Программа коллоквиума

Определения:

Коммутативное кольцо, поле, поле комплексных чисел, векторное пространство над полем, линейная зависимость, линейная оболочка, базис, размерность, подпространство векторного пространства, линейное отображение (линейный оператор), ядро и образ линейного отображения, сумма подпространств, прямая сумма, матрица над полем $\Bbbk$, произведение матриц, единичная матрица, обратная матрица, транспонированная матрица, матрица линейного отображения, матрица замены базиса, перестановка из n элементов, произведение перестановок, знак перестановки, определитель матрицы, минор матрицы, ранг матрицы, факторпространство, двойственное пространство, двойственный базис, аннулятор подпространства, сопряженный оператор.

Теоретические вопросы:

1. Докажите, что комплексные числа образуют поле. Докажите формулу Муавра.
2. Докажите, что элементарными преобразованиями каждую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Опишите метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
3. Сформулируйте и докажите условия совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах ступенчатого вида (расширенной) матрицы системы. Докажите, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.
4. Докажите, что для умножения матриц выполнены свойства ассоциативности и дистрибутивности относительно сложения.
5. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.
6. Докажите, что если векторное пространство порождено конечным семейством векторов, то в нем есть конечный базис, и все базисы имеют равное число элементов. Докажите, что в конечномерном векторном пространстве любое линейно независимое семейство векторов можно дополнить до базиса.
7. Напишите и докажите формулу, выражающую размерность суммы двух подпространств через размерности самих подпространств и размерность их пересечения.
8. Напишите и докажите формулу преобразования матрицы линейного оператора $F : V \to V$ при замене базиса.
9. Докажите, что для произвольного линейного отображения $F : V \to W$ подходящим выбором базисов в V и W матрица F может быть приведена к блочному виду $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где E — единичная матрица. Как связаны размерности ядра и образа линейного отображения?
10. Докажите, что знак произведения перестановок равен произведению их знаков, и что знак любой транспозиции равен минус единице.
11. Докажите, что определитель матрицы является полилинейной кососимметрической функцией ее столбцов.
12. Докажите, что любая полилинейная кососимметрическая функция столбцов квадратной матрицы пропорциональна определителю. Выведите формулу для определителя произведения матриц.
13. Напишите и докажите формулы для изменения определителя при элементарном преобразовании строк (столбцов). Докажите, что квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.
14. Сформулируйте и докажите формулы Крамера для решения системы линейных уравнений.
15. Напишите и докажите формулу для обратной матрицы через алгебраические дополнения.
16. Докажите, что три определения ранга матрицы (через строки, столбцы и миноры) эквивалентны.
17. Докажите, что для конечномерного векторного пространства V дважды двойственное пространство V^{**} канонически изоморфно V.
18. Докажите, что для подпространства W конечномерного векторного пространства V двойственное пространство W^* канонически изоморфно факторпространству $V^*/Ann(W)$.
19. Сформулируйте и докажите теорему о связи ядра и образа сопряженного линейного оператора с ядром и образом исходного линейного оператора.

Программа коллоквиума – 2

Определения:

Группа; подгруппа; порядок группы; циклическая подгруппа; порядок элемента группы; гомоморфизм групп; действие группы на множестве; орбита; стабилизатор (стационарная подгруппа); нормальная подгруппа; факторгруппа; внутренний автоморфизм группы; класс сопряженности; свободная группа; группа, заданная образующими и соотношениями; абелева группа; свободная абелева группа конечного ранга; прямая сумма абелевых групп; прямое произведение колец; кольцо классов вычетов; функция Эйлера; область целостности; поле частных; евклидово кольцо; кольцо гауссовых целых чисел; идеал; факторкольцо; главный идеал; обратимые и простые (неприводимые) элементы в области целостности; факториальное кольцо.

Формулировки:

Теорема Лагранжа; формула орбит; формула Бернсайда; теорема о гомоморфизмах групп; свойство универсальности группы, заданной образующими и соотношениями; китайская теорема об остатках; теорема о классификации конечно порожденных абелевых групп; теорема о гомоморфизмах колец.

