Mathematics of Poker

Bill Chen, Jerrod Ankenman

Математика покера

Блок №2

(главы 10 – 21)

Перевод: OlegK

Вычитка: Sun_Tczy

Оглавление

Глава 10

Встреча с идеальным оппонентом: Теория игр

До этого момента мы разбирали различные способы эксплуатации уязвимых мест в стратегиях наших оппонентов. Вполне может быть, что в какой-то момент мы окажемся за одним столом с игроками, которые даже не подумают о подстройках – тогда нам останется только продолжать эксплуатировать их и готовить сумки для денег. Однако чаще всего нам будут противостоять как слабые, таки и сильные оппоненты, не говоря уже о турнирах, где у нас нет никакой возможности выбрать состав стола. И в худшем случае мы можем оказаться в игре с люльми, которые гораздо сильнее нас.

Что тогда? Мы можем и дальше пытаться сл эксплуатации, но за таким столом это вряд ли окажется хорошей идеей. С другой стороны, большинство игроков используют эту стратегию попросту ввиду отсутствия лучших альтернатив.

Теперь представьте себе другую ситуацию: мы столкнулись с оппонентом, которого раньше никогда не видели. И снова многие предпочтут играть в обычной эксплуатационной манере, попутно пытаясь получить новую информацию и подстроиться соответствующим образом.

Однако в подобных случаях мы рекомендуем использовать несколько иной подход. Действительно, против неизвестных или сильных игроков имеет смысл вывести «стандартную» стратегию, при которой мы хоть и потеряем незначительную часть ожидаемого выигрыша (по сравнению со стратегией эксплуатации), но все попытки оппонентов эксплуатировать нас ни к чему не приведут.

Этот подход к покеру берет свои начала из теории игр, применение которой мы будем изучать в этом разделе книги. Во второй части мы говорили об ***играх*** и ***стратегиях*** **–** фактически, вся теория игр как раз и сосредоточена в этих двух понятиях. К слову, данный раздел математики весьма обширен и применяется во многих других областях знания. Однако поскольку наша книга посвящена покеру, мы не будем затрагивать многие интересные проблемы, которые изучает теория игр, и сосредоточим ваше внимание исключительно на тех ее разделах, которые могут найти свое применение за покерным столом.

Как вы можете помнить, во второй части мы дали следующее определение понятию «игра»:

- Присутствуют два или более участников
- Как минимум одному из участников предоставлен выбор действий
- Игра обладает определенным набором исходов для каждого из участников
- Исход игры зависит от действий, предпринятых участниками

Совокупность действий, совершаемых игроком, и есть определение ***стратегии***, а «исход» на языке теории игр означает ***выплату*** (результат). Каждое возможное действие игрока называется ***стратегическим выбором*** (или стратегической возможностью).

Примечание от переводчика: Выплата (также встречаются определения платеж, выигрыш) является ключевым понятием в теории игр. Она составляет основу так называемой платежной матрицы, которая говорит о том, какой результат получит каждый из участников при игре по определенной стратегии.

Таким образом, выплата есть результат игры по одной из стратегий для каждого из участников

Поясним и другие понятия. Так, если на флопе мы можем сделать Колл, Чек или Рейз, то каждое из этих действий будет называться стратегическим выбором. А совокупность выбранных действий (например, Колл на флопе и Бет на терне) будет называться стратегией.

В качестве примера давайте рассмотрим одну из простейших игр – «Четное и Нечетное». Участвуют два игрока, каждый из них прячет за спиной руку и либо кладет в нее 1 рубль, либо оставляет пустой. Затем они одновременно раскрывают ладони. Игрок А выигрывает 1 единицу, если сумма оказывается четной, а его оппонент – если нечетной.

Таблица ниже называется ***матрицей выплат*** (или платежной матрицей) для рассматриваемой нами игры. Стратегии игрока Б отражены сверху, а игрока А – слева. На пересечении находятся выплаты для каждого из игроков (первой идет выплата для игрока А, второй – для игрока Б).

Пример 10.1 – Четное и Нечетное

	Игрок Б	
Игрок А	Ничего	1 рубль
Ничего	(1, -1)	(-1, 1)
1 рубль	(-1, 1)	(1, -1)

Игры обладают интересными свойствами. Некоторые из них, как например «Четное и Нечетное» или покер без рейка, называются играми с постоянной суммой. В них сумма всех выплат всегда равна определенной константе. Все подобные игры можно свести к так называемым ***играм с нулевой суммой***, где сложение выплат дает ноль. К слову, покер как раз относится к этому классу игр.

Также игры могут быть ***последовательными*** или ***одновременными***. В рассмотренной нами игре «Четное и Нечетное», действия участников являются одновременными, однако, например, в шахматах игроки действуют один за другим. В теории, мы можем упростить последовательную игру до одновременной, обязав всех игроков детально описать свои стратегии (включая все возможные древа решений). Однако различие между этими двумя классами игр играет первостепенную роль в таком понятии как «смешанные стратегии» (мы поговорим о них чуть ниже).

Еще одно важное свойство, которое следует отметить – ***скрытая информация***. Это информация, которая доступна только ограниченному количеству игроков. Например, в шахматах оба участника знают о ходе игры абсолютно все. Это детерминированная игра, поскольку в теории мы можем просчитать каждое возможное древо решений и выбрать оптимальный ход. С другой стороны, нарды – это недетерминированная игра, но тоже с полной информацией. Так, при каждом броске кубиков в древе решений появляются новые ветви, однако вероятностная сторона этого события не является тайной для игроков. Иными словами, идеальная игра в нардах не гарантирует победу исключительно из-за элемента случайности, при этом здесь нет информации, которая была бы известна только одному игроку.

Покер, в свою очередь, основан на скрытой информации, поскольку знание руки оппонента является «Граалем» для любого игрока. Таким образом, в покере наша цель заключается в извлечении прибыли с использованием скрытой информации. Самая важная черта подобных игр заключается в том, что они могут содержать ***смешанные стратегии***. Иными словами, это стратегии, которые допускают два или более действий в отдельно взятой ситуации (например, «рейз 20% раз, фолд 80% раз). Смешанные оптимальные стратегии присущи только последовательными играм, а также играм с неполной информацией.

В этой главе мы будем изучать игры с нулевой суммой с двумя участниками (наподобие «Четного и Нечетного»), поскольку с точки зрения теории игр именно они являются наиболее интересными и показательными. Как мы уже отмечали выше, сумма выплат игроков будет равна нулю – игрок А выиграет столько же, сколько игрок Б проиграет, и наоборот. Приведенное ниже определение для «оптимальных стратегий» применимо только для игр с нулевой сумой с двумя участниками.

Введем понятие ***пары стратегий*** – это совокупность стратегий игрока А и игрока Б. В игре с нулевой суммой пара стратегий считается ***оптимальной***, если ни один из игроков не может увеличить свое математическое ожидание путем одностороннего изменения своей стратегии. Стратегия для одного из игроков считается оптимальной, если она входит в любую из пар оптимальных стратегий.

Представьте, что вы играете против сверхчеловека. Для удобства, мы будем называть его ***идеальным оппонентом***. Он знает абсолютно все о вашей игре и всегда действует против вас по стратегии максимальной эксплуатации. Если вы решите изменить свою стратегию, идеальный оппонент сразу же подстроится и продолжит вас эксплуатировать. Стратегия, обладающая наибольшим математическим ожиданием против такого игрока, и называется оптимальной. Иными словами:

Пара оптимальных стратегий включает в себя стратегии, которые максимально эксплуатируют друг друга.

Стоит отметить, что мы с особой тщательностью вывели определение оптимальности для целей этой главы, поскольку многие науки вкладывают в этот термин несколько иной смысл. Здесь и далее мы будем использовать его только в описанном выше узком контексте и только применительно к стратегиям.

Здесь стоит сделать важную оговорку, хотя мы и сказали, что будем применять термин «оптимальная стратегия» только к играм с нулевой суммой. Дело в том, что мы можем вывести стратегии, при которых ни один из игроков не сможет улучшить свое ожидание и для игр с плавающей суммой, а также многопользовательских игр. Стратегии, удовлетворяющие этому условию, называются ***равновесием Нэша***. Доказано, что все игры с большим количеством участников с конечными матрицами выплат обладают как минимум одной точкой равновесия. Более того, в некоторых играх точек равновесия настолько много, что их анализ становится практически невозможным. Мы еще вернемся к этой теме в пятой части нашей книги.

Оптимальные стратегии в ***играх с нулевой суммой с двумя игроками*** обладают следующими свойствами:

- Если условия игры допускают использование смешанных стратегий (игрок может выбрать действие X в 60% случаев, а действие Y – в оставшихся 40%), то всегда можно вывести пару оптимальных стратегий.
- Как следствие, если оптимальная стратегия содержит в себе смешанную стратегию, то все ее ветви должны иметь одинаковое ожидание против оптимальной стратегии оппонента. Поэтому оптимальные стратегии в покере никогда не подразумевают совершение действий, которые жертвуют часть математического ожидания в определенной ситуации ради «запутывания» оппонента. Если найденная нами смешанная стратегия подразумевает несколько линий розыгрыша в раздаче, все они будут обладать одинаковым математическим ожиданием. В противном случае мы могли бы просто начать играть по линии с более высоким ожиданием, и таким образом улучшили бы свою стратегию, при том, что стратегия оппонента останется неизменной (что противоречит определению оптимальной стратегии).

Часто в очень простых играх оптимальная стратегия гарантирует нам лишь нулевое ожидание. Это происходит из-за того, что такие игры полностью симметричны.

Вернемся к нашей игре «Четное и Нечетное». Первое, что стоит отметить - в ней игрок А должен стараться повторить стратегию своего оппонента.

> *Примечание переводчика: Игроку А необходимо повторить стратегию своего оппонента, поскольку в таком случае сумма рук будет равна четному числу. Например, если игрок Б решает оставлять свою руку пустой всегда, то игрок А должен делать то же самое.*

Однако существует несколько подходов к этой игре. Первый, естественно, предполагает, что участники будут стараться «передумать» друг друга, и тогда преимущество получит тот, кому лучше удается читать мысли своего оппонента.

Однако давайте предположим, что игрок Б значительно уступает своему визави и уж точно не сможет предсказать его действия. Тогда он может обратиться к оптимальной стратегии – для этого достаточно найти стратегию с максимальным математическим ожиданием для случая, когда ему противостоит идеальный оппонент.

Для начала нужно отметить, что игрок Б может играть по любой смешанной стратегии, состоящей из X% случаев, когда он оставляет руку пустой, и (1-X)% случаев, когда он кладет в нее один рубль. Очевидно, что чистые стратегии фактически являются частными случаями смешанных (где одно из действий совершается 0% раз).

Мы могли бы посчитать математическое ожидание для каждой возможной контрстратегии игрока А (которого мы будем считать идеальным оппонентом), однако, как мы уже показали во второй главе, наилучший результат может быть достигнут, если он будет следовать некой чистой стратегии. Так, например, ему следует всегда класть в свою руку один рубль, когда его оппонент делает то же самое более чем в 50% случаев.

Используя уравнение 1.11, получим формулу математического ожидания для игрока Б, если он оставляет свою руку пустой более чем в половине случаев:

> *Примечание от переводчика: Здесь «х» означает процент раз, когда игрок Б оставляет свою руку пустой. Все уравнения аналогичны уже рассмотренным в предыдущей части книги. Они предполагают игру против идеального оппонента, который будет играть по одной из чистых стратегий, максимально эксплуатирующих стратегию игрока Б.*

<B, x > 0.5 > = (-1) (x) + (1) (1-x)
<B, x > 0.5 > = 1 – 2x

Его ожидание в случае, когда он кладет в руку один рубль в половине случаев или чаще:

<B, x < 0.5 > = (-1) (1 - x) + (1) (x)
<B, x < 0.5 > = 2x -1

Как вы можете заметить, ожидаемый выигрыш игрока В против идеального оппонента почти всегда окажется отрицательным.

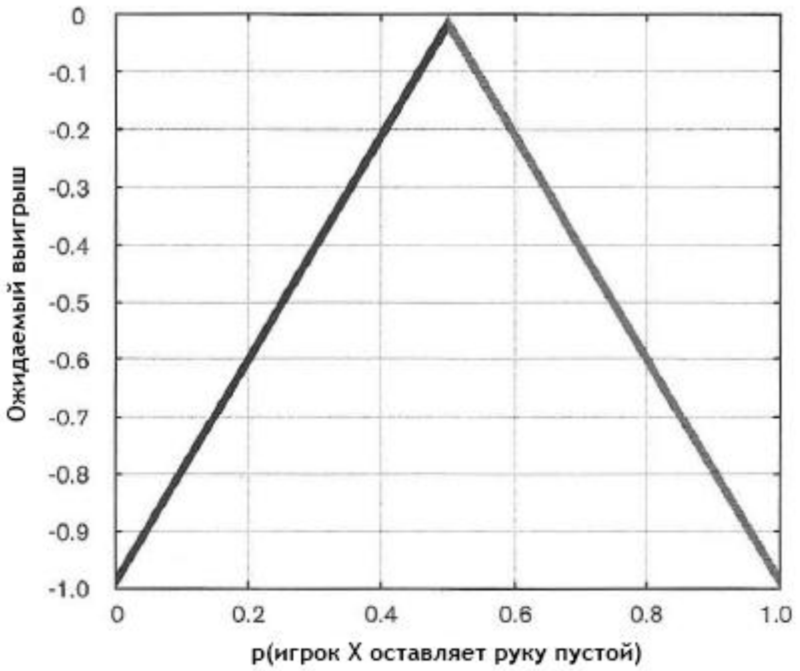


Рисунок 10.1. Ожидание игрок X в игре «Четное и Нечетное»

Так, когда x > 0.5, «1- 2x» меньше нуля, то же самое происходит и с «2x-1» при x < 0.5.

Однако в точке x = 0.5, оппонент может делать что угодно, при этом его математическое ожидание никак не изменится:

<Оппонент, пустая рука> = (-1)(0.5) + (1)(0.5)
<Оппонент, пустая рука> = 0

<Оппонент, один рубль> = (-1)(0.5) + (1)(0.5)
<Оппонент, один рубль> = 0

Это наивысшее ожидание, на которое игрок Б может рассчитывать против идеального оппонента. Таким образом, оптимальная стратегия для него состоит в том, чтобы оставлять свою руку пустой 50% раз, а остальные 50% - класть в нее один рубль. В этом случае он гарантирует себе нулевое ожидание вне зависимости от стратегии оппонента. При этом обязательное условие – случайность выбора действия. Здесь он может обратиться к монетке, костям или же к осцилляциям частиц и радиоактивному распаду, если он по-настоящему хочет избежать эксплуатации.

Пример 10.2 – Камень, ножницы, бумага

Теперь давайте обратимся к похожей, но несколько более сложной игре – «Камень, ножницы, бумага». В ней каждый из участников может показать либо камень, либо ножницы, либо бумагу. Платежная матрица для нее выглядит следующим образом:

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Бумага	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
Ножницы	(-1,1)	(1, -1)	(0, 0)

В этой книге мы будем иметь дело преимущественно с играми с нулевой суммой. Если же на нашем пути попадется игра, где сумма выплат не равна нулю, мы специально поясним это.

> *Примечание от переводчика: Авторы посчитали важным сделать такое замечание, поскольку простейшие игры с нулевой суммой симметричны, и мы можем в платежной матрице указывать выплаты не для обоих участников, а только для одного, поскольку выплата для его оппонента будет точно такой же, но с противоположным знаком.*

Эта матрица идентична той, что мы привели выше, однако теперь во всех ячейках мы указываем только выплаты для игрока А:

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	1
Бумага	+1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0

Если игрок Б хочет гарантировать себе нулевое ожидание, он может применять стратегию $\{{}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3\}$ - ее можно вывести точно также, как оптимальную стратегию для «Четного и Нечетного». Тогда вне зависимости от того, что будет показывать игрок А, он выиграет 1 единицу $1/3$ раз, проиграет 1 единицу $1/3$ раз, а оставшиеся $1/3$ будет ничья. Любая другая стратегия даст возможность идеальному оппоненту эксплуатировать его стратегию.

В подобных играх у идеального оппонента часто есть выбор из нескольких стратегий эксплуатации. Однако при некой стратегии S (со стороны игрока Б) достигается ***точка безразличия***, где математическое ожидание различных стратегических выборов для идеального оппонента становится одинаковым. Иными словами, он становится безразличным к выбору стратегии эксплуатации. Таким образом, стратегия для игрока Б в точке безразличия будет оптимальной.

Почему это понятие так важно? Фактически, точка безразличия позволяет нам говорить о том, что мы уже никак не можем улучшить свою стратегию. Как вы можете помнить, одним из требований к оптимальной стратегии была невозможность одностороннего увеличения ожидания любым из игроков. Когда нашему оппоненту все равно, какую стратегию применять (как в точке безразличия) это условие не может быть нарушено.

Примечание от переводчика: Этот абзац очень важен для понимания оптимальных стратегий. Для объяснения я буду использовать игру «Четное и Нечетное», так как она немного проще.

Сначала отметим, что при поиске оптимальной стратегии мы всегда думаем, что играем против «идеального оппонента», который в каждый момент времени знает о нашей стратегии и эксплуатирует ее соответствующим образом.

