgave a

Trekanten ABC med oplysningerne $|AC| = 12$ samt vinkel $C = 25^{o}$ er angivet. Ligeledes er $|BC| = 10$ angivet.

Der bestemmes for $|AB|$ v.h.a. cosinusrelationerne.

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot Cos(C)}\ .$$

Oplysningerne indsættes

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot Cos(25)}$$

$$|AB| = 5.146467828 \quad (9.1.1)$$

Arealet kan bestemmes ved følgende formel.

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot Sin(25)$

$$A = 25.35709571 \quad (9.1.2)$$

Delopgave b

Ved et areal af trekanten på 15, kan man regne $|BC|$ ved arealformlen.

$A = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot Sin(C)$

Indsættes værdierne fås

$15 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot 12 \cdot Sin(25)$

$$15 = 2.535709571\ |BC| \quad (9.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for BC}}$

$$[[BC = 5.915503957], [BC = -5.915503957]] \quad (9.2.2)$$

Den negative værdi forkastes. Derved er længden $|BC|$ blevet regnet til 5.915503957.

Vinkel B kan nu udregnes, idet man kender $|BC|$, men også $|AC|$ og vinkel C. Der anvendes da sinusrelationerne, men først bestemmes sidelængden $|AB|$.

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot Cos(C)}$

Oplysningerne indsættes

$|AB| = \sqrt{12^2 + 5.915503957^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5.915503957 \cdot Cos(25)}$

$$|AB| = 7.093854516 \quad (9.2.3)$$

Dette gør, at sinusrelationerne kan anvendes.

$\frac{Sin(B)}{|AC|} = \frac{Sin(C)}{|AB|}$

Indsættes oplysningerne fås

$\frac{Sin(B)}{12} = \frac{Sin(25)}{7.093854516}$

$$\frac{1}{12} \sin(0.01745329252\ B) = 0.05957526490 \quad (9.2.4)$$

$\xrightarrow{\text{solve for B}}$

$$[[B = 45.63526488]] \quad (9.2.5)$$

Så vinkel B blev bestemt til 45.64^o, men da den er overfor den længste side $|AB|$ trækkes 180^o fra vinkel B. Heraf fås

$180 - 45.63526488$

$$134.3647351 \tag{9.2.6}$$

Hvilket er den ønskede stumpe vinkel B.

Opgave 10

Delopgave a

Der er tale om en potensvækst og da der kun er angivet to støttepunkter, anvendes tallene a og b.

$a = \dfrac{\log_{10}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}$; $b = \dfrac{y_1}{{x_1}^a}$.

Oplysningerne indsættes fra tabellen.

$a = \dfrac{\log_{10}\left(\dfrac{15}{5}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{2}{1}\right)}$; $b = \dfrac{5}{1^{1.5849}}$

$$a = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

$$b = 5.000000000 \tag{10.1.1}$$

Så tallene a og b blev bestemt til hhv.

$a = 1.5849$

$$a = 1.5849 \tag{10.1.2}$$

$b = 5$

$$b = 5 \tag{10.1.3}$$

Af dette kan man bestemme en ligning.

$y = b \cdot x^a$, hvor tallene indsættes

$y = 5 \cdot x^{1.5849}$

$$y = 5\,x^{1.5849} \tag{10.1.4}$$

Ved indsættelse af $x = 8$ fås

$y = 5 \cdot 8^{1.5849}$

$$y = 134.9824556 \tag{10.1.5}$$

Så y-værdien er 134.98.

Opgave 11

Delopgave a

Modellen for overfladearealet af en menneskekrop er angivet

$O = m^{0.425} \cdot h^{0.725} \cdot 0.007184$

$$O = 0.007184\, m^{0.425}\, h^{0.725} \tag{11.1.1}$$

Der indsættes for 150 i h og 67 i m.

$O = 67^{0.425} \cdot 150^{0.725} \cdot 0.007184$

$$O = 1.622236907 \tag{11.1.2}$$

Menneskets overfladeareal er $1.62 m^2$.

Delopgave b

Højden bestemmes ved at løse en ligning. Oplysningerne indsættes

$O = 2.16$ og $m = 92$.

$2.16 = 92^{0.425} \cdot h^{0.725} \cdot 0.007184$

$$2.16 = 0.04908809182\, h^{0.725} \tag{11.2.1}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for h}} \quad [[h = 184.8696659]] \tag{11.2.2}$$

Dvs. mennesket har højden 184.86 cm.

Opgave 12

Delopgave a

Ved aflæsningen af figuren ses $V = l \cdot b \cdot h$ i den rektangel. Man trækker volumen fra cylinderen fra.