Теоретические вопросы:

1. Докажите теорему Лагранжа и формулу орбит. Докажите формулу Бернсайда.
2. Докажите, что каждая перестановка единственным образом раскладывается в произведение независимых циклов. Опишите классы сопряженности в симметрической группе.
3. Докажите существование факторгруппы по нормальной подгруппе. Докажите теорему о гомоморфизмах групп.
4. Докажите существование свободной группы с заданным множеством образующих.
5. Докажите свойство универсальности группы, заданной образующими и соотношениями.
6. Докажите существование факторкольца по идеалу. Докажите теорему о гомоморфизмах колец.
7. Докажите китайскую теорему об остатках. Докажите мультипликативность функции Эйлера.
8. Докажите, что ранг свободной абелевой группы корректно определен (для случая конечного ранга). Докажите, что любая подгруппа свободной абелевой группы конечного ранга является свободной абелевой группой.
9. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа изоморфна конечной прямой сумме примарных циклических и бесконечных циклических.
10. Докажите, что набор порядков примарных циклических и бесконечных циклических групп, прямой сумме которых изоморфна данная конечно порожденная абелева группа, определен однозначно.
11. Докажите, что в евклидовом кольце любой идеал - главный, причем факторкольцо по идеалу является полем тогда и только тогда, когда элемент, порождающий этот идеал, прост.
12. Докажите, что любое евклидово кольцо факториально.
13. Докажите, что натуральное число представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители каждое простое число вида $4n + 3$ входит в четной степени.

Программа коллоквиума – 3

Определения:

Модуль над коммутативным кольцом; гомоморфизм модулей; подмодуль и фактормодуль; свободный модуль конечного ранга; циклический модуль; фробениусова нормальная форма матрицы линейного оператора; жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора на алгебраически замкнутым полем; характеристический многочлен линейного оператора; минимальный многочлен линейного оператора; собственные значения, собственные векторы и собственные подпространства; корневые подпространства; комплексификация и овеществление; билинейные и квадратичные формы; поляризация квадратичной формы; полуторалинейные формы; евклидовы и эрмитовы скалярные произведения; сопряженный оператор; симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в евклидовом пространстве; эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы в эрмитовом пространстве; нормальные операторы; полярное разложение.

Формулировки:

Теорема о гомоморфизмах модулей; теорема о классификации конечно порожденных модулей над евклидовым кольцом; теорема Гамильтона–Кэли; закон инерции; критерий Сильвестра; теорема Якоби; теорема Декарта; лемма Гаусса.

Теоретические вопросы:

1. Докажите теорему Гамильтона–Кэли.
2. Докажите, что пространство, в котором задан оператор, раскладывается в прямую сумму его корневых подпространств.
3. Докажите, что у любого нильпотентного оператора есть жорданов базис.
4. Докажите, что в жордановой нормальной форме оператора набор размеров жордановых клеток для каждого собственного значения определен однозначно.
5. Докажите, что у любой симметрической билинейной функции есть ортогональный базис.
6. Докажите закон инерции.
7. Докажите критерий Сильвестра.
8. Докажите, что любой симметрический оператор в евклидовом пространстве имеет ортонормированный собственный базис. Докажите, что в вещественном пространстве любые две симметрические билинейные формы, одна из которых положительно определена, могут быть одной заменой базиса одновременно приведены к диагональному виду.
9. Докажите, что в евклидовом пространстве любой ортогональный или кососимметрический оператор может быть ортогональной заменой приведен к блочно-диагональному виду с блоками размера не больше 2.
10. Докажите, что любой нормальный оператор в эрмитовом пространстве имеет ортонормированный собственный базис.
11. Докажите, что из любого положительного самосопряженного оператора в конечномерном евклидовом или эрмитовом пространстве можно однозначно извлечь квадратный корень, являющийся положительным самосопряженным оператором. Докажите, что у любого невырожденного оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве существует единственное полярное разложение.
12. Докажите теорему Декарта.
13. Докажите лемму Гаусса.
14. Докажите, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.