Как уже было отмечено при разборе игры «Четное и нечетное» наилучшей стратегией эксплуатации, когда мы точно знаем, что делает наш оппонент, является некая чистая стратегия. В «Четном и Нечетном» таких чистых стратегий было две: всегда оставлять руку пустой или всегда класть в нее рубль.

В точке безразличия (для той игры это была точка 0.5) идеальному оппоненту становится все равно, по какой из этих чистых стратегий играть. Действительно, в этой точке ожидание от каждой из них одинаково, то и разницы совсем нет. Таким образом, идеальный оппонент не может улучшить свою стратегию.

Для нас же точка безразличия будет значить, что если мы хоть немного отклонимся от такой стратегии, то идеальный оппонент моментально этим воспользуется, ведь в таком случае его стратегические опции больше не будут равны по математическому ожиданию. Проще говоря, и мы в этой точке также никак не можем *улучшить свою стратегию.*

В итоге, в точке безразличия мы получили главное условие для пары оптимальных стратегий – ни один из участников игры не может улучшить свою стратегию в одностороннем порядке.

Давайте рассмотрим несколько усложненную версию игры «Камень, Ножницы, Бумага», где за выигрыш с ножницами игроку причитается бонус. Назовем ее «Камень, Ножницы, Бумага (S)». Новая платежная матрица примет вид:

Пример 10.3 – Камень, Ножницы, Бумага (S)

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	+1
Бумага	+1	0	-2
Ножницы	-1	+2	0

Теперь стратегия $\{{}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{3}\}$ может быть эксплуатирована оппонентом, играющим по {0, 0, 1} – такая стратегия обеспечит ему математическое ожидание в $+{}^{1}/_{3}$. Однако игрок А может гарантировать нулевое ожидание, если сделает своего оппонента безразличным к выбору стратегического варианта.

Пусть стратегия игрока А – некая *{a, b, c}* (a – камень, b – бумага, c – ножницы). Тогда он должен стремиться сделать математическое ожидание от разных стратегических выборов для игрока Б одинаковым. Используем уравнение 1.11, получим:

<Б, камень> = (0)(a) + (-1)(b) + (1)(c)
<Б, камень> = c - b

<Б, бумага> = (1)(a) + (0)(b) + (-2)(c)
<Б, бумага> = a - 2c

<Б, ножницы> = (-1)(a) + (2)(b) + (0)(c)
<Б, ножницы> = 2b - a

Мы можем составить систему уравнений и решить ее для каждого из неизвестных. Получим *a = 2b=2c*, что фактически равно стратегии $\{{}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{4}\}$. Мы также можем косвенно доказать, что это оптимальная стратегия. Во-первых, «Камень, Ножницы, Бумага» - симметричная игра, так что игрок А может использовать в точности такую же стратегию, как и его оппонент. Поскольку сумма выплат равна нулю, ни одна стратегия в таком случае не будет иметь преимущества (ожидание обоих участников будет равно нулю). Если бы это было не так, то игра обладала бы ненулевой суммой. Таким образом, найденная нами стратегия является оптимальной.

Как вы могли заметить, хотя новая игра и предлагает дополнительный бонус за выигрыш с ножницами, оптимальная стратегия отнюдь не отдает им предпочтение. Когда привила игры поощряют определенное действие, оптимальные стратегии требуют не применять его чаще, а играть в противоположной манере. В покере, например, этот парадокс проявляется в том, что в больших банках нам следует блефовать реже, поскольку ценность успешного блефа существенно возрастает.

В рассмотренных нами случаях все стратегические варианты имели одинаковую силу – они являлись ключевыми элементами стратегии или контрстратегии. При этом ни одна опция не была настолько слабой, что нам бы пришлось в принципе отказаться от ее использования. Однако в более сложных играх такое случается достаточно часто. Стратегия S называется ***доминируемой***, если существует некая стратегия S', для которой верно неравенство $<S'> \geq <S>$ для всех стратегий оппонента и $<S'> > <S>$ хотя бы для одной стратегии оппонента. В таких случаях также говорят, что S' ***доминирует*** S. Не стоит путать этот термин с доминацией в покере.

Это определение должно быть интуитивно понятно – если у нас есть две стратегические возможности, причем одна из них в большинстве случаев имеет идентичное ожидание против большинства стратегий оппонента, а против некоторых - более высокое, нам всегда стоит выбирать именно это действие. Рассмотрим еще одну вариацию игры «Камень, Ножницы, Бумага». В ней, вместо того чтобы увеличивать выплату для определенных ситуаций, мы добавим новый стратегический выбор – «Цветок». Он проигрывает камню и ножницам, а если оппонент покажет бумагу или тоже цветок, то будет ничья.

Пример 10.4 - Камень, Ножницы, Бумага (F)

	Игрок Б			
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок
Камень	0	-1	+1	+1
Бумага	+1	0	-1	0
Ножницы	-1	+1	0	+1
Цветок	-1	0	-1	0

Очевидно, что никакая стратегия, включающая в себя цветок, не будет насколько же прибыльна, насколько стратегия с бумагой (вместо цветка). Таким образом, цветок оказывается доминирован бумагой. Введем еще один термин – ***сильная доминация***; мы будем использовать его, когда математическое ожидание S'

строго больше (и никогда не равно) ожидания от S против всех возможных стратегий оппонента. Примером сильной доминации в покере может быть ситуация, когда вам сдают AA в большом блайнде, а оппонент ставит олл-ин на префлопе – здесь вне зависимости от стратегии оппонента колл будет всегда обладать большим ожиданием, чем фолд. Также должно быть ясно, что оптимальная стратегия не может содержать в себе сильно доминированные действия. В противном случае мы могли бы отказаться от них в пользу более прибыльных альтернатив и таким образом улучшили бы свое математическое ожидание в одностороннем порядке.

У каждого стратегического выбора есть своя ценность. Более того, можно сказать, что в игре с нулевой суммой для двух участников эта ценность всегда неотрицательна. Иными словами, добавление нового стратегического выбора не может уменьшить ожидание одного из участников, поскольку он может просто продолжать играть, как если бы все осталось по-прежнему. Однако построение стратегии с использованием нового действия может увеличить его ожидаемый выигрыш.

Еще один термин, который мы часто используем в отношении стратегий – «ко-оптимальный» (то есть близкий к оптимальному). Иногда оптимальная пара включает в себя множество различных стратегий, в том числе и доминируемые. Представьте, что мы играем в «Камень, Ножницы, Бумага, Цветок», но с дополнительным стратегическим выбором – «тупыми ножницами» (они выигрывают у бумаги, но проигрывают цветку и камню). Очевидно, что здесь тупые ножницы сильно доминированы обычными ножницами. С другой стороны, стратегии, использующие тупые ножницы вполне могут оказаться ко-оптимальными, поскольку могут входить в оптимальную пару стратегий. Объяснение простое: оптимальные стратегии никогда не включают в себя цветок, поэтому в теории тупые ножницы ничем не отличаются от обычных.

Однако в покере нас будут интересовать в основном недоминируемые оптимальные стратегии, поскольку одной из наших главных задач будет извлечение прибыли из ошибок оппонента.

Если в игре обнаруживаются доминируемые стратегии, мы можем упростить исходную платежную матрицу. Например, в предыдущем примере с тупыми ножницами она имела следующий вид:

	Игрок Б				
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок	Ножницы 2
Камень	0	-1	+1	+1	-1
Бумага	+1	0	-1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0	+1	0
Цветок	-1	0	-1	0	+1
Ножницы 2	-1	+1	0	-1	0

Тупые ножницы – явно доминируемая стратегия, поскольку обладает меньшими (или равными) выплатами по сравнению со стратегией для ножниц. Таким образом, можно говорить о доминации со стороны обычных ножниц. Тогда мы можем упростить эту игру, сказав, что ни один из игроков не может выбрать тупые ножницы (поскольку мы ищем именно оптимальную стратегию):

	Игрок Б			
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок
Камень	0	-1	+1	+1
Бумага	+1	0	-1	0
Ножницы	-1	+1	0	+1
Цветок	-1	0	-1	0

Мы получили матрицу для игры «Камень, Ножницы, Бумага, Цветок». Можем повторить алгоритм, определив цветок как доминируемый выбор:

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	+1
Бумага	+1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0

В конечном счете, мы вернусь к исходной матрице для игры «Камень, Ножницы, Бумага». Это значит, что решение для расширенной игры (с цветком и тупыми ножницами), идентично решению для ее оригинальной версии. Этот алгоритм еще не раз поможет нам при анализе игр, поскольку такие упрощения существенно уменьшают количество стратегий, требующих рассмотрения.

Игра G может быть упрощена до некой игры G' путем удаления доминируемых стратегических выборов для обоих игроков. Оптимальная пара стратегий для G' будет тождественна таковой для G.

Последняя игра, которую мы разберем в этой главе (а затем перейдем непосредственно к покерным играм), называется «Полицейский и Грабитель». В ней один участник будет «Полицейским» с двумя стратегическими возможностями – патрулировать или остаться дома. Другой же будет «Грабителем», который может либо отправиться грабить магазин, либо также остаться дома. В случае вылазки он выиграет 1 единицу, когда полицейский остается дома, и проиграет 1 единицу, если последний все же решит патрулировать. В свою очередь, полицейский потеряет 1 единицу, если никого не найдет, и ничего не потеряет, если ограбление не состоится, а он останется дома. И поскольку это игра с нулевой суммой, грабитель будет выигрывать 1 единицу, если останется дома, а полицейский решит патрулировать.

Платежная матрица для этой игры будет выглядеть следующим образом:

Пример 10.5 – Полицейский и Грабитель

	Грабитель	
Полицейский	Грабить	Остаться дома
Патрулировать	(1, -1)	(-1, 1)
Остаться дома	(-1, 1)	(0, 0)

Для того, чтобы найти оптимальные стратегии для этой игры, для начала нам нужно выбрать одного участника. Пусть это будет полицейский. По аналогии с нашими прошлыми расчетами, он будет x% раз патрулировать, а оставшееся время (1-x)% - оставаться дома:

$\langle$Грабитель, грабит$\rangle$ = (-1) (x) + (1) (1 - x)
$\langle$Грабитель, грабит$\rangle$ = 1 - 2x
$\langle$Грабитель, остается дома$\rangle$ = (1) (x) + 0 (1 - x)
$\langle$Грабитель, остается дома$\rangle$ = x

Точка безразличия для грабителя наступает тогда, когда эти два выражения равны. Получим:

$1 - 2x = x$
$x = {}^{1}/_{3}$

Примечание от переводчика: Почему мы выбрали полицейского, но решаем уравнения для грабителя? Дело в том, что наша основная задача – найти точку безразличия для оппонента. Но наша стратегия зависит от того, что делает оппонент. Поэтому после выбора полицейского мы обозначаем его элементы стратегии (патрулировать или остаться дома), и решаем уравнения для грабителя исходя из этих предположений. Таким образом, мы получим точку безразличия для грабителя, а вместе с ней и значения для названных параметров, при которых стратегия полицейского будет оптимальной.

Оптимальная стратегия для полицейского – патрулировать $^{1}/_{3}$ раз.

Теперь давайте разберем случай с грабителем. Если он x% раз решит грабить, то (1-x)% раз он станется дома. Получим:

<Полицейский, патрулирует> = (1)(x) + (-1)(1 - x)
<Полицейский, патрулирует> = 2x - 1
<Полицейский, остается дома> = (-1)(x) + 0(1 - x)
<Полицейский, остается дома> = - x

Найдем точку безразличия:

$$2x - 1 = -x$$
$$x = {}^{1}/_{3}$$

Как оказалось, оптимальная стратегия для грабителя – делать вылазку $^{1}/_{3}$ раз.

Найденные нами значения (полицейский патрулирует $^{1}/_{3}$ раз, грабитель делает вылазку в $^{1}/_{3}$ случаев) и являются оптимальными стратегиями для этой игры. Такие смешанные стратегии становятся возможными, когда участники могут эксплуатировать чистые стратегии друг друга. В этой игре, если грабитель всегда решает грабить, полицейский может ответить стратегией патрулирования. Но в то же время, грабитель может подстроиться и остаться дома. Такие цепочки из эксплуатационных стратегий говорят о том, что оптимальная стратегия всегда будет смешанной.

> *Примечание от переводчика: Смешанные стратегии здесь понимаются не в контексте того, что грабитель и полицейский должны предпринимать определенные действия треть раз. Смешанная стратегия – это найденная нами оптимальная стратегия для полицейского, когда только он треть раз патрулирует, а две трети раз остается дома. То же самое верно и для грабителя.*

Представьте, что два игрока, X и Y, составляют свои стратегии на игру. Первый собирается использовать чистую стратегию A, а его оппонент будет эксплуатировать ее с помощью чистой стратегии B. Однако игрок X подстроится и начнет играть по стратегии C, на что получит ответ в виде стратегии D, которую можно эксплуатировать стратегией A. Такая цепочка свидетельствует о том, что для игрока X оптимальная стратегия будет включать в себя как A, так и C, а для игрока Y – B и D.

Если нам известно, какие действия будут являться частью смешанной оптимальной стратегии, мы легко можем решить такую игру, последовательно определяя точки безразличия для каждой из сторон. Однако если мы этого не знаем (такое тоже случается), то нам придется делать предположения о структуре оптимальной стратегии. Такие догадки иногда называются параметризацией – мы еще поговорим о ней в главах, где будем работать над решениями для [0,1] игр.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- Оптимальные стратегии в играх с нулевой суммой и двумя участниками обладают следующими свойствами: 1) если правилами разрешены смешанные стратегии, то всегда можно вывести оптимальную стратегию; 2) если оптимальная стратегия является смешанной, то ожидание от каждого всех входящих в нее стратегических выборов должно быть одинаковым (против оптимальной стратегии оппонента).

…………………………………………………………………………………………………..

- Если пара найденных стратегий является оптимальной, ни один из игроков не имеет возможности улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

…………………………………………………………………………………………………..

- Пара оптимальных стратегий состоит из стратегий, которые максимально эксплуатируют друг друга.

…………………………………………………………………………………………………..

- Оптимальные стратегии обладают максимальным математическим ожиданием против идеального оппонента.

…………………………………………………………………………………………………..

- Оптимальные стратегии не содержат в себе сильно доминированные действия.

…………………………………………………………………………………………………..

- Когда мы наблюдаем цикл чистых стратегий, это значит, что оптимальная стратегия будет смешанной.

…………………………………………………………………………………………………..

- Мы можем свести сложные игры к простым, последовательно исключая доминированные стратегии.

…………………………………………………………………………………………………..

- Как в играх с нулевой суммой с двумя игроками, так и в других играх, сочетания стратегий, при которых ни один из игроков не может увеличить свое ожидание в одностороннем порядке, называются равновесием Нэшаа. Все многопользовательские игры с конечными платежными матрицами имеют как минимум одну точку равновесия.

…………………………………………………………………………………………………..

Глава 11

Покер пополам: Игры на половине улицы

Мы приступаем к изучению решаемых покерных игр с серии вспомогательных игр, которые здесь и далее будем называть «играми на половине улицы». Им присущи следующие свойства:

- Первый игрок (игрок X) всегда делает чек
- Второй игрок (игрок Y) может либо сделать чек, либо сделать ставку, размер которой оговаривается в правилах игры
- Если ставка была сделана, то игрок X может ее уравнять, после чего происходит шоудаун. Кроме того, игрок X может скинуть свои карты (но не сделать рейз). Если игрок Y сделал чек, то участники игры вскрывают свои карты.

Здесь мы воспользуемся данным ранее определением цены игры. Это математическое ожидание для игрока Y при условии, что он и его оппонент играют оптимально. Также мы будем принимать в расчет только деньги, которые в результате неких действий в игре перешли от одного участника к другому. Иными словами, предметом нашего анализа в большинстве случаев будет ***экс-шоудаун вэлью***. Оно включает в себя ставки и коллы, сделанные на рассматриваемой улице, а также переход банка от одного игрока к другому в результате успешного блефа.

Дело в том, что нас не интересует ни ожидание игроков «до того как», ни то как строился банк. Скорее, мы будем стараться определить математическое ожидание от действий участников в анализируемой ситуации.

Также стоит отметить, что игрок Y не может иметь отрицательное ожидание в играх на половине улицы, поскольку ему всегда гарантировано как минимум нулевое экс-шоудаун вэлью в случае чека (в этом случае деньги не переходят от одного игрока к другому, и ни один из них не забирает банк после успешного блефа).

Игры на половине улицы обладают исключительно важным свойством: их можно решить. Более того, мы можем вывести оптимальные стратегии фактически для любой игры на половине улицы, поскольку в целом они достаточно примитивны. Как мы покажем несколько позже, игры на нескольких улицах часто окажутся неразрешимыми, и для них мы сможем получить лишь весьма приблизительные ответы. Сейчас же важно понять, что возможность решить даже простую игру является огромным преимуществом, поскольку полученные результаты можно затем использовать для анализа более сложных ситуаций.

В качестве введения мы рассмотрим ***игру против ясновидящего***. Мы будем называть участников игры ***частично ясновидящими***, если они могут видеть карты оппонентов, но не могут знать, какие карты выйдут на стол, и просто ***ясновидящими***, если им известно и то, и то. В нашем первом примере новые карты на стол выкладываться не будут, так что выбор конкретного определения не столь важен.

