2. Euler körök és utak

Dr. Szalkai István,
2020.03.23.

$G=(V,E)$ egy tetszőleges gráf, azaz többszörös és hurokélek is lehetnek.

Definíció: *A $C\subseteq G$ út/kör a gráf* **Euler útja/köre** *ha G minden élét pontosan egyszer tartalmazza,*

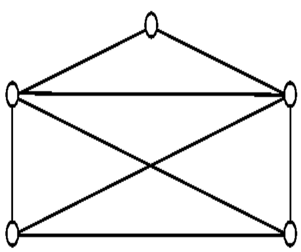
azaz ha C -ben érintett csúcsok sorrendben $C=(c_1,...,c_m)$, akkor a

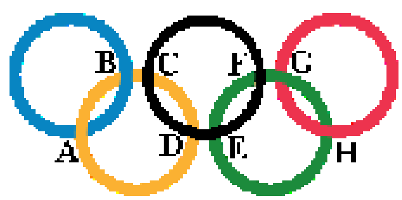
$$\{\{c_i,c_{i+1}\}\ :\ i<m\}$$

illetve a

$$\{\{c_i,c_{i+1}\}\ :\ i<m\}\cup\{c_i,c_{i+1}\}$$

élek sorozata egyszeresen kiadja a G gráf E éleinek halmazát. $\square$





Megjegyezések: Nem részgráf.

"Rajzoljuk meg egy vonallal."

"Kínai postás problémája"

1. Tétel (**Euler**, 1736): *Tetszőleges G gráfban pontosan akkor van* Euler **-kör**, *ha a gráf*
i) *minden csúcsának fokszáma páros, és*
ii) *izolált pontoktól eltekintve összefüggő .*

Eml: $v\in V$ **izolált** ha $\delta(v)=0$.

Bizonyítás:
$\boxed{\Rightarrow}$ Ha van Euler- kör, akkor izolált pontok kivételével minden csúcsot a körön felfűztünk.
Az élek bejárásakor minden csúcsnál ugyanannyiszor lépünk ki mint be (hurokéleknél is).

$\boxed{\Leftarrow}$ Teljes indukcióval bizonyítunk (az *élek* számára) = polinomiális (gyors) algoritmus.

Tetszőleges csúcs $v_0\in V$, start.

Induljunk el v_0 -ból tetszőleges éleken keresztül séta (út), amíg el nem akadunk.

Egyetlen élen se menjünk keresztül több mint egyszer.

Hol akadhatunk el? Csak v_0 -nál. Jelöljük ezt a kört C_0 -al.

Hagyjuk el a G gráfból C_0 éleit (és a keletkezett izolált csúcsokat).

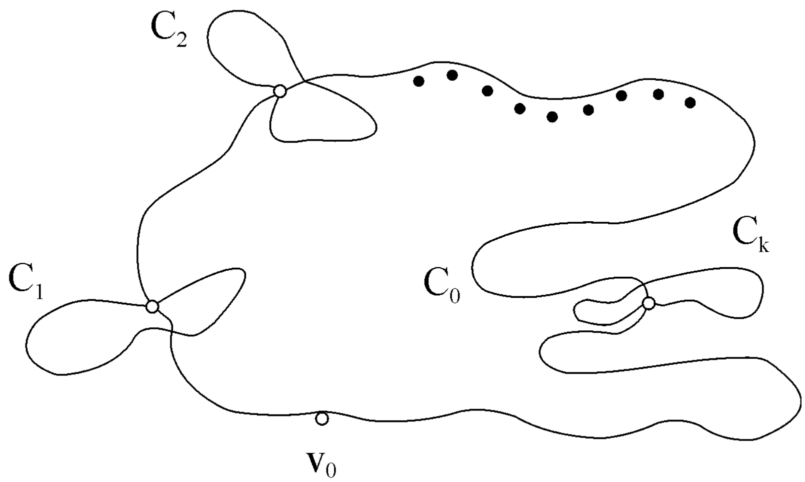
A megmaradt gráf komponensei $G_1, ..., G_k$.

Összefüggőek és minden fokszám páros (maradt), tehát indukciós lépés: $C_1, ..., C_k$ Euler - körök.

Kell: C_0 és $C_1, ..., C_k$ körökből *egyetlen* kör.