$V = h \cdot \text{pi} \cdot r^2$. Det oplyses endvidere, at diameteren er 6. Derved indsættes 3^2 på r^2's plads.

$V = h \cdot \text{pi} \cdot 3^2$

$$V = 9\, h\, \pi \tag{12.1.1}$$

Dette trækkes fra volumeformlen for rektanglen.

$V = l \cdot b \cdot h - 9\, h\, \pi$

$$V = b\, h\, l - 9\, \pi\, h \tag{12.1.2}$$

Hermed er $l \cdot b \cdot h$ udtrykt.

Opgave 13

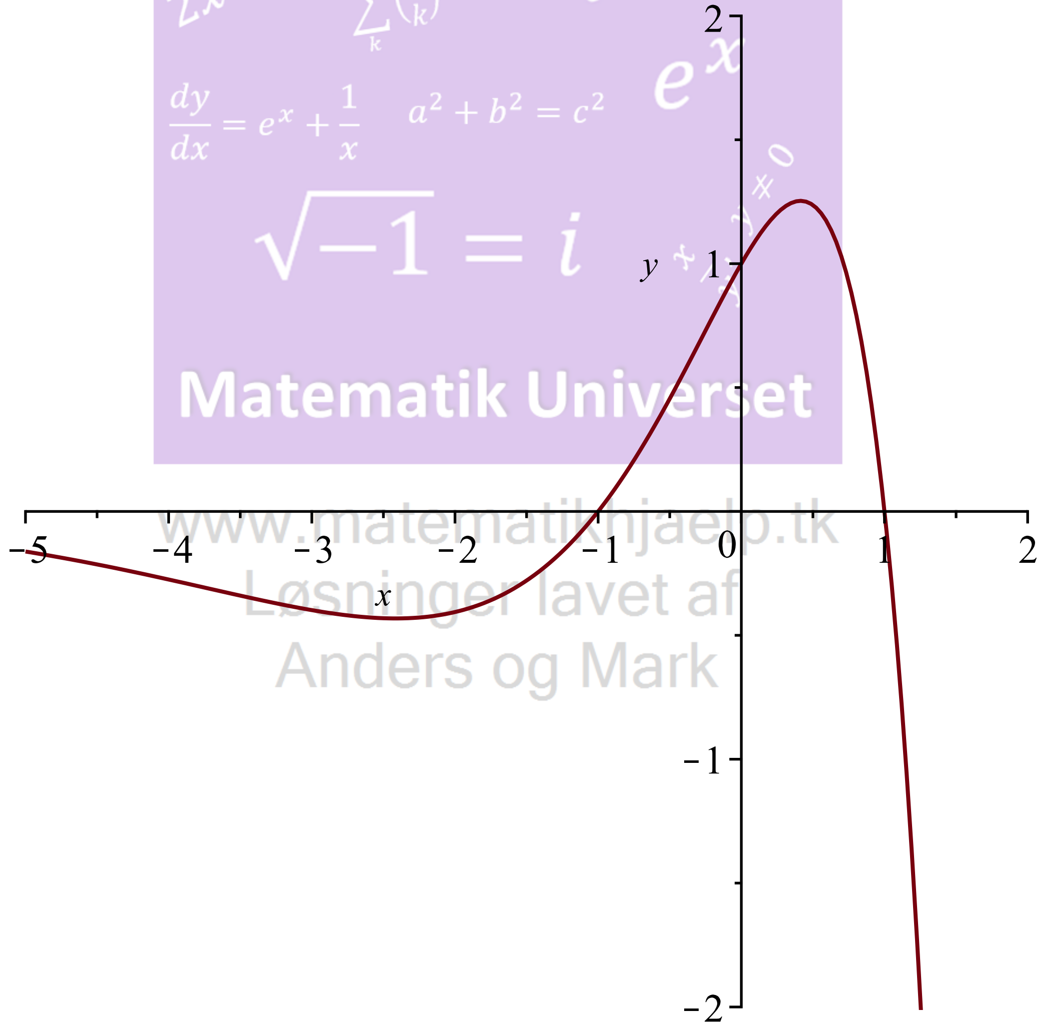
Delopgave a

Funktionen f defineres.

$f(x) := (1 - x^2) \cdot e^x$:

Funktionen kan tegnes v.h.a. plot.

$plot(f(x), x = -5..2, y = -2..2)$



Tangenten til grafen for f kan findes ved hjælp af tangentligningen.