Пример 11.1 – Игра с ясновидящим

- Игра на половине улицы
- Размер банка – *P* единиц
- Размер ставки – 1 единица
- Игрок Y ясновидящий

Скрытая рука игрока Y случайным образом сдается из диапазона, состоящего наполовину из натсов (которые всегда выиграют), наполовину из блефов (которые всегда проигрывают руке игрока X).

Очевидно, что в этой игре участникам нужно принять только одно решение. Так, игрок Y должен определиться, с каким диапазоном он будет делать бет, а его оппонент - решить, с какими руками он будет уравнивать. Стоит отметить, что «диапазон» игрока X будет состоять из одной единственной руки. Причем никакого противоречия здесь нет – смешанные стратегии в равной степени применимы как для отдельных рук, так и для диапазонов.

Игрок Y обладает значительным информационным преимуществом – он может делать вэлью беты со всеми натсами, и блефовать со своими слабейшими руками. Причем каждый раз он будет точно знать, что ему нужно делать.

Матрица экс-шоудаун выплат для этой игры будет выглядеть следующим образом (для игрока Y):

Игрок Y	Игрок X	Чек-Колл	Чек-Фолд
Натсы	Бет	+1	0
	Чек	0	0
Блефы	Бет	-1	+*P*
	Чек	0	0

Для начала рассмотрим несколько чистых стратегий. Предположим, что игрок Y ставит на вэлью со всеми сильными руками, но делает чек со всеми блефами. Тогда игрок X ответит стратегией фолда со всеми своим диапазоном. Однако его оппонент может начать ставить все свои руки без исключения. В таком случае игрок X может предложить контрстратрегию: колл со всем диапазоном, а игроку Y останется лишь вернуться к своей первоначальной стратегии (бет со всеми натсами, чек со всеми блефами).

В результате получаем уже знакомый нам цикл чистых стратегий, который, в свою очередь, означает, что оптимальные стратегии в рассматриваемой игре будут смешанными. Для того, чтобы определить эти стратегии, нам нужно ответить на два вопроса: как часто игрок X должен уравнивать, и как часто игроку Y стоит блефовать.

Пусть c – процент рук, с которыми игрок X будет делать колл, а b – частота блефа для игрока Y.

Когда игрок X следует оптимальной стратегии, его оппонент должен быть безразличен к блефу. Иными словами, в этом случае чек и блеф с мертвой рукой для игрока Y должны обладать одинаковым ожиданием. Если блеф сработает, игрок Y заберет весь банк (P ставок), но потеряет одну единицу в случае колла. Тогда:

(банк) (частота фолда игрока X) = (ставка) (частота колла игрока X)

$$P\,(1 - c) = 1\,c$$
$$c = P\ /\ (P + 1)$$

Как вы можете заметить, частота колла игрока X будет расти вместе с увеличением размера банка. Это следствие более привлекательных шансов банка, а также ограниченного размера ставки – фактически, игрок X должен будет чаще уравнивать, чтобы помешать оппоненту забрать большой банк маленькой ставкой.

В свою очередь, игрок Y должен блефовать достаточно часто, чтобы игроку X было все равно: уравнивать или скидывать свою руку. Игрок X будет терять одну ставку против вэлью рук и выигрывать $P + 1$ против блефов.

$$1 = (P + 1)\,b$$
$$b = 1\ /\ (P + 1)$$

Величина $1\ /\ (P + 1)$ чрезвычайно важна в покерном анализе. Мы введем для нее специальное обозначение, которое будем использовать и в дальнейшем: **α** (альфа).

$$\boldsymbol{\alpha = 1\ /\ (P + 1)} \text{ (для лимитных игр)} \qquad \textbf{(11.1)}$$

Игрок X должен сделать своего оппонента безразличным к блефу, для этого он будет уравнивать ставки $P\ /\ (P + 1)$ раз или $1 - \alpha$. Соответственно, мы можем сказать, что α – это частота фолда игрока X на ставку оппонента.

Игрок Y должен блефовать α раз со своими мертвыми руками, а поскольку с натсами он будет ставить абсолютно всегда, то α также задает отношение блефов к вэлью бетам при котором оппоненту (в нашем случае, игроку X) будет все равно, что делать: фолд или колл.

$$1 - \alpha = 1 - 1/(P + 1) \qquad \textbf{(11.2)}$$
$$1 - \alpha = P\ /\ (P + 1) \text{ (для лимитных игр)}$$

Мы можем обобщить полученные выражения для случаев со ставками произвольного размера:

$$\boldsymbol{\alpha = s\ /\ (1 + s)} \text{ (для ставок произвольного размера)} \qquad \textbf{(11.3)}$$

Здесь s – это отношение размера ставки к банку (например, ставя \$50 в банк \$100, получаем $s = ½$)

Из формулы расчета α следует, что игрок Y должен редко блефовать в больших банках. На первый взгляд, это противоречит здравому смыслу, однако такая закономерность является важным принципом оптимальной игры:

Блеф в оптимальной стратегии часто не является прибыльным действием сам по себе. Вместо этого, комбинация блефов и вэлью бетов должна гарантировать оптимальной стратегии некое ожидание вне зависимости от того, как реагирует оппонент. Частые фолды сделают блефы в оптимальной стратегии более прибыльными, а частые коллы – напротив, вэлью беты.

Мы получили пару оптимальных стратегий для рассматриваемой игры:

- Игрок Y ставит со всеми натсами и блефует с α мертвых рук (или α/2 от всего диапазона).
- Игрок X уравнивает с 1 – α всех рук.

Экс-шоудаун ожидание для игрока Y будет следующим. Он выигрывает одну ставку, когда ставит на вэлью (таких рук в его диапазоне ровно половина) и получает колл. Кроме того, удачный блеф заработает ему весь банк, в противном случае он проиграет одну единицу. Как мы уже определили, игрок X будет уравнивать достаточно часто, чтобы игрок Y был безразличен к блефу (ожидание от них будет равно нулю). Получим:

$$\langle Y\rangle = \text{(частота вэлью бетов) (размер ставки) (частота колла)}$$
$$\langle Y\rangle = (1/2)\ (P\ /\ (P + 1))$$
$$\langle Y\rangle = P\ /\ 2(P + 1)$$

Как видите, с увеличением размера банка преимущество игрока Y становится все более весомым. Дело в том, что игроку X придется делать колл чаще (мы уже отмечали это выше), причем блефов в диапазоне его оппонента будет все меньше и меньше.

Распределение [0,1]

На протяжении всей третьей части книги мы будем анализировать различные игры, использующие ***распределение [0,1]***. В них в качестве покерных рук вместо отдельных карт используются случайные числа от 0 до 1. При этом каждый игрок имеет одинаковый шанс получить абсолютно любое число из этого диапазона. Для упрощения расчетов мы будем считать, что на вскрытии выиграют «руки», которые ближе к нулю. Соответственно, сильнейшей рукой окажется 0, а слабейшей – 1.

Основное отличие [0,1] игр от игр с ясновидящим заключается в том, что оптимальные стратегии не обязательно являются смешанными. Действительно, поскольку мы имеем дело с бесконечным множеством возможных рук, применение смешанных стратегий для некоторых из них будет лишено всякого смысла.

Поэтому мы будем рассматривать несколько отрезков, где применяются определенные чистые стратегии. Разделяют эти области так называемые ***пороги*** – точки на диапазоне [0,1], которые фиксируют границы между различными действиями.

> *Примечание от переводчика: Например, с руками от 0 до 0.4 мы будем ставить на вэлью, с руками от 0.4 до 1 – делать чек. Порогом здесь будет считаться точка 0.4 на отрезке от 0 до 1 (который задает силу рук).*

Решая [0,1] игры, мы часто будем применять следующий алгоритм:

1) Делаем догадку о структуре решения
2) Решаем игру, предполагая, что наша догадка является верной
3) Проверяем полученный ответ – если мы нашли оптимальную стратегию, то ни один из игроков не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Для наших предположений о структуре решения игры, мы будем использовать термин ***параметризация***. Например, решение гипотетической [0,1] игры может выглядеть следующим образом: игрок Y ставит со своими лучшим руками между 0 и y_1, чекает со средними руками между y_1 и y_0, и блефует с худшими руками между y_0 и 1. Другая параметризация может быть такой: игрок Y ставит с руками средней силы, но делает чек своими лучшими и худшими руками. В принципе, мы можем делать абсолютно любые предположения о структуре решения (задавать любую параметризацию).

Примечание от переводчика: Не стоит пугаться термина «параметризация». Фактически, авторы говорят, что мы должны попытаться угадать, как будет выглядеть решение игры, а затем составить соответствующие уравнения. Естественно, если окажется, что наши предположения оказались неверными, нам придется составлять новые уравнения для новой параметризации, и решать уже их. Но каждый раз в основе вычислений может лежать только один набор предположений о решении рассматриваемой игры.

После того, как мы определили параметризацию, следует составить уравнения, основанные на принципе безразличия на всех порогах и найти оптимальные стратегии. Иными словами, теперь каждый игрок будет стараться сделать своего оппонента безразличным к выбору действия на каждом из порогов.

Примечание от переводчика: Пусть в [0,1] игре порог 0.4 для игрока Y разделяет действия чек и бет. Тогда его оппонент, игрок X будет стараться уравнивать ставки настолько часто, чтобы игроку Y было все равно, что делать в точке 0.4.

Почему? Во-первых, из определения диапазона [0,1] очевидно, что сила какой-то конкретной руки будет близка к силе бесконечного множества ее соседей. Тогда и ожидание от розыгрыша всех рук должно подчиняться таким же законам, поскольку оно складывается из шоудаун и экс-шоудаун вэлью (последнее является константой). Проще говоря, математическое ожидание от Чек/Колла с рукой 0.6 окажется очень близким к ожиданию от руки 0.60000001.

Любой порог на интервале [0,1] разделяет две чистых стратегии, область одной из них находится слева, область другой – справа. Предположим, что мы рассматриваем некий порог *R*, причем на нем одно из действий имеет более высокое ожидание (то есть безразличие не достигается). Тогда можно утверждать, что в области второго действия (справа от *R*) мы можем найти несколько рук бесконечно близких к рассматриваемому порогу, с которыми мы можем начать играть по альтернативной линии (поскольку она приносит больше денег). Однако если это действительно так, то найденная стратегия (порог) не будет оптимальной, поскольку у нас будет возможность увеличить свой ожидаемый выигрыш в одностороннем порядке. Следовательно, оптимальные стратегии предполагают безразличие игрока к выбору действия на каждом из порогов.

Примечание от переводчика: Представьте, что у нас есть некая рука 0.6, и она является порогом на распределении [0,1], который отделяет чистую стратегию Чек от чистой стратегии Бет. То есть с руками из отрезка [0, 0.6] мы будем ставить, а со всеми остальными – делать чек. Однако при проверке решения оказывается, что именно для руки 0.6 ожидание от действия Бет выше, чем ожидание от действия Чек.

Причем не имеет значения насколько – скажем, на 0.00001 блайнда. Тогда мы можем найти некую руку из диапазона [0.6, 1], с которым согласно найденному решению мы должны делать чек, которая будет бесконечно близка к 0.6 – пусть это будет 0.600000000000000000002. И для нее ожидание от ставки также окажется выше ожидания от чека. Следовательно, найденная нами стратегия не является оптимальной, а точка 0.6 не является порогом для оптимальной стратегии, и нам нужно проверить свои расчеты.

В большинстве наших параметризаций будет присутствовать фиксированное количество порогов (между разными стратегиями). Для каждого порога мы составим ***уравнения безразличия*** - решая системы таких уравнений, мы сможем найти значения самих порогов и вывести оптимальную стратегию при заданной параметризации.

Если мы ошиблись с параметризацией, то в наших уравнениях будут встречаться различные противоречия, в том числе невозможные значения для порогов (например, порог в точке 1.5, которая выходит за рамки распределения [0,1] и т.п.).

Кроме того, иногда мы сможем найти оптимальную стратегию и доказать ее правильность, однако окажется, что для другой параметризации существует решение с еще более высоким математическим ожиданием. Поэтому для каждой параметризации также необходимо доказать, что именно полученный результат является лучшим выбором для каждого из игроков.

Пример 11.2 – [0,1] Игра #1

Это очень простая игра, состоящая из половины улицы, на которой игрок X всегда должен делать Чек/Колл против ставки фиксированного размера. Вполне очевидно, что в подобных играх размер банка не имеет никакого значения.

Здесь игрок X не принимает никаких решений, а стратегия игрока Y состоит только из одного выбора – бет или чек. Он знает, что его оппонент всегда сделает колл, так что в диапазоне ставки должны оказаться все руки с положительным или нулевым ожиданием против случайной руки.

Математическое ожидание (мы снова рассматриваем только экс-шоудаун) от ставки с некой рукой y будет следующим:

Руки игрока X	Исход
$[0, y]$	-1 (игрок X уравнивает с рукой лучше)
$[y, 1]$	+1 (игрок X уравнивает с рукой хуже)

Поскольку все числа в диапазоне [0,1] равномерно распределены, вероятность того, что у игрока X окажется некая рука x, равна длине рассматриваемого отрезка.

Примечание от переводчика: Очень важно понять смысл уравнения ниже. Фактически, мы считаем, что рука игрока Y фиксирована – он делает ставку с рукой y. Ставка сделана, теперь игрок X принимает решение. Как часто у него окажется рука лучше? Ровно y раз. Как часто у него окажется рука хуже? Ровно (1 – y) раз.

<Y, бет> = p(у игрока X лучшая рука) (-1) + p(у игрока X худшая рука) (+1)
<Y, бет> = (y – 0) (-1) + (1 – y) (1)
<Y, бет> = 1 – 2y

Теперь мы найдем все руки игрока Y, для которых математическое ожидание больше или равно 0 (альтернатива – чек, ожидание которого по экс-шоудауну равно нулю):

$1 - 2y >= 0$
$y <= ½$

Таким образом, игрок Y должен ставить с лучшей половиной своих рук. Когда рука игрока X будет попадать в интервал [0, ½], суммарное ожидание его оппонента будет равно нулю (поскольку вероятность получить руку из этого диапазона для каждого из игроков абсолютно одинаковой), а когда в интервал [½, 1], то игрок Y будет выигрывать одну ставку.

Полученный результат можно отобразить на графике:

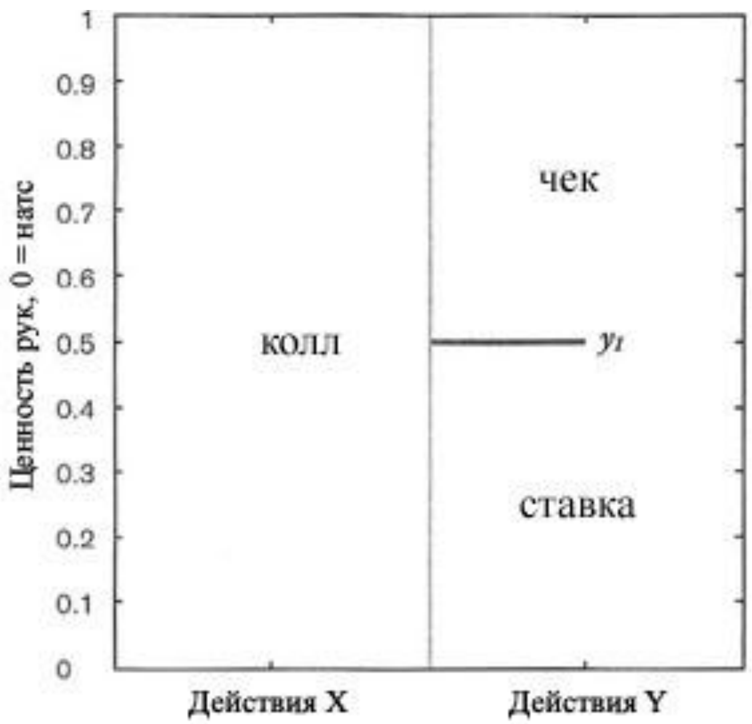


Рисунок 11.1. Игра #1 – Половина улицы, без фолдов

Цена игры (то есть ожидание игрока Y при условии, что он играет оптимально) равна ¼.

Эта простая игра отлично показывает идею распределения [0,1], а также дает некоторую пищу для размышлений. Так, из нее становится очевидным, что если наш оппонент не принимает никаких решений и играет по некой заранее определенной чистой стратегии, то оптимальной стратегией для нас будет максимизация собственного ожидания. Более того, если наш диапазон такой же сильный, как и диапазон оппонента (при условии, что мы не можем получить рейз, только колл), мы должны ставить с лучшей половиной рук.

Пример 11.3 – [0,1] Игра #2

В предыдущем примере мы установили специальное правило, которое обычно не встречается в покере – игрок X не имел возможности скинуть свою руку. Мы показали, что в игре «без фолдов» не существует блефов, а диапазон для ставки игрока Y просто состоит из лучших 50% его рук.

Однако покер – это игра, которая всегда ассоциируется с блефом, поэтому мы немного изменим условия из примера 11.2, разрешив игроку X делать фолд.