Программа коллоквиума – 4

Определения:

Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены, полные симметрические многочлены, степенные суммы, результант двух многочленов, дискриминант многочлена, расширение полей, алгебраические и трансцендентные элементы расширения, степень расширения, поле разложения многочлена, тензорное произведение векторных пространств, тензорная алгебра векторного пространства, симметрические и кососимметрические тензоры, симметрическая алгебра векторного пространства, внешняя алгебра векторного пространства, Грассманова алгебра с n образующими, тензоры типа (p,q), свертка, внутреннее произведение на ковектор (в тензорной алгебре, в симметрической алгебре, во внешней алгебре), комплекс абелевых групп (векторных пространств), точная последовательность, гомологии комплекса, цепное отображение (морфизм комплексов), цепная гомотопия.

Теоретические вопросы:

1. Докажите, что любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
2. Выведите формулы Ньютона, связывающие степенные суммы с элементарными симметрическими функциями.
3. Напишите и докажите формулы, выражающие результант двух многочленов через коэффициенты этих многочленов, через их корни, а также через значения одного из многочленов в корнях другого.
4. Докажите формулу, выражающую дискриминант многочлена через результант этого многочлена и его производной.
5. Докажите, что для любого многочлена над полем $\Bbbk$ существует его поле разложения. Докажите, что поле разложения многочлена определено однозначно с точностью до изоморфизма.
6. Докажите, что для любого числа q, являющегося степенью простого числа, существует поле из q элементов, причем все поля из q элементов изоморфны.
7. Исходя из определения тензорного произведения как универсального билинейного отображения, докажите существование тензорного произведения и его единственность с точностью до изоморфизма.
8. Докажите существование канонических изоморфизмов $V\otimes W \cong W\otimes V$, $U\otimes(V\otimes W)\cong(U\otimes V)\otimes W$, $U\otimes(V\oplus W)\cong(U\otimes V)\oplus(U\otimes W)$, $\mathrm{Hom}(V,W)\cong V^*\otimes W$, $(V\otimes W)^*\cong V^*\otimes W^*$.
9. Сформулируйте и докажите свойство универсальности k-й симметрической степени векторного пространства. Докажите, что симметрическая алгебра n-мерного пространства изоморфна алгебре многочленов от n переменных.
10. Сформулируйте и докажите свойство универсальности k-й внешней степени векторного пространства. Докажите, что внешняя алгебра n-мерного пространства изоморфна алгебре Грассмана с n образующими.
11. Докажите, что морфизм комплексов индуцирует морфизм гомологий, причем гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые морфизмы гомологий. Докажите, что у гомотопически эквивалентных комплексов гомологии изоморфны.

Экзамен по алгебре. 1 курс.
29 октября.

Вариант I.

Задача 1. Воспользовавшись формулой Муавра, упростите выражение:

$$\cos(\varphi) - \cos(3\varphi) + \cos(5\varphi) - \cos(7\varphi) + \ldots + (-1)^{n-1}\cos((2n-1)\varphi)$$

Задача 2. Известно, что 4 непрерывные функции $f(x), g(x), h(x), k(x)$ линейно зависимы, причем известны значения этих функций в точках $-1, 0, 1, 2$:
$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -5, f(2) = 4;$
$g(-1) = 4, g(0) = 3, g(1) = -2, g(2) = 1;$
$h(-1) = 2, h(0) = 4, h(1) = -3, h(2) = 1;$
$k(-1) = 1, k(0) = 2, k(1) = -6, k(2) = 4.$
Докажите, что нетривиальная линейная зависимость между этими функциями единственна с точностью до пропорциональности, и найдите эту зависимость.

Задача 3. Опишите множество таких 2×3 матриц $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{smallmatrix}\right)$, что $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & -6 \end{smallmatrix}\right)$.

Задача 4. Вычислите количество 5×7 матриц ранга 1 над конечным полем из q элементов.

Задача 5. Пусть $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant 4}$ — векторное пространство многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше 4. Пусть $A : V \to V$ — линейное отображение, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(x-1) - f(x+3)$, соответственно $B : V \to V$ — линейное отображение, определенное по правилу $Bf(x) = f(2x-1) - 2f(2x+1) + f(2x+3)$.

(a) Запишите матрицы линейных операторов A, B в каком-нибудь удобном для вас базисе.

(b) Вычислите размерность пересечения образов отображений $Im(A) \cap Im(B)$.

Задача 6.