Segédállítás (Lemma): *C_0 -nak mindegyik C_i körrel van (legalább egy) közös csúcspontja.* $\square$

=> A C_0 és $C_1, ..., C_k$ köröket felfűzhetjük egyetlen nagy körré:



$\square$

Algoritmus: fentebb és alább.

Külön Tétel:

2. Tétel (Euler)**:** *Tetszőleges G gráfban pontosan akkor van* Euler **-út**, *ha a gráf összefüggő (izolált pontoktól eltekintve) és a páratlan fokú csúcsok száma* 0 *vagy* 2 .

Bizonyítás: Ha 0 akkor előző Tétel.

Ha $a, b \in V$ két páratlan fokú csúcs, akkor bővítsük a gráfot egy új $\{a, b\}$ éllel.

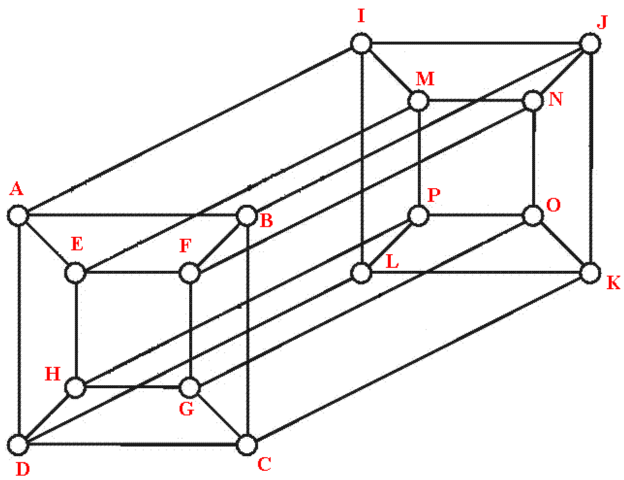
Minden csúcs fokszáma páros lesz.

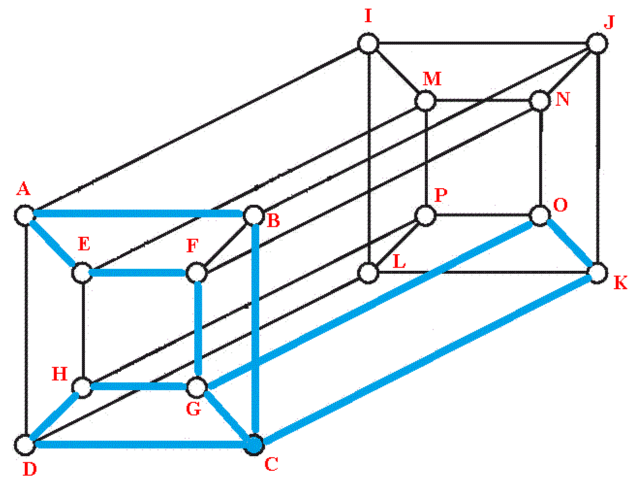
Előző tétel szerint van/találtunk Euler -kört.