Как вы уже, наверное, поняли, размер банка снова начинает играть первостепенную роль, поскольку решение игрока X о колле полностью зависит от ожидаемого выигрыша (фактически – от шансов банка). Условимся, что банк составляет *P* единиц, а размер ставки равен одной единице.

В прошлом примере стратегия игрока Y выражалась одним единственным порогом. Однако в этой игре все будет несколько сложнее. Здесь и далее мы будем использовать следующие условные обозначения:

- x_n – порог между стратегиями, которые делают n-ую ставку и стратегиями, которые делают (n – 1) ставку на вэлью.
- x_0 – порог между блефом и чеком
- x_n* – порог между коллом n-ой ставки и фолдом на нее.

Так, в примере 11.2 стратегия игрока Y включала в себя только порог y_1 (между бетом и чеком), а порога y_0 не существовало (или мы можем считать, что он был равен 1). В то же время x_1* был равен 1, поскольку игрок X должен был каждый раз делать чек, а затем колл.

Примечание от переводчика: Мы можем считать, что y_0 в первой игре равно 1, поскольку диапазон для блефа всегда будет находиться справа от диапазона чека.

Объяснение весьма простое: мы можем делать чек с более сильными руками (и иногда выигрывать), в то время как блефовать в играх [0,1] имеет смысл с безнадежными руками. То есть диапазон для блефа будет находиться ближе к единице, а диапазон чека – к нулю.

Поскольку в предыдущем примере мы никогда не блефовали, то значения справа от 1 будут невозможными, соответственно и диапазона для блефа существовать не будет.

То же самое касается и порога колла для игрока X.

В этом примере в стратегии игрока X будет присутствовать порог x_1*, отделяющий диапазон колла (от сильнейшей руки, то есть 0, до x_1*) от диапазона фолда (от x_1* до слабейшей руки, то есть 1).

Мы можем показать, что в стратегию игрока Y войдут блефы, следующим образом.

Если оба игрока следуют оптимальным стратегиям, то x_1* будет выбран таким образом, чтобы максимизировать математическое ожидание против стратегии игрока Y. Давайте посмотрим, что произойдет, если игрок Y будет использовать точно такую же стратегию, как в предыдущей игре, ставя на интервале от 0 до y_1. Тогда лучшим ответом игрока X будет колл со всеми руками, которые имеют положительное ожидание против диапазона ставки.

Ожидание игрока X определяется его порогом колла. Так, он будет выигрывать ставку, когда у его оппонента окажется рука из интервала между y_1 и x_1*. И наоборот, если у игрока Y будет рука из интервала от 0 до x_1*, то игрок X потеряет одну ставку.

$$\langle X\rangle = (\text{размер банка в случае выигрыша})\,(\text{вероятность выигрыша}) - (\text{одна ставка})\,(\text{вероятность проигрыша})$$

$$\langle X\rangle = (P + 1)\,(y_1 - x_1^*) - 1(x_1^* - 0)$$

Примечание от переводчика: И снова мы имеем дело с тем же типом уравнения, которое было прокомментировано ранее. Игрок Y сделал ставку, и игрок X собирается его уравнивать. Как часто он выиграет? Когда его рука лучше, чем порог для ставки (поскольку вероятность получить любую руку одинакова для обоих игроков). Как часто он проиграет? Когда рука его оппонента лучше, чем его порог колла, а вероятность этого составляет x_1*.*

Важно понимать, что мы решаем это уравнение именно для ставки с пороговой рукой.

Очевидно, что уравнивать игрок X будет только когда его ожидание выше нуля:

$$(P + 1)(y_1 - x_1^*) - 1(x_1^*) > 0$$
$$(P + 1)(y_1) - (P + 2)\,x_1^* > 0$$
$$x_1^* < y_1(P + 1)/(P + 2)$$

Таким образом, игрок X будет уравнивать с некой частью диапазона для ставки его оппонента, причем отношение количества коллов игрока X к ставкам игрока Y задается выражением $(P + 1) / (P + 2)$.

Легко показать, что это верно. Пусть размер банка равен размеру ставки и составляет одну единицу. Для нулевого колла игроку X нужно иметь лучшую руку в трети случаев (согласно его шансам банка). В таком случае порог x_1* должен составлять две трети от интервала от 0 до y_1.

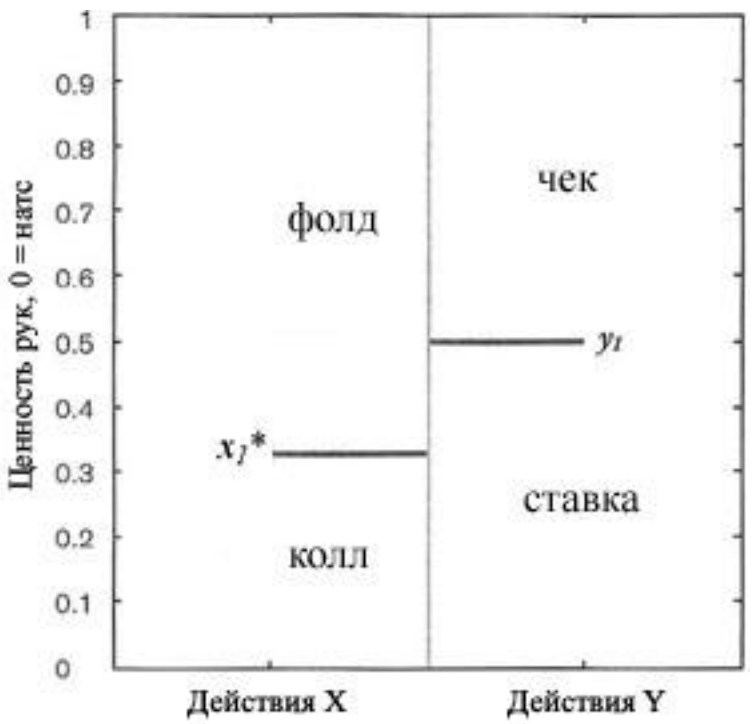


Рисунок 11.2. Неоптимальная стратегия для игрока Y в [0,1] Игре #2

Однако если игрок X будет следовать такой стратегии, то его оппонент сможет улучшить свое ожидание в одностороннем порядке. Для этого ему достаточно начать делать чек с руками в промежутке от x_1* до y_1, заменив их на равное количество рук в районе единицы. Поступая таким образом, он улучшает свое ожидание, заставляя игрока X скидывать значительно более сильную руку (по отношению ко всему диапазону ставки).

Значит, найденная нами стратегия не может считаться оптимальной и у игрока Y должен присутствовать диапазон для блефа.

Введем следующую параметризацию для игрока Y:

- Бет с диапазоном сильных рук от 0 до y_1.
- Чек с с диапазоном средних рук от y_1 до y_0.
- Бет с диапазоном слабых рук от y_0 до 1.

Также, для этой параметризации мы предполагаем, что x_1* лежит правее y_1.

> *Примечание от переводчика: Здесь есть очень существенное отличие от предыдущих игр – из-за вероятности блефа со стороны оппонента, игрок X вынужден делать колл с более широки диапазоном, чем диапазон для ставки у игрока Y.*

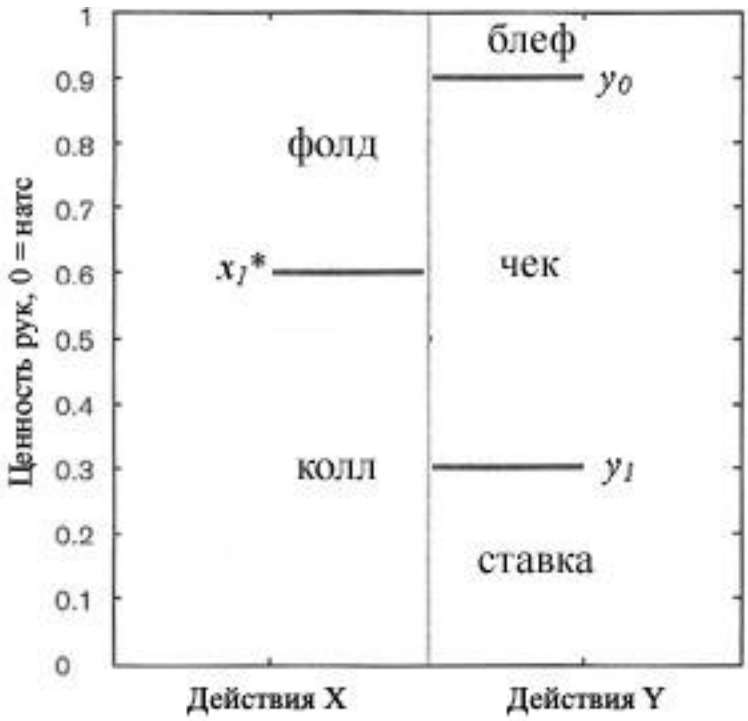


Рисунок 11.3. Оптимальная стратегия для [0,1] Игры #2

Мы знаем, что если оба участника игры будут следовать оптимальным стратегиям, то игроку X в точке x_1* будет все равно, что делать: колл или фолд.

Безразличие в x_1* можно описать следующим образом:

Рука Y	***p*(руки Y)**	**<X, колл>**	**Ожидание**	**<X, фолд>**	**Ожидание**
$[0, y_1]$	y_1	-1	$-y_1$	0	0
$[y_0, 1]$	$1 - y_0$	$P + 1$	$(P + 1)(1 - y_0)$	0	0
Итого			$\mathbf{-y_1 + (P + 1)(1 - y_0)}$		**0**

Заметьте, что мы не учитываем руки игрока Y на интервале $[y_1, y_0]$, так как с ними он не делает ставку, а значит, игрок X не должен принимать никакого решения. Суммы в колонках «Ожидание» должны быть равны:

$$-y_1 + (P + 1)(1 - y_0) = 0$$
$$y_1 = (P + 1)(1 - y_0)$$
$$1 - y_0 = y_1 (1/(P + 1))$$

$$1 - y_0 = \alpha\, y_1 \qquad \textbf{(11.4)}$$

В нашей параметризации $1 - y_0$ представляет длину интервала блефа, также как y_1 представляет интервал рук для вэлью бета. Как вы могли заметить, соотношение между этими величинами задается коэффициентом α, также как и в игре с ясновидящим.

Теперь рассчитаем пороги игрока Y.

Безразличие в y_1 (порог между вэлью бетом и чеком):

Рука X	p(руки X)	<Y, бет>	Ожидание	<Y, чек>	Ожидание
$[0, y_1]$	y_1	-1	$-y_1$	0	0
$[y_1, x_1^*]$	$x_1^* - y_1$	+1	$x_1^* - y_1$	0	0
$[x_1^*, 1]$.	$1 - x_1^*$	0	0	0	0
Итого			$\boldsymbol{x_1^* - 2y_1}$		**0**

Получим уравнение:

$$x_1^* - 2y_1 = 0$$

$$y_1 = x_1^*/2 \qquad \textbf{(11.5)}$$

Безразличие в y_0 (порог между чеком и блефом):

Рука X	p(руки X)	<Y, бет>	Ожидание	<Y, чек>	Ожидание
$[0, x_1^*]$	x_1^*	-1	$-x_1^*$	0	0
$[x_1^*, y_0]$	$y_0 - x_1^*$	$+P$	$(y_0 - x_1^*)P$	0	0
$[y_0, 1]$.	$1 - x_1^*$	0	0	0	0
Итого			$\boldsymbol{Py_0 - (P + 1)x_1^*}$		**0**

$$Py_0 - (P + 1)\, x_1^* = 0$$

Как мы уже знаем из уравнения 11.4, $(1 - y_0) = \alpha\, y_1$, тогда:

$$P\,(1 - \alpha\, y_1) = (P + 1)\, x_1^*$$
$$x_1^* = (1 - \alpha\, y_1)\, P\, /\, (P + 1)$$

В то же время $(1 - \alpha) = P\, /\, (P + 1)$:

$$x_1^* = (1 - \alpha)\,(1 - \alpha\, y_1) \qquad \textbf{(11.6)}$$
$$x_1^* = (1 - \alpha)\, y_0$$

Этот результат также важен, поскольку он определяет частоту колла в [0,1] играх. Чтобы игрок Y был безразличен к блефу в y_0, его оппонент должен уравнивать с $(1 - \alpha)$ рук, способных побить блеф.

Соединив три уравнения безразличия, мы можем найти решение игры.

$$x_1^* = (1 - \alpha)\,(1 - \alpha\, y_1) \qquad \textbf{(11.6)}$$

$$y_1 = x_1^*/2 \qquad \textbf{(11.5)}$$

$x_1^* = 2y_1$
$2y_1 = (1 - \alpha\, y_1)\,(1 - \alpha)$
$2y_1 = 1 - \alpha\, y_1 - \alpha + \alpha\, 2y_1$
$1 - \alpha = 2y_1 + \alpha\, y_1 - \alpha\, 2y_1$
$1 - \alpha = y_1\,(2 - \alpha)\,(\alpha + 1)$
$y_1 = (1 - \alpha)\ /\ (2 - \alpha)\,(\alpha + 1)$

Учитывая, что $x_1^* = 2y_1$:

$x_1^* = 2(1 - \alpha)\ /\ (2 - \alpha)\,(\alpha + 1)$
$1 - y_0 = \alpha\, y_1$
$1 - y_0 = \alpha\,(1 - \alpha)\ /\ (2 - \alpha)\,(\alpha + 1)$

Джон фон Нейманом и Оскар Моргенштерн рассмотрели подобную игру в работе «Теория Игр и Экономическое Поведение» (1944).

Какие выводы можно сделать из этого примера? Во-первых, возможность выбора между коллом и фолдом у игрока X изменяет структуру стратегии игрока Y. В примере 11.2 он просто ставил на вэлью с вершиной своего диапазона, и этого было достаточно. Однако здесь игрок X может делать фолд со своими слабейшими руками, тем самым эксплуатируя стратегию своего оппонента. Ответом игрока Y становится блеф с нижней частью диапазона, так он заставляет игрока X уравнивать с руками слабее порога вэлью бетов.

Снова коэффициент α играет важную роль. Также как и в игре с ясновидящим, игрок X должен скидывать α рук, способных побить блеф, а игрок Y ставит на вэлью и блеф в соотношении α.

У этой игры есть еще одна важная сторона. Каково ожидание от блефа? В игре с ясновидящим оно было равно нулю - если Y делал чек, то он просто проигрывал банк. Однако здесь ответ не так очевиден.

В y_0 игроку Y все равно: блефовать или чекать, эта ситуация совпадает с той, что мы решили в игре с ясновидящим (с точки зрения экс-шоудауна). Но, например, в точке 1 ожидание Y от блефа такое же, как его ожидание в y_0 (поскольку игрок X будет уравнивать только с руками до x_1^*). Получается, что Y не безразличен к блефу в 1! Более того, он повышает свое ожидание, блефуя со всеми руками хуже, чем y_0.

Примечание от переводчика: Здесь имеется ввиду, что при блефе в точке y_0 и 1 ожидание игрока Y будет одинаковым. Однако рука в y_0 значительно сильнее единицы. Соответственно, мы имеем то же ожидание, хотя сила нашей руки наоборот уменьшилась.

В этой главе мы представили несколько сравнительно простых игр на половине улицы. Мы увидели, что ясновидящий ставит на ценность и блефует в абсолютно точном оптимальном соотношении, в то время как игрок, чья рука известна, коллирует и падает в связанном соотношении, которое делает ясновидящего безразличным к блефу. В первой [0,1] игре мы ввели распределение [0,1] и показали, что когда у одного из игроков нет стратегического выбора, его оппонент должен стремиться максимизировать свое ожидание (это и будет его оптимальной стратегией). В третьей игре мы столкнулись с важностью диапазона блефов, который заставлял игрока X значительно расширить свой диапазон колла – его порог лежал значительно левее порога для ставки игрока Y.

Нужно запомнить

- В играх на половине улице вэлью беты и блефы (для оптимальных стратегий) находятся в соотношении $\alpha = 1(P + 1)$. Блефуя ровно с такой долей мертвых рук, мы можем сделать своего оппонента безразличным к коллу.

- В играх на половине улицы частота фолда для игрока X задается коэффициентом α. Скидывая такое количество своих блеф-кэтчеров, он делает оппонента безразличным к блефу.

- Если у одного из игроков нет стратегических альтернатив, его оппонент должен стараться максимизировать свое ожидание, это и будет оптимальной стратегией.

- Правильный баланс между вэлью бетами и блефами гарантирует нам положительное ожидание против оппонента вне зависимости от его стратегии. Если он будет скидывать слишком часто, наши блефы станут более прибыльными, и наоборот, если начнет чаще уравнивать, то наши вэлью беты будут чаще проплачиваться.

- Оптимальные стратегии не всегда по-настоящему безразличны к блефам – это верно только для пороговых рук. В то же время блефы с нашими со слабейшими руками часто будут иметь положительное ожидание (по сравнению с чеком).

Глава 12
Хэдс-ап с короткими стэками: Пуш или Фолд

В главе 11 мы разобрали три вспомогательные игры на половине улицы и для каждой из них нашли оптимальные стратегии. Подобный анализ окажется весьма полезным и в реальных покерных ситуациях – каждая мини-игра несет в себе определенный урок, который можно использовать за столом. К тому же, более полной и точной информации мы в любом случае не получим, поскольку полное решение покера сегодня не представляется возможным.