(a) Вычислите определитель $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & \lambda & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \lambda & \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \lambda & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.

(b) При каких λ данная матрица может быть элементарными преобразованиями строк приведена к матрице $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & & & \\ 1 & 1 & \ldots & & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Задача 7. Пусть V_1, V_2 — два подпространства в конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выразите $(V_1 + V_2)^0 \subset V^*$ (аннулятор подпространства $V_1 + V_2 \subset V$) через V_1^0 и V_2^0 (аннуляторы подпространств V_1 и V_2). Ответ обоснуйте.

Экзамен по алгебре. 1 курс.

29 октября.

Вариант II.

Задача 1. Воспользовавшись формулой Муавра, упростите выражение:

$$\sin(\varphi) - \sin(3\varphi) + \sin(5\varphi) - \sin(7\varphi) + \ldots + (-1)^{n-1}\sin((2n-1)\varphi)$$

Задача 2. Известно, что 4 непрерывные функции $f(x), g(x), h(x), k(x)$ линейно зависимы, причем известны значения этих функций в точках $-1, 0, 1, 2$:
$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -3, f(2) = 2;$
$g(-1) = 4, g(0) = 3, g(1) = -2, g(2) = 5;$
$h(-1) = 2, h(0) = -1, h(1) = -4, h(2) = -1;$
$k(-1) = 1, k(0) = 2, k(1) = -3, k(2) = 4.$
Докажите, что нетривиальная линейная зависимость между этими функциями единственна с точностью до пропорциональности, и найдите эту зависимость.

Задача 3. Опишите множество таких 2×3 матриц $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{smallmatrix}\right)$, что
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Вычислите количество троек линейно зависимых векторов в векторном пространстве размерности 9 над конечным полем из q элементов при условии, что каждая пара из этой тройки должна быть линейно независимой.

Задача 5. Пусть $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant 4}$ — векторное пространство многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше 4. Пусть $A : V \to V$ — линейное отображение, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(x+1) - f(x-2)$, соответственно $B : V \to V$ — линейное отображение, определенное по правилу $Bf(x) = f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1)$.

(a) Запишите матрицы этих линейных операторов в каком-нибудь удобном для вас базисе в V.

(b) Вычислите размерность суммы образов отображений $Im(A) + Im(B)$.

Задача 6.

(a) Вычислите определитель $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & \lambda^n \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \\ 2 & 2 & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-2} \\ & \ldots & \ldots & & & \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \ldots & \lambda \\ n & n & n & n & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

(b) При каких λ данная матрица может быть элементарными преобразованиями строк приведена к матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & n & 0 \\ & \ldots & \ldots & & \\ n & 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 7. Пусть V_1, V_2 — два подпространства в конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выразите $(V_1 \cap V_2)^0 \subset V^*$ (аннулятор подпространства $V_1 \cap V_2 \subset V$) через V_1^0 и V_2^0 (аннуляторы подпространств V_1 и V_2). Ответ обоснуйте.

Экзамен по алгебре
Вариант I

(1) Докажите, что гомоморфизм группы порядка $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ в группу перестановок S_7 всегда имеет нетривиальное ядро.
(2) Найдите все целочисленные решения уравнения $533x + 442y = 26$.
(3) Найдите порядок элемента $x + 2y$ в абелевой группе, заданной двумя образующими x, y и двумя соотношениями $2x + 2y = 0 = 6x + 10y$.
(4) Докажите, что
  (a) множество 3×3 верхнетреугольных матриц над $\mathbb{F}_7$ с единицами на главной диагонали образуют группу;
  (b) эта группа изоморфна группе, заданной 3 образующими a, b, c и соотношениями
$$a^7 = b^7 = c^7 = e,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = cba.$$
(5) (a) Каков минимальный порядок абелевой группы, которая имеет подгруппы порядков 6, 4 и 10?
  (b) Опишите все такие группы и предъявите в них подгруппы соответствующих порядков.
(6) Найдите такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что $f(2) = 1$, остаток f при делении на $x^2 + x - 1$ равен 3, а остаток f при делении на $x^3 + x$ равен 2, или объясните, что таких многочленов не существует.