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Ved indsættelse af oplysningen $P(1, f(1))$ fås

$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

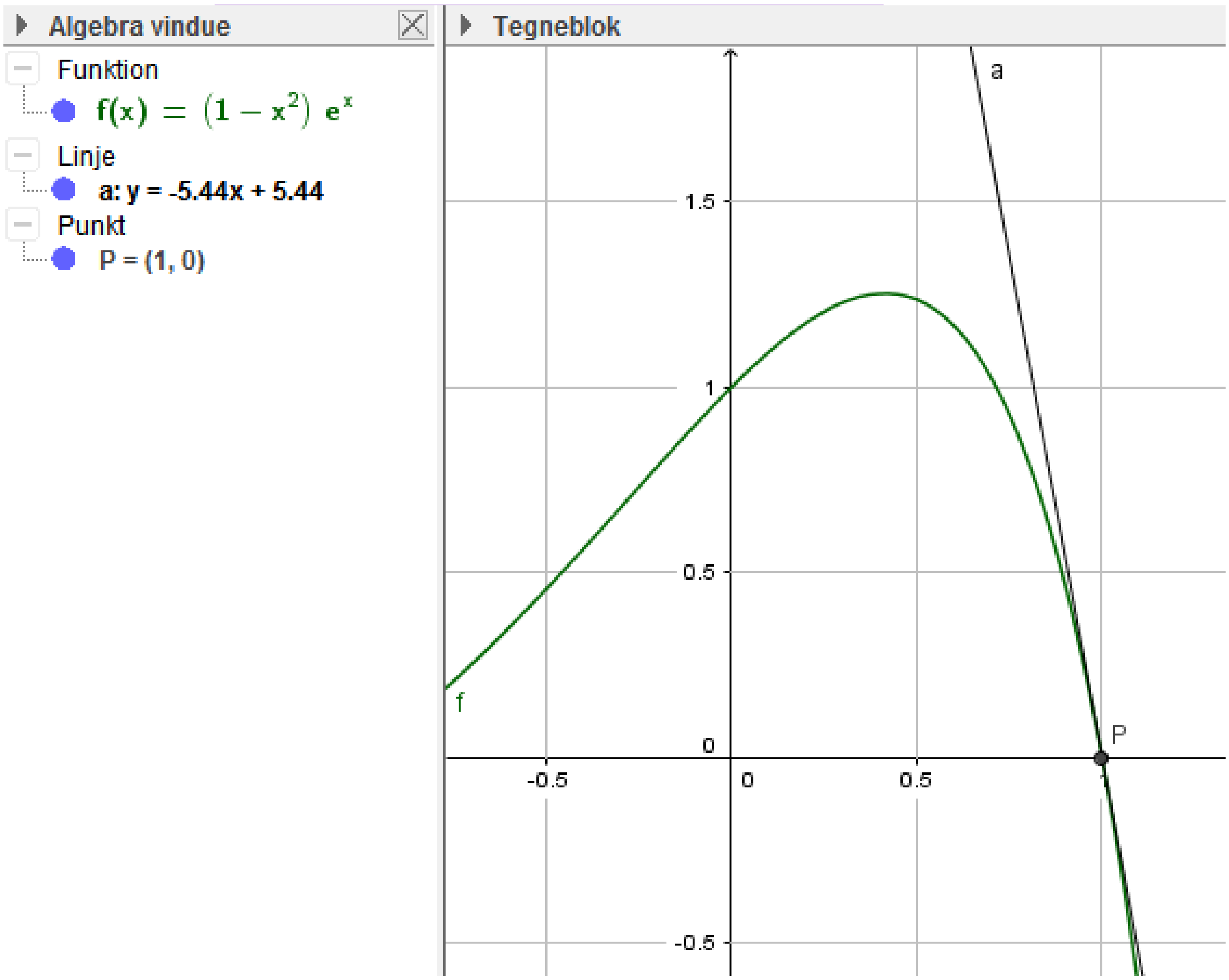
$$y = -2\,\mathrm{e}\,(x-1) \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$y = -5.4366\,x + 5.4366 \tag{13.1.2}$$

Hvilket er tangenten til grafen for f.

Man kunne også benytte sig af GeoGebra.



Hvilket giver præcis det samme.

Delopgave b

Monotoniforhold for f beregnes ved at differentiere f og løse for $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$

$$-2\,x\,\mathrm{e}^{x} + \left(-x^{2}+1\right)\mathrm{e}^{x} = 0 \tag{13.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \sqrt{2}-1\right], \left[x = -1-\sqrt{2}\right]\right] \tag{13.2.2}$$

Heraf fås to x-værdier.

$x = \sqrt{2} - 1$

$$x = \sqrt{2} - 1 \qquad \textbf{(13.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = 0.4142 \qquad \textbf{(13.2.4)}$$

$x = -1 - \sqrt{2}$

$$x = -1 - \sqrt{2} \qquad \textbf{(13.2.5)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = -2.4142 \qquad \textbf{(13.2.6)}$$

Dvs. nu kan man bestemme hvornår funktionen er voksende og aftagende. Der er ingen begrænsninger for x, derfor antages det fra minus uendeligt til uendeligt

Der gøres prøve ved at indsætte $-3, -1$ og 2.