В этой части мы поговорим о решении для ситуации, с которой вы регулярно сталкиваетесь в безлимитном покере. Речь пойдет о хэдс-апе, ***где игрок на позиции дилера должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты***.

> *Примечание от переводчика: Эта глава фактически является решением для игры против коротких стэков*

Может показаться странным, почему мы решили обратиться к этой проблеме посреди нашего экскурса в игры на половине улицы. На самом деле здесь есть веская причина. При анализе игры «Пуш или Фолд» мы будем рассматривать не экс-шоудаун вэлью, а цену игры (то есть общий выигрыш или проигрыш в раздаче). Таким образом, у игрока, который говорит свое слово первым, будут ровно те же варианты действий, что и у игрока Y в предыдущих примерах. Он может скинуть свои карты (что в определенной мере сродни чеку) и получить нейтральное ожидание. Или он может сделать ставку, а затем возможно получить колл от оппонента. Так что по своей сути «Пуш или Фолд» мало чем отличается от уже рассмотренных нами игр на половине улицы.

Перед тем как мы приступим к обсуждению первой игры, мы предлагаем нашим читателям проверить свою интуицию и попытаться угадать ответ на следующий вопрос. Безлимитный холдем, два игрока, по правилам баттон должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты. В стеке каждого из них находится по 16 фишек, блайнды составляют 1 фишку на баттоне и 2 на большом блайнде. С какой долей стартовых рук игрок на баттоне должен ставить олл-ин, если он играет оптимально?

Начнем с рассмотрения вспомогательный игры – в ней у каждого игрока будет некая статичная рука из диапазона [0,1], правила те же (пуш или фолд).

Пример 12.1 - [0,1] Пуш или Фолд #1

- Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
- Каждый из игроков получает случайное число из диапазона [0,1].
- Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.

– Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
– Игрок Y может поставить олл-ин на S единиц, либо скинуть свои карты.
– Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
– На шоудауне выигрывает рука, которая ближе к нулю.

Первое, что нужно здесь отметить – у игрока Y есть всего два стратегических выбора: либо вложить деньги в банк (пуш), либо сбросить карты. Стратегия пуша с диапазоном слабее, чем диапазон фолда всегда будет доминируемой. Таким образом, стратегия игрока Y будет состоять всего из двух областей: сильные руки, с которыми он поставит олл-ин, и слабые руки, которые он выкинет. То же самое верно и для его оппонента – сильные руки будут составлять диапазон колла, слабые – диапазон фолда.

Важное отличие от игр, которые мы рассматривали ранее, состоит в том, что здесь мы не можем ставить олл-ин как с сильными, так и слабыми руками. Если наш диапазон для пуша составляет *x%*, то пуш с *x%* сильнейших комбинаций всегда будет доминировать любую другую конфигурацию нашего диапазона.

Стратегии обоих участников игры можно выразить всего двумя числами – сила руки, необходимая для пуша (y), и сила руки, необходимая для колла (x). Это пороговые значения. Иными словами, игрок Y должен ставить олл-ин со всеми руками лучше y, а игрок X должен уравнивать со всеми руками лучше x.

Кроме того, как мы уже знаем, y и x для пары оптимальных стратегий будут являться точками безразличия. Это значит, что у игрока Y оказывается некая рука y, то ему все равно, что делать: пуш или фолд. То же самое верно и для игрока X и соответствующего значения x. Также очевидно, что игрок X никогда не уравняет олл-ин с рукой хуже, чем y, поскольку тогда он просто никогда не сможет выиграть банк.

Теперь мы можем использовать эту информацию для того, чтобы найти точки безразличия, как мы это уже делали в предыдущей главе. Однако здесь мы будем принимать в расчет все деньги, которые оказываются в центре стола, включая блайнды.

Итак, математическое ожидание для игрока Y от фолда составляет - $^1/_2$ единицы (он теряет свой малый блайнд).

$$\langle Y, \text{фолд} \rangle = -\,^1/_2$$

Поскольку игрок X никогда не уравняет олл-ин с руками хуже, чем y, он всегда будет выигрывать, если сделает колл. Тогда математическое ожидание от пуша с рукой y составит:

$<Y$, пуш | $y> =$ (игрок X делает колл) $(-S)$ + (игрок X делает фолд) $(+1)$

Поскольку мы имеем дело с равномерным распределением [0,1], вероятность попадания в какой-либо интервал равна длине этого интервала. Игрок X уравняет с вероятностью x и скинет свою руку с вероятностью $(1 - x)$.

Примечание от переводчика: Это определение может показаться излишне запутанным, но его легко объяснить на примере. Представьте, что есть некий интервал, состоящий из чисел от 0 до 1. Скажем, мы хотим узнать, какова вероятность попадания в отрезок от 0.3 до 0.5. Очевидно, что если все числа равномерно распределены в нашем исходном диапазоне, то и вероятность попадания в отрезок от 0.3 до 0.5 будет равна 20% (длина интервала составляет 0.2).

$<Y$, пуш | $-y> = (x)(-S) + (1 - x)(+1)$
$<Y$, пуш | $y> = -xS + 1 - x$

Мы также знаем, что в пороговой точке игрок Y будет безразличен к пушу, то есть в ней ожидание от олл-ина будет равно ожиданию от фолда. Решим простое уравнение:

$$-xS + 1 - x = -{}^{1}/_{2}$$
$$x(1 + S) = {}^{3}/_{2}$$

$$x = 3 / (2 + 2S) \qquad \textbf{(12.1)}$$

Теперь посмотрим на эту ситуацию со стороны игрока X. Ожидание от фолда для него составит -1 единицу, в то время как ожидаемые выигрыш от колла олл-ина с рукой x будет равен:

$<X$, колл | $x> =$ (у игрока Y рука лучше) $(-S)$ + (у игрока Y рука хуже) $(+S)$

Игрок Y будет ставить олл-ин с y рук (при этом $x < y$). Из них $(y - x)/y$ рук окажутся хуже порога x, а x/y - лучше. Предположим, что игрок Y ставит олл-ин с 50% от общего диапазона, тогда как его оппонент уравнивает с 30% ($y = 0.5$, $x = 0.3$). Следовательно, $(y - x)/y = 2/5$ рук, с которыми игрок Y делает пуш будут хуже, чем диапазон колла игрока X, а $x/y = 3/5$ – лучше.

Примечание от переводчика: Игрок Y будет ставить олл-ин с y рук потому что с некой пороговой рукой y он будет безразличен к пушу. Соответственно, со всеми более сильными руками он предпочтет пуш. Мы имеем дело с равномерным распределением от 0 до 1, и если, скажем, точка безразличия достигается в $y = 0.2$, то игрок Y будет ставить олл-ин со всеми руками от 0 до 0.2.

$\langle X, \text{колл} \mid x\rangle = p(\text{у игрока Y рука лучше})(-S) + p(\text{у игрока Y рука хуже})(+S)$
$\langle X, \text{колл} \mid x\rangle = (x/y)(-S) + [(y - x)/y](+S)$
$\langle X, \text{фолд}\rangle = -1$

Уравняем эти два выражения, чтобы найти точку безразличия для игрока X:

$(S)(y-2x)/y = -1$
$Sy - 2Sx = - y$
$S - S2x/y = -1$

$$y = S2x / (S + 1) \qquad \textbf{(12.2)}$$

Обратимся к уравнению 12.1:

$x= 3 / (2 + 2S)$

Произведем соответствующую замену в уравнении 12.2 и получим:

$$y = 3S / (1 + S)^2 \qquad \textbf{(12.3)}$$

Мы получили два уравнения, которые описывают пару оптимальных стратегий для заданной игры. Так, игрок Y должен делать пуш с $3S/(1 + S)^2$ всех рук, а игрок X будет уравнивать с $3/(2 + 2S)$. Можем сразу проверить полученные значения. При стэках размером в 5 единиц, игрок Y будет ставить олл-ин $(3(5)/(1 + 5)^2) = 15/36$ раз, а игрок X будет делать колл $(3/(2 + 2(5)) = {}^1/_4$ раз. При стэке в 10 единиц, получим $(3(10)/(1 + 10)^2) =30/121$ и $3/(2 + 2(10)) = 3/22$ соответственно. Если же мы возьмем экстремальные значения, например, стэки по миллиону единиц, диапазоны обоих игроков будут близки к нулю.

Также мы можем ответить на вопрос: на чьей стороне находится перевес в этой игре? Определим цену игры для игрока Y. Ниже приведена таблица с возможными комбинациями диапазонов в раздаче:

X →	[0, x]	[x, y]	[y, 1]
Y			
[y, 1]	-0.5	-0.5	-0.5
[x, y]	-S	1	1
[0, x]	0	1	1

Примечание от переводчика: В таблице выше указаны диапазоны «рук», которые могут оказаться у каждого из игроков. Так, [0, x] по горизонтали значит, что мы рассматриваем для игрока X все руки от 0 (сильнейших) до порогового значения x. В свою очередь, у игрока Y этому диапазону могут противостоять руки [y, 1] (от порога y до слабейших рук) и т.п.

Когда игрок Y скидывает свои карты, игрок X выигрывает 0.5 единицы. Это происходит 1- y раз.

Когда игрок Y ставит олл-ин, а его оппонент скидывает карты, он выигрывает 1 единицу. Такой исход мы будем наблюдать $y(1 - x)$ раз.

Если игрок Y ставит олл-ин и получает колл, то возможны два сценария. Первый – у обоих игроков оказались руки в диапазоне от 0 до x. В этом случае ни один из них преимущества не получит, поскольку как мы уже знаем, все руки в наших диапазонах распределены равномерно, так что количество поражений и побед будет одинаково. Второй – игрок Y поставил олл-ин с рукой слабее, чем x, тогда его оппонент, игрок X, выиграет S единиц. Этот сценарий будет реализован в $(y - x)(x)$ случаев.

Получим:

$$< \Upsilon > = p(\text{Y фолд})\,(-\,{}^{1}\!/_{2}) + p(\text{Y пуш, X фолд})\,(+1) + p(\text{Y пуш, X колл при } x > y)\,(-S) + p(\text{Y пуш, X колл при } x < y)\,(0)$$

$$< \Upsilon > = -\,(1 - y)/2 + (y)(1 - x)(1) + (y - x)\,x\,(-S)$$

$$< \Upsilon > = -\frac{1}{2} + y\left[\frac{1}{2} + 1 - x - Sx\right] + Sx^2$$

$$< \Upsilon > = -\frac{1}{2} + y\left[\frac{3}{2} - (1 + S)x\right] + S\left(\frac{3}{2(1 + S)}\right)^2$$

$$< \Upsilon > = -\frac{1}{2} + y\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right] + \frac{9S}{4(1+S)^2}$$

$$< \Upsilon > = \frac{9S}{4(1 + S)^2} - \frac{1}{2}$$

Теперь мы можем использовать полученную функцию для анализа цены игры при различных размерах стэков (от 1 до бесконечности). Так, если стэки в раздаче составляют от 1 до 2 единиц, игрок Y будет иметь ощутимый перевес в ожидании, в то время как при стэках больше двух преимущество перейдет к его оппоненту. Однако при размере стэков стремящемся к бесконечности, ожидание игрока X сводится к 0.5 единицы, которые он выигрывает после фолда игрока Y.

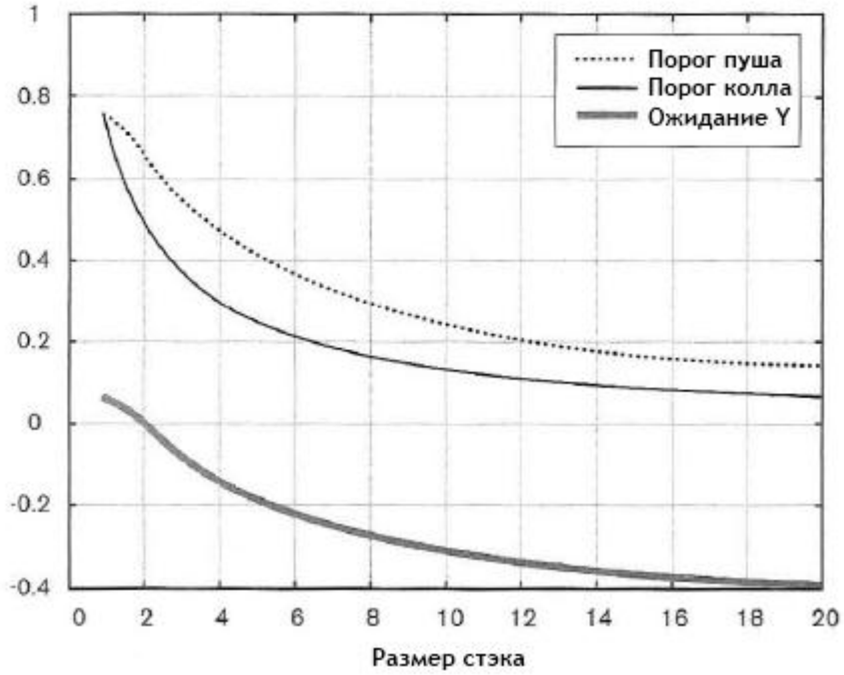


Рисунок 12.2. Пуш или Фолд #1

Однако когда мы играем в покер, лучшая рука на префлопе далеко не всегда выигрывает раздачу. Даже если игрок X будет уравнивать олл-ин с достаточно сильным диапазоном, у его оппонента редко когда окажется менее 33% эквити в банке. В следующей вспомогательной игре мы рассмотрим случай, где у худшей руки на префлопе есть 33% шанс выиграть на шоудауне.

Пример 12.2 - [0,1] Пуш или Фолд #2

- Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
- Каждый из игроков получает случайное число из диапазона [0,1].
- Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.
- Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
- Игрок Y может поставить олл-ин на S единиц, либо скинуть свои карты.
- Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
- На шоудауне рука, которая ближе к нулю, выиграет $^2/_3$ раз.

Эта игра очень похожа на ту, что мы рассмотрели чуть выше, однако нужно отметить два важных отличия. Во-первых, в предыдущей игре при очень маленьких стэках (например, $S = 1$) игрок Y ставил олл-ин с 75% своих рук, в то время как его оппонент отвечал с 75% своего диапазона. Это происходило из-за того, что руки, близкие к единице не имели никакой ценности. В то же время, в этой игре даже самая плохая рука ровно $^1/_3$ раз выиграет банк на шоудауне. Так что при стэках в 1 единицу для игрока Y пуш с любой рукой будет обладать большим ожиданием, чем фолд. Во-вторых, раньше игрок X должен был делать колл с руками строго лучше диапазона пуша своего оппонента. Здесь же ему всегда гарантирована как минимум треть банка, так что это правило выполняться не будет.

Рассмотрим два возможных случая в этой игре.

Случай 1: S < 3

При стэках меньше трех единиц мы без труда найдем стратегию для игрока X. Если его оппонент поставит олл-ин, то игрок X получит шансы банка как минимум 2 к 1, а это, в свою очередь, значит, что он всегда должен делать колл (то есть $x = 1$). Иными словами, для игрока X колл будет доминировать фолд во всех случаях без исключения. Тогда игроку Y останется лишь максимизировать свое ожидание против такой предсказуемой стратегии оппонента.

$\langle Y$, пуш$\rangle = p$(у игрока Y лучшая рука) (банк) (эквити) +
+ p(у игрока Y худшая рука) (банк) (эквити) - (размер ставки)

$\langle Y$, пуш$\rangle = p$(у игрока Y лучшая рука) $(2S)\ (^2/_3)$ +
+ p(у игрока Y худшая рука) $(2S)\ (^1/_3) - (S)$

Игрок X уравняет олл-ин со всеми руками. Таким образом, если игрок Y сделает пуш с y_1, у его оппонента окажется рука лучше с вероятностью y_1, и рука хуже с вероятностью $(1 - y_1)$.

p(у игрока Y лучшая рука) = $1 - y_1$
p(у игрока Y худшая рука) = y_1

$\langle Y$, пуш $| \ y_1 \rangle = (1 - y_1)\ (2S)\ (^2/_3) + y_1\ (2S)(^1/_3) - (S)$
$\langle Y$, пуш $| \ y_1 \rangle = S/3 - 2Sy_1/3$
$\langle Y$, фолд $| \ y_1 \rangle = -^1/_2$

Игрок Y должен ставить олл-ин каждый раз, когда:

$S/3 - 2Sy_1/3 > -\ ^1/_2$
$2S - 4Sy_1 > -3$
$y_1 < (2S + 3)/4S$

Тогда пороговое значение y составит:

$y = (2S + 3)/4S$

Мы получили, что оптимальными стратегиями для игры со стэками меньше трех единиц будет пуш со стороны игрока Y со всеми руками, удовлетворяющими приведенному выше уравнению, и колл со стороны игрока X со всеми руками без исключения. Представьте, что стэки в раздаче составляют 1.5 единицы – пуш игрока Y получит колл от оппонента 100% раз, но и олл-ин он также поставит со всеми своим диапазоном.

При стэках в 3 единицы игрок Y должен ставить олл-ин с $^3/_4$ своих рук. С рукой 0.75 его математическое ожидание составит -0.5 единицы, что в точности равно ожиданию от фолда.