Экзамен по алгебре
Вариант II

(1) Докажите, что гомоморфизм группы порядка $115 = 5 \cdot 23$ в группу перестановок S_5 всегда имеет нетривиальное ядро.
(2) Найдите все целочисленные решения уравнения $552x + 513y = 15$.
(3) Найдите порядок элемента $2x + y$ в абелевой группе, заданной двумя образующими x, y и двумя соотношениями $3x + 6y = 0 = 6x + 9y$.
(4) Докажите, что
  (a) множество 3×3 верхнетреугольных матриц над $\mathbb{F}_5$ с единицами на главной диагонали образуют группу;
  (b) эта группа изоморфна группе, заданной 3 образующими a, b, c и соотношениями
$$a^5 = b^5 = c^5 = e,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = cba.$$
(5) (a) Каков минимальный порядок абелевой группы, которая имеет подгруппы порядков 6, 9 и 15?
  (b) Опишите все такие группы и предъявите в них подгруппы соответствующих порядков.
(6) Найдите такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что $f(1) = 1$, остаток f при делении на $x^2 + 1$ равен $x + 1$, а остаток f при делении на $x^3 + x^2 - x$ равен 1, или объясните, что таких многочленов не существует.

Вариант I

Задача 1. Какой может быть жорданова нормальная форма линейного оператора в $\mathbb{C}^5$, минимальный многочлен которого равен $(x-2)^2(x-1)$? Опишите все возможные варианты.

Задача 2. Для каждого вектора $v \in \mathbb{C}^6$ обозначим за W_v минимальное подпространство в $\mathbb{C}^6$ содержащее v и инвариантное относительно оператора $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Предъявите вектор v, такой что $\dim W_v$ максимально.

Задача 3. Найдите все корни 3-ей степени из матрицы $A = \begin{pmatrix} -26 & 9 \\ -54 & 19 \end{pmatrix}$. (То есть найдите все вещественные матрицы B, для которых $B^3 = A$, или объясните, что таковых не существует.)

Задача 4. Вычислите сигнатуру квадратичной формы на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени не выше 3, сопоставляющей многочлену $f(x)$ произведение его значений в точках 1 и 2.

Задача 5. На пространстве $V = \mathbb{R}^4$ задана билинейная форма $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_4y_4 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 4x_3y_4 + 4x_4y_3$. Для каждого подпространства $W \subset V$ обозначим его ортогонал (множество всех ортогональных векторов) относительно этой формы через $W^{\perp}$. Чему равно минимальное значение $\dim(W + W^{\perp})$?

Задача 6. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислите оператор, сопряженный к A относительно билинейной формы, ассоциированной с квадратичной формой $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_1$.

Задача 7. Путем рациональной замены базиса матрица оператора $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ была приведена к блочно-диагональной матрице B. Каковы могут быть размеры блоков матрицы B?

Вариант II

Задача 1. Какой может быть жорданова нормальная форма линейного оператора в $\mathbb{C}^6$, минимальный многочлен которого равен $(x+2)^2(x-1)^2$? Опишите все возможные варианты.

Задача 2. Для каждого вектора $v \in \mathbb{C}^6$ обозначим за W_v минимальное подпространство в $\mathbb{C}^6$ содержащее v и инвариантное относительно оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Предъявите вектор v, такой что $\dim W_v$ максимально.

Задача 3. Найдите все корни 3-ей степени из матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{pmatrix}$. (То есть найдите все вещественные матрицы B, для которых $B^3 = A$, или объясните, что таковых не существует.)

Задача 4. Вычислите сигнатуру квадратичной формы на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени не выше 3, сопоставляющей многочлену $f(x)$ произведение его значений в точках -1 и 3.

Задача 5. На пространстве $V = \mathbb{R}^4$ задана билинейная форма $b(x,y) = x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 2x_3y_4 + 2x_4y_3$. Для каждого подпространства $W \subset V$ обозначим его ортогонал (множество всех ортогональных векторов) относительно этой формы через $W^{\perp}$. Чему равно максимальное значение $\dim(W \cap W^{\perp})$?

Задача 6. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислите оператор, сопряженный к A относительно билинейной формы, ассоциированной с квадратичной формой $q(x) = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 7. Путем рациональной замены базиса матрица оператора $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ была приведена к блочно-диагональной матрице B. Каковы могут быть размеры блоков матрицы B?