Az $\{a, b\}$ élt elhagyva egy Euler -utat kapunk. $\square$

Sőt: *Az Euler -út végpontjai a páratlan fokú csúcsok.*

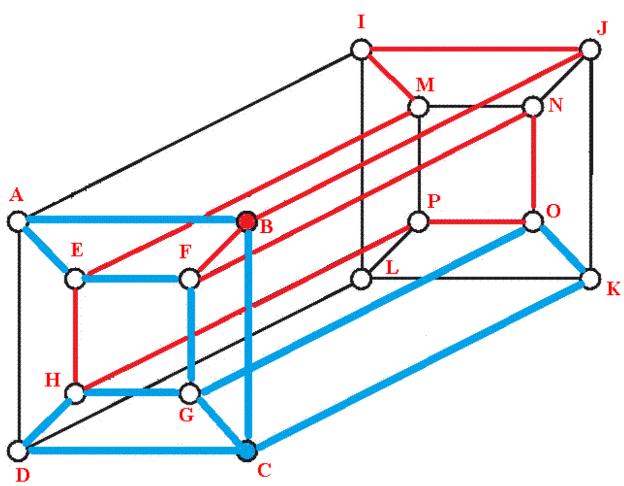
Példa

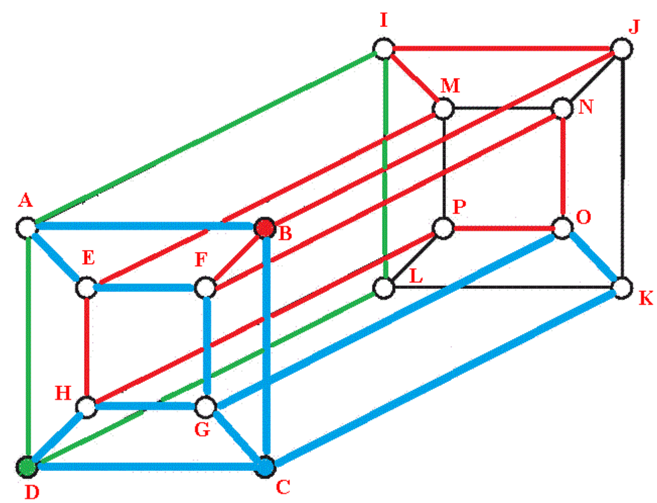




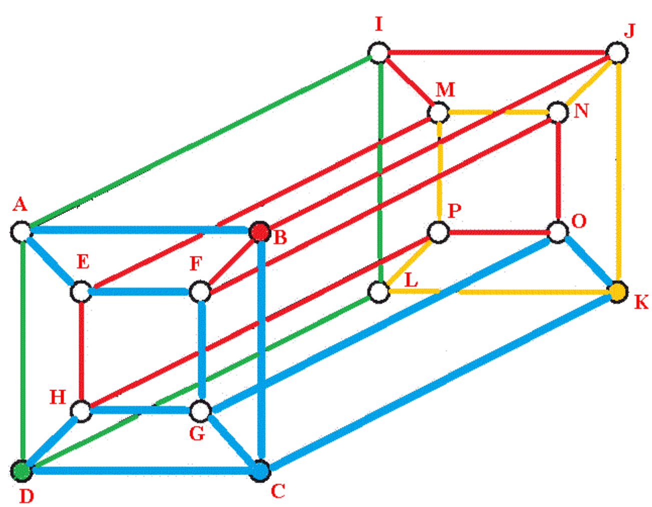
H_4 **kockagráf** **Első kör:** C D H G F E A B C G O K C

További körök:





B J I M E H P O N F B **D A I L D**

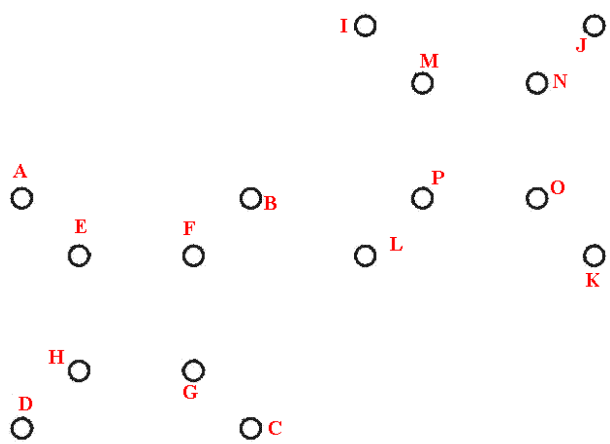


K J N M P L K

Tehát az összefűzött kör:

C D=D A I L D H G F E A B=B J I M E H P O N F B C G O K=K J N M P L K C

Rekonstuálható:



C-D-A-I-L-D-H-G-F-E-A-B-J-I-M-E-H-P-O-N-F-B-C-G-O-K-J-N-M-P-L-K-C

Házi Feladat: Az alábbi dominókövekből lehet-e egy olyan kört kirakni, hogy mindegyik követ felhasználjuk, és a csatlakozó köveken ugyanannyi pötty legyen az érintkezési felükön?

$\boxed{6 \mid 6}$, $\boxed{3 \mid 3}$, $\boxed{5 \mid 2}$, $\boxed{1 \mid 1}$, $\boxed{4 \mid 3}$, $\boxed{1 \mid 2}$, $\boxed{2 \mid 6}$, $\boxed{1 \mid 5}$, $\boxed{5 \mid 3}$, $\boxed{4 \mid 1}$