Случай 2: S > 3
При стэках больше трех единиц, игрок X получает шансы банка хуже, чем 2 к 1. А это значит, что он уже не может уравнивать со всем своим диапазоном – для каких-то рук фолд становится предпочтительным решением. Более того, он уже не может уравнивать с руками хуже, чем порог олл-ина его оппонента (поскольку фолд при больших стэках все равно будет лучше колла с 33% эквити в банке). Таким образом, мы фактически имеем дело с игрой пуш или фолд из примера 12.1, с той лишь разницей, что лучшей руке принадлежит всего $^2/_3$ банка.

Мы можем найти оптимальные стратегии для этого случая, используя те же самые уравнения с поправкой на эквити каждого игрока. Если они увидят шоудаун, то лучшая рука выиграет S/3 единицы, а худшая проиграет S/3.

$\langle Y$, пуш | $y\rangle$ = (игрок X делает колл) ($-S/3$) + (игрок X делает фолд) (+1)

Примечание от переводчика: S/3 это лишь упрощение подсчета математического ожидания. Действительно, если мы говорим об уравнении выше, то в «традиционной» форме оно будет выглядеть так:

$\langle Y$, пуш | $y\rangle = (x) (-S * 2/3 + S * 1/3) + (1-x) (+1)$

Как вы можете помнить из примера 12.1, если игрок X уравнивает олл-ин, то он делает это с рукой лучше. Тогда игрок Y две трети раз проиграет банк, а одну треть (согласно правилам игры) выиграет. Но в скобках после упрощения получится S/3.

Таким образом, мы можем упростить рассматриваемую задачу до игры со стэками S/3.

Игрок X уравняет олл-ин с вероятностью *x* и скинет свои карты с вероятностью *(1 - x)*.

$\langle Y$, пуш | $y\rangle = (x) (-S/3) + (1 - x) (+1)$

$\langle Y$, пуш | $y\rangle = (-xS/3) + 1 - x$ **(12.4)**

$\langle Y$, фолд$\rangle = -\,^1/_2$

Снова приравняем эти два выражения. Получим:

$$-xS/3 + 1 - x = -\,{}^{1}\!/_{2}$$
$$xS + 3x = 9/2$$

$$x = 9/2(S + 3) \qquad \textbf{(12.5)}$$

Для игрока X ожидание от фолда составляет -1 единицу. Посчитаем ожидание от колла с пороговой рукой *x*.

Как и в примере 12.1, игрок Y поставит олл-ин с *y* своих рук (и, как нам уже известно, $x < y$). Из этих рук $(y - x)/y$ будут хуже, чем *x*, а x/y - лучше.

$$\langle X, \text{колл} \mid x\rangle = p(\text{у игрока Y лучшая рука})\,(-S/3) + $$
$$+\, p(\text{у игрока Y худшая рука})\,(+S/3)$$

$$\langle X, \text{колл} \mid x\rangle = (-\,S/3)\,(x/y) + (+S/3)\,(y - x)/y$$
$$\langle X, \text{колл} \mid x\rangle = (S/3)\,(y - 2x)/y$$

$$\langle X, \text{фолд}\rangle = -\,1$$

Найдем точку безразличия:

$$(S/3)(y-2x)/y = -\,1$$
$$S(y - 2x) = -3y$$
$$y = 2xS/(S + 3)$$

$$y = 9S/(S+3)^2 \qquad \textbf{(12.6)}$$

Таким образом, оптимальная стратегия для игрока Y – пуш с $9S/(S+3)^2$ всех рук, а для игрока X – колл с $9/2(S+3)$ всех рук.

Как вы можете помнить, в примере 12.1 оптимальные диапазоны оказались достаточно узкими – при стэках в 10 единиц игроку Y нужно было идти в олл-ин примерно с четвертью своих рук. Однако в этой игре он должен ставить олл-ин $(9(10)/(10+3)^2) = 90/169$ раз, то есть больше, чем в половине случаев при таком же размере стэка! В свою очередь, игрок X будет уравнивать $(9/(6 + 2(10)) = 9/26$ всех рук. На первый взгляд может показаться, что в наши расчеты закралась ошибка – как можно рисковать десятью блайндами ради того, чтобы забрать один, и при этом в случае колла иметь всего 33% на победу?

На самом деле, интуиция подсказываем вам неправильный ответ. Многие привыкли думать, что они рискуют A долларами, чтобы выиграть B, причем все переменные строго определены (размер ставки, процент фолда оппонента или выигрыша на шоудауне и т.п.). При такой логике наши расчеты действительно кажутся ошибочными – мы хотим рисковать десятью единицами, чтобы выиграть одну, когда оппонент уравняет наш олл-ин примерно в трети случаев. Однако важно понимать, что в случае колла мы проигрываем не *S*, а лишь *S/3*. Так что в реальности мы инвестируем в банк три целых и одну треть единицы, чтобы выиграть полторы (мертвые деньги в банке).

Если мы сравним решения для игры из примера 12.1 и 12.2 (для стэков больше трех единиц), то эта закономерность станет еще более очевидной:

Пример 12.1:
$x = 3/(2 + 2S)$
$y = 3S/(1 + S)^2$

Пример 12.2:
$x = 9/(2S + 6)$
$y = 9S/(S + 3)^2$

Как видите, решение для второй игры можно получить из уравнений для примера 12.1 просто подставив S/3 вместо S. Действительно, эффективный размер стэка для игры в примере 12.2 составляет всего S/3 (как уже было показано выше). Мы можем использовать это значение для того, чтобы рассчитать цену новой игры для игрока Y.

$<\Upsilon> = -\,{}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{4}\, S/((S/3+1)^2)$

$$G = -\frac{1}{2} + \frac{27S}{4(S+3)^2}$$

Однако это уравнение охватывает только ситуации, где размер стэков больше трех единиц.

Есть и два других случая, каждый со своим решением. Так, когда $S < {}^{3}/_{2}$, оба участника будут разыгрывать все свои руки без исключения, цена игры будет равна нулю. А в промежутке между ${}^{3}/_{2}$ и 3 будет действовать решение из первого случая, рассмотренного нами для примера 12.2:

$y = \frac{2S+3}{4S}$ при x = 1, так что

$<\Upsilon> = p$(игрок Y скидывает карты) $(-\,{}^{1}/_{2})$ +
+ p(игрок Y ставит олл-ин) $p(x_1>y)$ $(S/3)$

$$<\Upsilon> = -\frac{1}{2}(1-y) + y(1-y)\frac{S}{3}$$

$$< \Upsilon > = (1 - y)\left[-\frac{1}{2} + y\frac{S}{3}\right]$$

$$< \Upsilon > = \frac{2S - 3}{4S}\left[-\frac{1}{2} + \frac{2S + 3}{12}\right]$$

$$< \Upsilon > = \frac{(2S - 3)^2}{48S}$$

Как вы можете заметить, мы получили цену игры для трех взаимодополняющих интервалов

$< \Upsilon >$ = 0, для S ≤ $^3/_2$
$< \Upsilon >$ = $(2S - 3)^2$ / 48S , для $^3/_2$ ≤ S ≤ 3
$< \Upsilon >$ = - $^1/_2$ + (27S) / (4(S+3)^2), для 3 ≤ S

Обратите внимание на пороговые значения *x* и *y*. При S < 3 *x* равен 1, однако как только S становится немного больше трех, оптимальная частота колла падает до 3/4. Это показывает, что стратегии не обязательно должны быть непрерывными при изменении стэков и размера банка.

С помощью этих двух примеров мы выяснили как наличие эквити меняет стратегию в играх «Пуш или Фолд». Когда лучшая рука на префлопе вне зависимости ни от чего выигрывала банк, оптимальная стратегия была достаточно тайтовой, а игрок X имел значительное преимущество практически при любом размере стэков. Но как только у худшей руки появилось эквити (пример 12.2), оптимальная стратегия стала диктовать игру с гораздо более широким диапазоном. Более того, преимущество перешло на сторону игрока Y при любом размере стэка менее шести единиц.

Как мы узнаем из следующего примера, оптимальная стратегия в безлимитном покере также будет весьма лузовой и агрессивной.

Пример 12.3 – Пуш или Фолд в безлимитном Холдеме

– Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
– Каждый из игроков получает две карты
– Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.
– Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
– Игрок Y может поставить олл-ин на S единиц, либо скинуть свои карты.
– Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
– Если игрок X уравнивает олл-ин, то на стол выкладываются пять карт и выигрывает лучшая комбинация.

На первый взгляд может показаться, что мы имеем дело с вариацией уже рассмотренной нами игры. Однако Холдем не укладывается в диапазон [0,1], который мы применяли ранее. Так, здесь почти нет мертвых рук на префлопе, а 80% против случайной комбинации есть всего у двух стартеров. Кроме того, сила нашей руки будет постоянно меняться. Самое время обратиться к методу перебора, что мы и сделаем чуть позже. А пока давайте рассмотрим два крайних случая: при бесконечно больших и малых стэках.

В наших рассуждениях ниже вы встретите термин ***фиктивная игра***. Мы уже использовали его в прошлых главах, и, стоит отметить, он оказывается абсолютно незаменимым при решении игр с помощью компьютера. Тема фиктивных игр достаточно хорошо описывается в пособиях по теории игр, так что мы не будем вдаваться в подробности и просто предложим краткое определение. Если нам известны правила игры, а также стратегия идеального оппонента (то есть стратегия максимальной эксплуатации для каждого нашего действия), мы можем использовать эту информацию для поиска оптимальной стратегии.

Для начала мы должны сделать предположение о вероятных стратегиях каждого из игроков. Чем реалистичнее будет наша догадка, тем проще будет решить игру. Представьте, что перед нами два игрока (А и В). Скажем, мы определились с их стратегиями. Теперь нам нужно вычислить стратегию максимальной эксплуатации для игрока В при условии, что игрок А следует заданной нами стратегии. Затем мы соединяем найденную СМО с изначальной стратегией для игрока В используя специальную константу смешивания. Она задается некой последовательностью чисел, сводящейся к нулю, но имеющей достаточное количество членов, так что стратегии могут меняться произвольным образом.

Смешивание стратегий работает следующим образом. Допустим, задана константа m. Тогда мы будем сочетать старую стратегию $S_{старая}$ с найденной стратегией максимальной эксплуатации $S_{новая}$ следующим образом:

$$S_{смешанная} = (1 - m)\, S_{старая} + m\, S_{новая}$$

Доказано, что при многократном повторении такие «фиктивные розыгрыши» (где мы становимся на сторону обоих игроков) в конечном счете приведут нас к оптимальной стратегии. При этом число повторений будет конечным.

Очень большие S

Когда стэки участников раздачи стремятся к бесконечности, единственной верной стратегией будет розыгрыш только тузов. Игрок Y не сможет ставить олл-ин ни с одной другой рукой, поскольку тогда его оппонент может просто дождаться тузов и выиграть гигантский банк. Однако с уменьшением стэка, игроку Y придется добавлять в свой диапазон все новые и новые руки, иначе он будет терять деньги, упуская возможность украсть блайнды. Очевидно, что если игрок Y не станет этого делать, то его оппоненту стоит придерживаться стратегии колла с тузами.

Итак, если стэки станут больше некой критической отметки, игрок Y не сможет получить вэлью от пуша с широким диапазоном, поскольку даже если его оппонент уравнивает только с тузами, в среднем он будет проигрывать слишком много. Можно подумать, что с уменьшением размера стэков первым делом игроку Y следует начать ставить олл-ин с KK, однако это не совсем верно. Дело в том, что при игре с большими стэками руки с ***блокерами*** оказываются особенно ценными. Так, комбинации с тузом уменьшают вероятность AA у оппонента и имеют больше эквити против его диапазона, чем KK. В игре «Пуш или Фолд» лучшей рукой против оппонента, который уравнивает олл-ин только с тузами будет ATs.

Если игрок Y идет в олл-ин с ATs при стэке в 2000 единиц, его ожидание составит:

$$\langle \text{ATs, пуш } 2000\rangle = p(\text{игрок X скидывает})\,(\text{банк}) + p(\text{игрок X уравнивает})\,p(\text{эквити игрока Y})\,(\text{размер банка}) - \text{пуш}$$

$$\langle \text{ATs, пуш } 2000\rangle = \left({}^{1222}\!/_{1225}\right) 1.5 + \left({}^{3}\!/_{1225}\right) ((0.13336)\,(4000) - 2000)$$

$$\langle \text{ATs, пуш } 2000\rangle = -2.09525$$

Или примерно минус 2 единицы за пуш. Мы можем использовать эту же формулу, чтобы найти размера стэка *x*, при котором ATs становится прибыльным пушем против оппонента, уравнивающего только с парой тузов:

$$\langle \text{ATs, пуш } x\rangle = 1.5\left({}^{1222}\!/_{1225}\right) + \left({}^{3}\!/_{1225}\right) ((0.13336)\,(x) - x)$$

Приравниваем к нулю:

$$1.5\left({}^{1222}\!/_{1225}\right) + \left({}^{3}\!/_{1225}\right) ((0.13336)\,(x) - x) = 0$$

$$x = 833.25$$

Это значит, что при стэке в 833.25 единиц игрок Y может начать ставить олл-ин не только с тузами, но также и с ATs. Как вы могли уже догадаться, при большем размере стэка, в его диапазоне должны остаться только тузы, а 833.25 является точкой безразличия для ATs (иными словами, именно при таком стэке игроку Y все равно, что делать с этой рукой).

Теперь давайте посмотрим на эту ситуацию с точки зрения игрока X, если его оппонент начал ставить олл-ины не только с AA, но и с ATs. Может ли он расширить свой диапазон? Лучше рукой (помимо AA) против {AA, ATs} будет AKs с 41.442% эквити, однако даже с ней игрок X будет терять деньги в случае колла.

Интересно отметить, что как только эффективные стэки достигают 833.25 единиц, стратегия игрока Y резко меняется от {Пуш 100% раз с AA} до {Пуш 100% раз с AA и ATs}. Здесь нет никакого плавного перехода, например {Пуш с 1% ATs} – как только пуш с ATs становится прибыльным, игрок Y обязан перейти к новой стратегии.

В некотором смысле этот парадокс похож на изменение агрегатного состояния в физике. При определенной температуре вещество стремительно преобразуется из твердого в жидкое. Это происходит из-за того, что точка равновесия может резко сместиться даже при незначительных изменениях в рассматриваемой системе. Несложно проследить аналогию с размерами стэков и банка – чем меньше это соотношение, тем быстрее становится игра. А нулевые блайнды фактически равносильны абсолютному нулю в физике, когда прекращается всякое движение.

Давайте сделаем нашу игру еще «быстрее» и уменьшим стэки до 833.12. В этой точке мы получим еще одного кандидата в диапазон пуша – A5s (с эквити в 13.331% против тузов). Важно заметить, что чем больше рук мы включаем в диапазон, тем скорее игрок X сможет начать уравнивать олл-ины с руками слабее AA.

И снова для игрока X лучшей рукой против диапазона {AA, ATs, A5s} окажется AKs, более того, на этот раз она будет иметь более 50% эквити (если быть точными, 50.9%). Таким образом, если игрок Y решит ставить олл-ины с AA, ATs и A5s, игрок X может начать уравнивать с AKs, и ожидаемый выигрыш его оппонента станет отрицательным. В свою очередь, игрок Y может исключить A5s из своего диапазона, но тогда и игрок X вправе вернуться к стратегии колла исключительно с тузами (и в этом случае игрок Y упустит часть потенциальных выигрышей). Таким образом, игроку Y нужно найти правильное сочетание рук, при котором его ожидание против лучшей стратегии оппонента будет максимальным. Для этого достаточно только найти точку безразличия для AKs.

Предположим, что стэки обоих игроков равны 833 единицам – чуть меньше, чем 833.12, о которых мы говорили ранее (точка, в которой пуш с A5s становится прибыльным). Определим разницу в ожидании между двумя стратегиями игрока X (колл с AA, и колл с AA и AKs).

Рука игрока Y	**Разница в ожидании (<AKs, колл> = *p*(колл)*p*(AKs выигрывают) - цена колла)**
AA	(3/1225)((0.12141)(1666)-833) = -1.5447
ATs	(3/1225)((0.70473)(1666)-833) = 0.8353
A5s	(3/1225)((0.69817)(1666)-833) = 0.8085

Как видите, пуш с A5s более предпочтителен, чем с ATs, если оппонент уравнивает с диапазоном из AA и AKs.

Найдем точку безразличия для AKs у игрока X. В ней ожидание от стратегии колла с AKs должно быть равно нулю:

(-1.5447) (AA%) + (0.8353) (ATs %) + (0.8085) (A5s %) = 0

Примечание от переводчика: Здесь мы сначала нашли ожидание стратегии колла с AKs против каждой из возможных рук оппонента. Это и есть отклонение от стратегии колла только с тузами, поскольку чтобы найти ожидание от стратегии колла с AA и AKs, нам, очевидно, нужно просто сложить ожидаемые выигрыши от колла с AA и колла с AKs.

В точке безразличия игроку X все равно, что делать со своими AKs. Иными словами, ожидание игрока X от колла с AKs должно быть равно нулю. Тогда ожидаемый выигрыш от стратегии {Колл с AA и AKs} будет равен ожидаемому выигрышу от стратегии {Колл с AA}.