Экзамен по алгебре

19 июня 2015.

Вариант I.

Задача 1. Исключите x из системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2+3xy+3y^2-3 & =0; \\ x^2y+xy^2+6 & =0. \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^3-2x+2$. Есть ли у него кратные корни в $\mathbb{C}$? Для каких простых p у этого многочлена есть кратные корни в алгебраически замкнутом поле характеристики p?

Задача 3. Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{Q}^n$, характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ которого равен $\lambda^n-5\lambda^2+a\lambda$.

(a) Для $k=1,\dots,n$ найдите $\operatorname{tr}(A^k)$; $\operatorname{tr}(\Lambda^k A)$; $\operatorname{tr}(S^k A)$.

(b) При $n=5$ и $a=0$ найдите степень минимального расширения $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$, над которым данный оператор A диагонализуем (при условии, что он диагонализуем над каким-нибудь расширением).

Задача 4. Пусть $A,B:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ — нильпотентные операторы ранга 2. Найдите максимальный размер жордановой клетки в жордановой нормальной форме оператора $A\otimes B$.

Задача 5. Пусть (e_1,e_2,e_3) — базис пространства V, а (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) — базис пространства W. Найдите минимальное число разложимых тензоров, в виде линейной комбинации которых можно выразить $t\in V\otimes W$, где $t=e_1\otimes f_1+e_2\otimes f_2+e_3\otimes f_3+2e_1\otimes f_2+2e_2\otimes f_1+e_1\otimes f_2+4e_1\otimes f_5+3e_2\otimes f_3+$ $+5e_3\otimes f_2+2e_1\otimes f_3+e_2\otimes f_4-e_3\otimes f_4+5e_2\otimes f_5+3e_3\otimes f_5$.

Задача 6. Пусть V — двумерное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом (e_1,e_2), и пусть (e^1,e^2) — двойственный базис пространства V^*. В пространстве $W=\Lambda V$ рассмотрим оператор A, действующий внешним умножением на e_1+3e_2, и оператор B, действующий внутренним умножением на e^2. Вычислите оператор $AB+BA$.

Экзамен по алгебре

19 июня 2015.

Вариант II.

Задача 1. Исключите x из системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-3 & =0; \\ x^2y+3xy^2+2y^3-6 & =0. \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^3+2x-2$. Есть ли у него кратные корни в $\mathbb{C}$? Для каких простых p у этого многочлена есть кратные корни в алгебраически замкнутом поле характеристики p?

Задача 3. Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{Q}^n$, характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ которого равен $\lambda^n-a\lambda+3$.

(a) Для $k=1,\dots,n$ найдите $\operatorname{tr}(A^k)$; $\operatorname{tr}(\Lambda^k A)$; $\operatorname{tr}(S^k A)$.

(b) При $n=3$ и $a=0$ найдите степень минимального расширения $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$, над которым данный оператор A диагонализуем.

Задача 4. Пусть $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ — нильпотентный оператор ранга 1, а $B:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ — нильпотентный оператор ранга 3. Найдите максимальный размер жордановой клетки в жордановой нормальной форме оператора $A\otimes B$.

Задача 5. Пусть (e_1,e_2,e_3) — базис пространства V, а (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) — базис пространства W. Найдите минимальное число разложимых тензоров, в виде линейной комбинации которых можно выразить $t\in V\otimes W$, где $t=e_1\otimes f_1+e_2\otimes f_2+e_3\otimes f_3+2e_1\otimes f_2+2e_2\otimes f_1+e_2\otimes f_1+2e_1\otimes f_5-e_2\otimes f_3+$ $+5e_3\otimes f_2+e_1\otimes f_3+e_2\otimes f_5-2e_3\otimes f_5+e_3\otimes f_1+3e_3\otimes f_5$.

Задача 6. Пусть V — двумерное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом (e_1,e_2), и пусть (e^1,e^2) — двойственный базис пространства V^*. В пространстве $W=\Lambda V$ рассмотрим оператор A, действующий внешним умножением на e_2, и оператор B, действующий внутренним умножением на e^1-e^2. Вычислите оператор $AB+BA$.