$f'(-3)$

$$-2\,e^{-3} \qquad \textbf{(13.2.7)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-0.099574 \qquad \textbf{(13.2.8)}$$

$f'(-1)$

$$2\,e^{-1} \qquad \textbf{(13.2.9)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.73576 \qquad \textbf{(13.2.10)}$$

$f(2)$

$$-3\,e^{2} \qquad \textbf{(13.2.11)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-22.167 \qquad \textbf{(13.2.12)}$$

Så hermed ved man, at f er...
aftagende i intervallet $]-\infty; -2.4142]$
voksende i intervallet $[-2.4142; 0.4142]$
aftagende i intervallet $[0.4142; \infty[$

Delopgave c
Der bestemmes integralet for f.

$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

$$A = 4\,e^{-1} \qquad \textbf{(13.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$A = 1.4715 \qquad \textbf{(13.3.2)}$$

Dvs. tallet fortæller, at tallet 1,471518 (arealet af området) ligger mellem grafen for f og førsteaksen i intervallet $(-1, 1)$.

Opgave 14

Delopgave a

Der defineres for oplysningerne i tabellen.

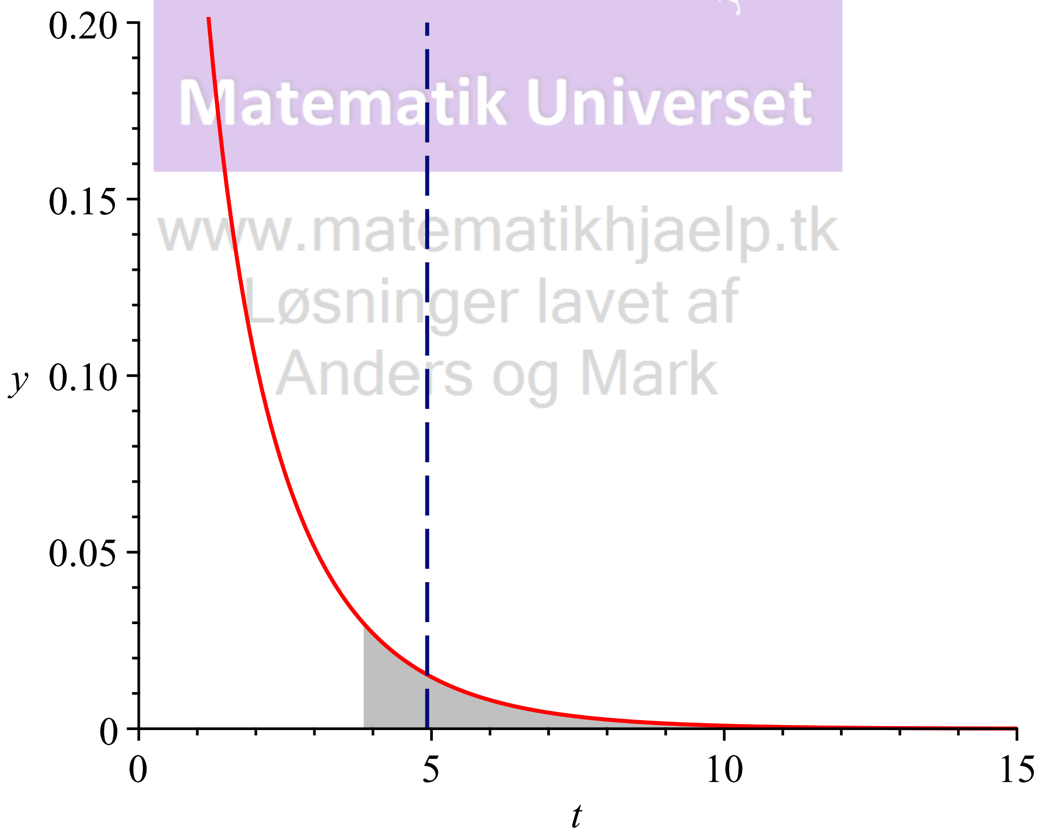
$$obs := \begin{bmatrix} 62 & 71 \\ 140 & 99 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 62 & 71 \\ 140 & 99 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14.1.1)}$$

H_0 = *Gener af boligkvarter A og B er uafhængig af støjniveauet.*

ChiKvadratUtest(*level* = 0.05, *obs*)

χ^2-teststørrelse = 4.9263
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.026451



Da p − *værdien* er mindre end 5%, må man forkaste nulhypotesen, så der er faktisk en forskel mellem boligkvarter A og B.