Естественно, частота пуша с AA будет равна 100%, получим:

0.8353 ATs% + 0.8085 A5s% = 1.5447

Поскольку A5s имеет более высокое ожидание для игрока Y, то и с ней мы также будем ставить олл-ин 100% раз:

0.8353 ATs% = 0.70935
ATs% = 87.73%

Значит, при стэке в 833 единицы, если игрок Y будет ставить олл-ин с диапазоном {AA-100%, ATs - 87.73%, A5s - 100%}, то его ожидание будет максимальным, а игроку X будет безразличен к коллу с AKs.

Обратите внимание, что раньше мы предлагали идти в олл-ин с ATs абсолютно всегда, однако как только эффективный размер стэка сократился менее чем на 0.5 единицы, частота пуша с ней снизилась почти на четверть. Более детальный анализ этой игры даст еще больше таких же необычных результатов – при определенных размерах стэков мы будем вынуждены исключить некоторые руки из диапазона игрока Y и заменить их на те, что лучше стоят против нового диапазона колла оппонента.

Очень маленькие S

Итак, мы получили весьма неплохое представление о решении рассматриваемой игры для очень больших S. Теперь давайте посмотрим, что происходит при маленьких стэках.

Для начала поговорим о ситуации, в которой оказывается игрок X. Мы уже знаем, что он будет уравнивать только с руками, которые имеют положительное ожидание против диапазона пуша. Каждый раз он должен будет принимать решение о колле ставки размером (S - 1) при банке (S + 1). Пусть его эквити в случае колл равно некому x, тогда:

$$x(2S) - (S-1) > 0$$
$$x(2S) > S - 1$$
$$x > (S - 1)/(2S)$$

Значит, игрок X обязан делать колл всякий раз, когда эквити его руки больше (S-1)/(2S).

Например, при стэках в 1.1 единицу, ему нужно будет уравнивать с комбинациями, эквити которых превышает $^{1}/_{22}$. Проще говоря, если бы игрок Y ставил олл-ин со всеми стартерами, игроку X должен бы был отвечать с любой рукой, поскольку даже 32о имеет 32.3% эквити против двух случайных карт.

Давайте представим, что игрок X действительно уравнивает со всеми руками. Тогда его оппоненту нужно будет идти в олл-ин с любой комбинацией, чье ожидание от пуша выше ожидания от фолда. Очевидно, что ожидание от пуша есть ни что иное как результат олл-ина против диапазона колла, а ожидание от фолда всегда равно нулю.

<Игрок Y, все руки> (2S) - (S - 0.5) > 0
<Игрок Y, все руки> > (S - 0.5)/2S

Итак, игрок Y, в свою очередь, будет ставить олл-ин со всеми руками, чье эквити больше (S - 0.5)/2S. При стэках в 1.1 единицу этот порог равен $^{3}/_{11}$. Такое эквити против диапазона колла игрока X есть у любой случайной руки, так что оптимальной стратегией здесь будет пуш с любыми двумя картами.

И поскольку ни один из игроков не может улучшить свою стратегию в одностороннем порядке, то при заданных стэках найденная нами пара стратегий (пуш с любыми двумя и колл с любыми двумя) будет оптимальной.

Однако как только стэки начнут расти, игрок Y первым столкнется с проблемой недостатка эквити для пуша.

Худшая рука, 32о имеет 32.3% эквити в олл-ине против двух случайных карт. Подставив это значение в формулу получим:

$$0.323 > (S - 0.5)/(2S)$$
$$S > 1.412$$

То есть, как только стэки вырастут до 1.412 единиц, игрок Y уже не сможет ставить олл-ин с 32o. Подумайте, насколько это отличается от игры при больших стэках, где игрок Y всегда ставил олл-ин с более широким диапазоном, чем диапазон колла его оппонента.

Мы можем использовать метод фиктивной игры, чтобы оценить оптимальные стратегии при различных размерах стэков. Возьмем стэк в 2 единицы. Используя формулу для определения эквити, получим, что игрок X должен уравнивать каждый раз, когда эквити его руки больше, чем $^1/_4$. Но представьте, вместо этого он будет уравнивать со всеми своими руками. Тогда лучшей контрстратегией для игрока Y будет пуш со стартерами, чье эквити превышает $^3/_8$. Как следствие, в его диапазон не войдут 13 рук: 32o, 42o, 52o, 62o, 72o, 82o, 43o, 53o, 63o, 73o, 83o, 32s, и 42s.

Самое время вернуться к игроку X и подумать о подходящей подстройке. Против диапазона, который не включает в себя 13 вышеназванных комбинаций, самой слабой рукой все также окажется 32o с 31.72% на победу. И, как результат, ему все рвано придется уравнивать со всеми стартерами. Таким образом, оба участника максимизировали свое ожидание против соответствующей стратегии оппонента, и путей для дальнейшего улучшения нет ни у одного из них.

Некоторые наши читатели сейчас могут подумать, что мы сошли с ума. Действительно, в большинстве ситуаций (и этому обычно учат всех начинающих игроков), нужно уравнивать олл-ин с диапазоном уже, чем диапазон пуша. Причина, по которой это правило не соблюдается в нашем случае кроется в исключительно маленьком размере стэков – блайнд игрока Y (0.5 единицы) составляет немалую долю его стэка. Но с увеличением количества денег у каждого из участников раздачи, этот эффект постепенно сойдет на нет.

Пусть теперь стэки у обоих игроков составляют 3 единицы. Игроку Y нужно выигрывать со своей рукой $^5/_{12}$ раз, при условии, что его оппонент отвечает с любыми двумя. Так что на префлопе ему придется расстаться с 34 комбинациями:

32o и 32s
42o-43o и 42s-43s
52o-54o и 52s-54s
62o-65o и62s-64s
72o-75o и 72s-73s
82o-85o и 82s-83s
92o-94o

С другой стороны, игроку X потребуется $^1/_3$ эквити в банке для нулевого колла. Против найденного диапазона оппонента следующие руки не обладают требуемым эквити:

32o
42o
52o
62o-63o
72o-73o
82o-83o

Теперь вернемся к игроку Y. Только что мы определили новый диапазон для его оппонента, а это значит, что изменится и функция математического ожидания от пуша. Теперь она будет выглядеть следующим образом:

(% игрок X уравнивает) (*p*(игрок Y выигрывает) (банк после колла) – цена колла + (% игрок X скидывает) (банк) > 0

Это неравенство даст нам новый диапазон для олл-ина. В ответ игрок X изменит свой диапазон и так далее. В общих чертах это и есть алгоритм фиктивной игры. Ответом для стэков в 3 единицы будет:

Диапазон пуша (игрок Y):

{22, A2s, A2, K2s, K2, Q2s, Q2, J2s, J2, T2s, T2, 92s, 95, 84s, 85, 74s, 76, 64s, 54s}

Диапазон фолда (игрок X):

{32, 42, 52, 63-, 73-, 83-}

Примечание от переводчика: Имеется ввиду, что игрок Y ставит олл-ин со всеми руками, которые лучше указанных в скобках. Для игрока X «63-» значит, что он должен скинуть руки слабее 63.

Фактически, с помощью фиктивной игры мы можем решить «Пуш или Фолд» для любых стэков. Ниже вы можете найти таблицы с оптимальными стратегиями пуша и колла при стэках менее 50 блайндов.

Цифры в таблицах – пороговые значения стэков, ниже которых пуш (или колл, в зависимости от таблицы) становится прибыльным. С другой стороны, отметки CALL и JAM означают, что с заданной рукой можно без лишних раздумий ставить или уравнивать олл-ин при стэках до 50 блайндов. Как мы уже доказали выше, некоторые руки могут то появляться, то исчезать из диапазонов, в зависимости от размера стэка. И хотя в большинстве случаев это не будет иметь решающего значения для нашей стратегии, мы пометили знаком «*» несколько стартеров, на которые стоит обратить внимание.

Стэки в таблицах указаны до внесения блайндов в банк.

Таблица Пуша для NLH

(одномастные руки – справа сверху)

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	47.5
K	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	49.2	36.2	32.2	26.4	19.9	19.3
Q	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	30.2	29.4	24.2	16.3	13.5	12.7
J	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	49.8	32.3	18.6	16.2	13.5	10.6	8.8
T	JAM	JAM	44.7	46	JAM	JAM	JAM	35.6	24.7	11.9	10.5	7.7	6.5
9	44.9	24.2	24.3	29.2	31.9	JAM	JAM	36.1	26.8	14.4	6.9	4.9	3.7
8	42.6	18.6	13	14.1	18.4	20.5	JAM	43.2	30.9	18.8	10.1	2.7	2.5
7	40.8	16.1	10.3	8.5	9.9	10.8	15,6	JAM	35.7	23.8	13.9	2.5	2.1
6	34.6	15.3	9.8	6.5	5.7	5.2	7.1	11.2	JAM	29.3	16.3	*	2
5	36.9	14.4	8.9	6	4.1	3.5	3	2.6	2.4	JAM	23.5	**	2
4	34.5	13.1	8.3	5.4	3.8	2.7	2.3	2.1	2	2.1	JAM	***	1.8
3	31.9	12.5	7.5	5	3.4	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	JAM	1.7
2	29.2	11.6	7	4.6	3	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	JAM

Руки со звездочкой следует играть следующим образом:

* 63s = пуш при стэке менее 2.3, а также в промежутке от 5.1 – 7.1
** 53s = пуш при стэке менее 2.4, а также в промежутке от 4.1 – 12.9
*** 43s = пуш при стэке менее 2.2, а также в промежутке от 4.8 – 10.0

Таблица Колла для NLH

(одномастные руки – справа сверху)

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	CALL	CALL	CALL	CALL	CALL	47.3	40.7	35.6	30.9	30.1	25.6	24.7	23.2
K	CALL	CALL	CALL	44.9	31.9	24.2	17.8	15.3	14.4	13.3	12.2	11.4	10.8
Q	CALL	46	CALL	29.1	24.3	16.2	13	10.6	10	8.9	8.5	7.8	7.2
J	CALL	27.4	19.9	CALL	18.4	13.5	10.7	8.8	7.1	6.9	6.2	5.8	5.6
T	CALL	24.1	15.6	13.2	CALL	11.6	9.3	7.4	6.3	5.2	5.2	4.8	4.5
9	39.7	17.5	11.8	9.9	8.5	CALL	8.3	7	5.8	5	4.3	4.1	3.9
8	34.5	14.1	8.8	7.7	6.7	6.1	CALL	6.5	5.6	4.8	4.1	3.6	3.5
7	29.2	12.5	8	6.4	5.5	5	4.7	CALL	5.4	4.8	4.1	3.6	3.3
6	21.9	11.1	7.4	5.4	4.7	4.2	4.1	4	CALL	4.9	4.3	3.8	3.3
5	20.9	10.3	6.8	5.1	4	3.7	3.6	3.6	3.7	CALL	4.6	4	3.6
4	18.6	9.2	6.3	4.8	3.8	3.3	3.2	3.2	3.3	3.5	CALL	3.8	3.4
3	16.8	8.8	5.9	4.5	3.6	3.1	2.9	2.9	3	3.1	3	CALL	3.3
2	16	8.3	5.6	4.2	3.5	3	2.8	2.6	2.7	2.8	2.7	2.6	CALL

Практическое применение и комментарии

За покерным столом мы редко встретим ситуации, соответствующие рассмотренным выше экстремальным примерам. Скажем, мы никогда и не подумаем играть в «Пуш или Фолд» со стэками по 500 блайндов. Однако как мы уже доказали, при бесконечно больших стэках имеет смысл разыгрывать лишь очень узкий диапазон, и наоборот. При этом с уменьшением размера стэка, диапазоны игроков расширяются достаточно плавно.

Теперь давайте обратимся к примеру 12.2, где худшей руке причиталась треть банка. Здесь при стэках в 10 единиц игроку Y необходимо было идти в олл-ин с $^{90}/_{169}$ (53.2%) всех рук, а его оппонент должен был уравнивать $^{9}/_{26}$ (34.6%) раз. В то же время в нашем примере с безлимитным Холдемом при стэках в 10 единиц игроку Y следует делать пуш с $^{774}/_{1326}$ (58.3%) рук, а игроку X – колл с $^{494}/_{1326}$ (37.3%). Как видите, эти результаты мало чем отличаются. Более того, более агрессивные стратегии в Холдеме являются следствием еще более незначительной разницы в эквити между лучшей и худшей рукой.

Интересно, что в большинстве случаев в диапазоне пуша предпочтение отдается рукам, имеющим наибольшее эквити против случайной руки (например, старшие карманные пары являются частью оптимальной стратегии даже при очень больших стэках). Однако чем меньше размер эффективного стэка, тем чаще мы будем вынуждены ставить олл-ин даже со стартерами, проигрывающими случайной руке. Например, при стэках менее 36 единиц, в диапазоне пуша оказывается 97s, при том, что она не является фаворитом против любых двух. Но в этом случае игроку Y важно лишь эквити, которое его рука имеет против диапазона колла, а не против случайной руки. И как раз средние одномастные коннекторы весьма неплохо стоят против карт, которые составляют основу диапазона игрока X (старших пар и тузов). Кроме того, таблица пуша подчеркивает важность одномастных рук – те 2.5% преимущества в эквити, которые имеют одномастные стартеры, ставят их значительно выше разномастных аналогов.

Внимательный читатель может спросить: «Зачем мне эти таблицы? Я никогда не окажусь в играх, где можно только скидывать карты или идти в олл-ин». Однако мы готовы утверждать, что игра в пуш или фолд при маленьких стэках будет оптимальной стратегией (или, по крайней мере, близкой к ней) для хэдс-апа в безлимитный Холдем. С учетом того, что в SNG-турнирах, саттелитах, а также в поздних стадиях MTT такие ситуации встречаются более чем часто, знание приведенных выше таблиц является обязательным для любого серьезного игрока. Давайте рассмотрим ситуации, где таблицы пуша и фолда могут найти свое применение.

Для начала введем следующие допущения:

- В целях сокрытия информации, нам необходимо играть все руки в одинаковой манере, будь то небольшие рейзы, лимпы или фолды
- Диапазон, разыгрываемый на баттоне, всегда будет сильнее диапазона игрока на большом блайнде (состоящего из двух случайных карт). Поэтому для игрока на баттоне рейз будет более выгодным действием, чем лимп

Примечание от переводчика: Имеется ввиду, что если игрок на баттоне делает рейз, то до того, как большой блайнд сказал свое слово, его диапазон состоит из двух случайных карт. И поскольку диапазон баттона никаким образом не может оказаться слабее, то он получает преимущество в силе руки, а также позицию.

Пусть J – некая стратегия «Пуш или Фолд» для игрока Y (баттона). Тогда игрок X может максимизировать свое ожидание против J, играя по той же самой стратегии. Теперь возьмем альтернативную стратегию, J_1, по которой игрок на баттоне делает рейз с каким-то определенным диапазоном до 2 единиц (блайндов).

Давайте предположим, что игрок X отвечает на это некой стратегией J_2 (далекой от оптимальной):
- Он делает пуш со всеми руками, с которым бы уравнивал олл-ин сам
- Он скидывает все руки, которые бы скинул на пуш

Против J_2, стратегия J_1 окажется сильнее стратегии J, поскольку в таком случае игрок Y рискует лишь 1.5 блайндами (а не всем стэком) и получает ровно то же количество фолдов от своего оппонента. Более того, он может даже скинуть некоторые свои руки, если ему будет не хватать эквити для колла олл-ина.

Однако при очень мелких стэках это, естественно, никогда не произойдет. К примеру, с эффективным стэком в 4 блайнда, игрок X поставит олл-ин в ответ на минирейз с 115 из 169 рук (63%). И если его оппонент пушит настолько широко, то у игрока Y явно есть достаточные шансы банка на колл даже с 32o. Так что при таком стэке рейз до двух блайндов равносилен олл-ину (диапазон для рейза будет таким же, как диапазон пуша в стратегии J).

Однако рейз на префлопе дает игроку X новую стратегическую возможность - колл. Как мы уже знаем, стратегические возможности обладают неотрицательной ценностью, так что со стэком в 4 единицы игроку Y следует придерживаться стратегии «Пуш или Фолд».

С другой стороны, когда стэки в раздаче составляют 100 блайндов, игроку Y всегда следует делать небольшие рейзы на префлопе. Ведь его оппонент (если он играет по стратегии J_2) будет ставить олл-ины только с очень сильными руками. Между этими крайними случаями существует некий порог, где игроку Y имеет смысл перейти на стратегию минирейза на префлопе, однако при менее глубоких стэках стратегия «Пуш или Фолд» фактически будет являться оптимальной.

Вернемся к вопросу об использовании стратегии «Пуш или Фолд» и выведем размер стэка, при котором мы можем начать делать небольшие рейзы с руками, не входящими в диапазон пуша. Фактически, нам нужно найти такой размер стэка для заданной руки, где ожидание от олл-ина будет равно ожиданию от минирейза и фолда на пуш игрока X (следующего стратегии J_2)

При стэках в 8 блайндов, диапазон олл-ина игрока X (по стратегии J_2) составит ${}^{602}/_{1326}$, или 45.4% всех рук.

С другой стороны, если мы посмотрим на стратегию пуша игрока Y, то худшей комбинацией окажется Q4o. Так что, скажем, Q3o, уже не будет входить в этот диапазон.

Тогда пусть он ставит олл-ин на префлопе с Q3o при стэках в 8 блайндов. Против диапазона колла игрока X эта рука имеет 34.8% на победу. Тогда ожидание от пуша с Q3o составит (для игрока Y):

<Пуш, Q3> = *p*(игрок X скидывает) (блайнд) + *p*(игрок X уравнивает)
p(игрок Y выигрывает) (стэк игрока X)
\+ *p*(игрок X уравнивает) (*p*(игрок X проигрывает) (стэк игрока Y)

<Пуш, Q3>= (0.546) (+1) + (0.454) (0.348) (+8) + (0.454) (0.652) (-8)
<Пуш, Q3> = -0.558 блайнда

Получили вполне предсказуемый ответ. Ожидание от фолда составляет -0.5 блайнда, так что Q3o действительно находится прямо под точкой безразличия для игрока Y при заданных стэках.

С другой стороны, ожидание от минирейза с Q3o (без учета блокеров) равно:

<Минирейз, Q3> = *p*(игрок X ставит олл-ин) (цена фолда) +
\+ *p*(игрок X скидывает) (блайнд)

<Минирейз, Q3> = (0.454) (-2) + (0.546) (+1)
<Минирейз, Q3> = - 0.638

Фактически здесь можно говорить о том, что при стэках примерно по 8 блайндов игроку Y все равно, что делать: ставить олл-ин или делать минирейз и скидывать все руки, которые не входят в диапазон пуша. И хотя порог в 8 блайндов может служить неплохой отправной точкой для дальнейших рассуждений, в наших расчетах присутствует большое допущение, которое никак нельзя проигнорировать. Дело в том, что игрок X абсолютно не обязан играть по стратегии J_2!

Поскольку он может просто уравнять минирейз, имея шансы банка 3 к 1, ожидание от такой линии для игрока Y сразу уменьшится. Так что мы смело можем добавить к пороговому значению еще пару блайндов. На наш взгляд, в хэдс-апе оптимальной стратегией скорее всего будет «Пуш или Фолд» при стэках менее 10 блайндов (в отдельных случаях – менее 12-13, если мы можем оказаться без позиции на постфлопе).

Теперь мы можем ответить который поставили в самом начале этой главы.

Безлимитный холдем, два игрока, по правилам баттон должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты. В стеке каждого из них находится по 16 фишек, блайнды составляют 1 фишку на баттоне и 2 на большом блайнде. С какой долей стартовых рук игрок на баттоне должен ставить олл-ин, если он играет оптимально?

Из таблиц ясно, что диапазон пуша должен составлять примерно 61.7% от всех рук. Многим может показаться, что это в корне неверно – действительно, зачем так часто рисковать шестнадцатью фишками, чтобы выиграть всего три? Все дело в эквити!

Найденные в этой главе стратегии могут пригодиться вам при игре в турнирах, а также в ситуациях блайнд против блайнда (если у вас или вашего оппонента короткий стэк). Кроме того, «Пуш или Фолд» хорошо показывает насколько сильным действием можем оказаться олл-ин на префлопе. Даже при значительных стэках слаблый игрок может легко нивелировать преимущество своего более опытного оппонента, при этом почти не теряя в математическом ожидании.

Нужно запомнить

* В игре «Пуш или Фолд», где лучшая рука выиграет весь банк, оптимальная стратегия окажется достаточно тайтовой, причем преимущество практически при любом размера стэков будет и коллера (игрока X).

* Когда худшая рука обладает значительным эквити, оптимальная стратегия становится значительно более лузовой.

* Оптимальная стратегия для игры «Пуш или Фолд» в безлимитном Холдеме включает в себя диапазоны гораздо слабее, чем многие могут себе представить.

* Когда мы составляем диапазон для пуша, наш выбор будет зависеть исключительно от эквити конкретных рук против диапазона колла оппонента.

* Игра по стратегии «Пуш или Фолд» будет как минимум близкой к оптимальной при стэках до 10-11 блайндов.

Глава 13
Элементарный покер: Игра AKQ

Продолжаем изучение теории игр в покере. В этой главе мы рассмотрим, возможно, простейшую форму симметричного нетривиального покера. Впервые эта идея была представлена в статье Майка Каро для журнала Card Player. По всей видимости, он придумал такую игру, чтобы на наглядном примере изучить правильные соотношения ставок и блефов. К чести автора, она весьма неплохо справляется с этой задачей. Мы же, в свою очередь, вышли за рамки Лимитного покера, для которого изначально рассматривалась AKQ, и сделали несколько интересных открытий о Безлимитных играх. Однако для начала давайте рассмотрим игру в AKQ на половине улицы с ограничением по ставкам.

Перечислим основные характеристики этой игры:

- В колоде находятся всего три карты: A (туз), K (король), Q (дама).
- Каждому игроку раздается одна карта, без возможности обмена; оба игрока ставят обязательное анте.
- Затем следует один раунд ставок, после которого карты вскрываются (если никто из игроков не выбросил свою руку в пас). На вскрытии побеждает старшая карта.

Колода из трех карт заставляет задуматься о теме, которую мы ранее не рассматривали - ***исключение карт***. В [0,1] игре у обоих участников были симметричные диапазоны, а рука одного игрока не влияла на руку его оппонента. Однако в этой игре, если у вас туз, то у оппонента могут оказаться только король или дама. Или если у вас дама, то у оппонента с равной вероятностью может оказаться король или туз.

Пример 13.1 – игра AKQ #1

- Игра на половине улицы.
- Размер банка равен двум единицам.
- Ограничение на размер ставки – одна единица.

Вот как для данной игры выглядит платежная матрица для экс-шоудауна (для игрока Y):

	Игрок Y	**Туз**		**Король**		**Дама**	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			**-1**	**0**	**-1**	**0**
	Фолд			+2	**0**	+2	**0**
Король	Колл	**+1**	**0**			**-1**	**0**
	Фолд	**0**	**0**			+2	**0**
Дама	Колл	**+1**	**0**	+1	**0**		
	Фолд	0	0	0	**0**		

Наша задача – найти оптимальные стратегии для этой игры. Мы сразу же можем упростить эту игру, исключив доминируемые стратегии. Сравнивая ситуации, когда у игрока X оказывается туз, легко увидеть, что колл всегда обладает равным или более высоким математическим ожиданием, чем фолд. Таким образом, стратегия фолда с тузом будет доминироваться стратегией колла. В результате мы можем исключить фолд с тузом из возможных стратегий для игрока X. Кроме того, можно заметить, что стратегия колла с дамой доминируется стратегией фолда. Так что мы можем исключить из возможных вариантов и колл с дамой. Теперь мы платежная матрица приняла вид:

	Игрок Y	**Туз**		**Король**		**Дама**	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+2	0
Дама	Фолд	0	0	0	0		

Перейдем к доминируемым стратегиям для игрока Y. Как видно из таблицы выше, ставка с королем доминируется стратегией чека. Точно также мы можем сразу отбросить и чек с тузом. Таким образом, мы еще больше упростили первоначальную матрицу:

	Игрок Y	Туз	Дама	
Игрок X		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+2	0

Теперь давайте прервемся и еще раз посмотрим, как мы пришли к такому результату. Сначала мы разобрали стратегии для игрока X и нашли две ситуации, которые были как минимум не хуже своих противоположностей: колл с тузами и фолд с дамами. Надеюсь, что такой вывод достаточно очевиден – мы никогда не скидываем сильнейшую руку на ривере, и не отвечаем на ставку с абсолютно безнадежной рукой. Поскольку игрок X, будучи в здравом уме, тоже никогда бы не стал действовать в таком ключе, мы можем смело исключить эти стратегии из платежной матрицы.

Далее, мы взяли полученную матрицу и схожим образом оценили варианты для игрока Y. Если у него есть король, то он знает, что блеф против туза никогда не сработает, а дама у его оппонента никогда не сделает колл. В то же время, поставив с тузом, он точно никогда не проиграет, плюс он может получить колл от короля.

Исключив доминируемые стратегии, мы остаемся с куда более простой игрой. В сущности, со стратегической точки зрения это игра с матрицей 2x2 – мы уже разбирали ее аналоги в главе 11. Как и тогда, мы снова сталкиваемся с цикличными чистыми стратегиями.

Если игрок X всегда делает колл с королями, то лучшим вариантом для игрока Y будет полный отказ от блефов в пользу вэлью бетов. В свою очередь, в ответ на такую стратегию игрок X начнет сбрасывать всех своих королей. Затем игрок Y сможет воспользоваться этим, начав блефовать в каждой возможной ситуации. А игроку X ничего не останется кроме как вернуться к своей первоначальной стратегии колла со всеми королями. Это явно свидетельствует о том, что равновесие для рассматриваемых стратегий существует лишь в неких смешанных стратегиях.

Мы можем сформировать матрицу 2x2, определив математическое ожидание для недоминируемых стратегий при их перекрестном использовании.

Здесь два недоминируемых стратегических выбора – это должен ли игрок Y блефовать с дамами, а также стоит ли игроку X делать колл с королями.

Мы сможем найти ожидание игрока Y для каждого из случаев, если рассмотрим все руки, которые могут у него оказаться, а также все возможные исходы таких игр.

Определим четыре стратегических возможности:

- Υ_1 : Y блефует с дамами
- Υ_2 : Y делает чек с дамами
- X_1 : X делает колл с королями
- X_2 : X сбрасывает королей.

Мы можем найти математическое ожидание каждой из этих пар:

Υ_1 против X_1:
Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X, но ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. Когда же игрок Y получает даму, он блефует и проигрывает одну ставку королям или тузам игрока X.

Каждое из описанных событий происходит с вероятностью $^1/_6$; игрок Y выигрывает ставку лишь один раз, но проигрывает дважды. Таким образом:

$$< \Upsilon_1 , X_1 > = - ^1/_6$$

Υ_2 против X_2:
Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X и ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. То же самое здесь относится и к случаю, когда игрок Y получает даму.

Игрок Y выиграет один раз, при этом ни разу не проиграв:

$$< \Upsilon_2 , X_1 > = + ^1/_6$$

Υ_1 против X_2:
Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. Однако как только у игрока Y на руках оказывается дама, он блефует и выигрывает банк (две ставки) у короля, но проигрывает одну ставку, если у его оппонента есть туз.

Игрок Y выигрывает две ставки, проигрывает одну:

$$< \Upsilon_1 , X_2 > = + ^1/_6$$

Υ_2 против. X_2:
Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. То же самое относится и к ситуации, когда у него оказывается дама. Таким образом, ни один из участников раздачи не выигрывает, но и не проигрывает:

$$< \Upsilon_2 , X_2 > = 0$$

В результате у нас образуется следующая матрица 2x2:

	Y ставит с дамами	**Y делает чек с дамами**
X делает колл с королями	$-\,{}^{1}/_{6}$	$+\,{}^{1}/_{6}$
X скидывает королей	$+\,{}^{1}/_{6}$	0

Умножение всех элементов платежной матрицы на положительную константу не изменит игру. Умножение на -1 просто поменяет местами выплаты между двумя игроками.

Если мы умножим матрицу игры AKQ #1 на -6, то получим:

	Y ставит с дамами	**Y делает чек с дамами**
X делает колл с королями	+1	-1
X скидывает королей	-1	0

Эта матрица должна быть знакома читателю по главе 10. Там она была обозначена как платежная матрица для «Полицейских и грабителей».

	Грабитель грабит	**Грабитель остается дома**
Полицейский патрулирует	+1	-1
Полицейский не патрулирует	-1	0

Таким образом, наша игра идентична «Полицейским и грабителям». Из анализа той игры мы знаем, что оптимальными стратегиями для участников являются ${}^{1}/_{3}$ and ${}^{1}/_{3}$. Ниже мы сможем сравнить этот результат с тем, который мы получим после вычислений.

Мы можем решить эту игру, найдя для каждого из игроков такую стратегию, при которой его оппонент станет безразличным к выбору одной из стратегических возможностей. Рассмотрим случай игрока Y, который должен решить, блефовать с дамой или нет. Его экс-шоудаун вэлью для двух действий, которые он может предпринять с дамой, будет следующим (здесь переменная «c» обозначает частоту колла с королем для игрока X):

<Y, блеф> = (проигрывает тузам) + (проигрывает королям) +
+ (короли делают фолд, он выигрывает банк)

<Y, блеф> = p(у X есть туз) (проигрывает одну ставку) +
+ p(у X есть король) p(X делает колл) (проигрывает одну ставку) + p(у X есть король) p(X делает фолд) (банк)

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = (\tfrac{1}{2})(-1) + (\tfrac{1}{2})(c)(-1) + (\tfrac{1}{2})(1 - c)(2)$$
$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}[c(-1) + (1 - c)(2)]$$
$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c + 1 - c$$
$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}c$$
$$\langle Y, \text{чек}\rangle = 0$$

Составим из полученных выражений уравнение:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}c = 0$$
$$c = \tfrac{1}{3}$$

Далее, определим частоту блефов с дамой от игрока Y, при которой игроку X будет все равно, делать колл с королями или нет. Здесь переменная «b» означает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами.

<X, колл> = (проигрывает тузам) + (выигрывает у дам)

$$\langle X, \text{колл}\rangle = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}[b(1)]$$
$$\langle X, \text{колл}\rangle = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}b$$
$$\langle X, \text{фолд}\rangle = \tfrac{1}{2}(b)(-2)$$
$$\langle X, \text{фолд}\rangle = -b$$
$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}b = -b$$
$$b = \tfrac{1}{3}$$

Таким образом, мы получили пару оптимальных стратегий: игрок X должен отвечать в $\tfrac{1}{3}$ всех случаев, когда у него оказывается король, а игрок Y должен блефовать в $\tfrac{1}{3}$ случаев, когда у него на руках дамы.

Дайвате снова немного отвлечемся и постараемся осмыслить полученный результат. Главная идея для игрока Y заключается в том, чтобы получить вэлью со своей совокупностью рук. Говоря об эксплуатации, если бы игрок Y знал, как его оппонент поведет себя с королями, то он бы смог каждый раз делать правильный выбор между блефами и вэлью бетами. Однако давайте считать, что он этого не знает, и просто хочет получать максимальную выгоду вне зависимости от действий своего оппонента.

В этом случае у него есть два источника вэлью: украденные банки с дамами и выигранные ставки с тузами. Таким образом, в идеале игрок Y хотел бы сделать так, что прибыль от каждой из этих стратегий была равнозначной. И тогда игрок X не сможет его эксплуатировать. Для этого ему нужно блефовать с такой частотой, чтобы вэлью всей его стратегии не менялось вне зависимости от действий оппонента; в частности, оно не должно зависеть от того, делает оппонент колл с королями или нет. Как оказалось, в этом случае, правильное соотношение вэлью бетов с тузами к блефам с дамами составляет 3 к 1. Иными словами, игрок Y должен делать бет с $^1/_3$ своих дам, поскольку с тузами ставку он сделает всегда. Вспомним главу 11, где мы обозначили это соотношение блефов к ставкам на вэлью как «α», и показали, что оно равно «1/(*P*+ 1)» (см. формулу 11.1). Для банка размером в две ставки мы действительно получим соотношение $^1/_3$.

Примечание переводчика: Здесь может показаться, что автор подменил понятие «частота блефа с дамами» на «соотношение блефов и вэлью бетов», однако это не так. Дело в том, что из-за специфики игры значения этих показателей действительно равны одной трети. Так, мы уже посчитали, почему игрок Y должен ставить со своими дамами $^1/_3$ раз. Если же посмотреть на соотношение блефов и вэлью бетов, то становится очевидным следующее: вероятность получить туза и даму абсолютно одинакова, и это единственные руки, с которыми мы будем ставить. Значит, если мы рассмотрим, например, шесть событий, в которых мы можем делать вэлью бет, то в трех из них у нас будут дами, в трех - тузы. С тузами мы сделаем бет все три раза, а с дамами - всего один. Таким образом, соотношение блефов и вэлью бетов окажется 1 к 3.

Та же логика применима и для игрока X. Он хочет отвечать на ставку с такой частотой, чтобы его оппоненту не было разницы, блефовать с дамами или нет. Когда блеф игрока Y срабатывает, он получает две ставки, когда нет - он теряет всего одну. Таким образом, для достижения своей цели X обязан делать колл в два раза чаще, чем фолд. В этом случае правильно соотношение составляет $^2/_3$ (остальные $^1/_3$ рук сбрасываются). Однако в половине случаев, когда оппонент блефует, у игрока X будет туз. То есть ему нужно отвечать с дополнительной частью своих рук, равной $^2/_3$ - $^1/_2$, или $^1/_6$. Поскольку короли составляют $^1/_2$ его рук, когда у оппонента дама, то ему нужно отвечать с $^2/_6$ (или $^1/_3$) своих королей. Снова обращаемся к главе 11, где мы доказали, что игрок X должен делать фолд «α» раз с руками, которые могут побить блеф. Как не сложно догадаться, здесь он сбрасывает именно $1/_3$ всех рук, способных побить блеф.

Очевидно, что игрок Y имеет положительное ожидание (или, как мы уже говорили в главе 11, положительное вэлью) в этой игре – он может сделать как чек (и получить нулевое вэлью), так и бет (и получить некое вэлью). Посчитаем общее вэлью от такой игры для игрока Y. Для этого нужно рассмотреть возможные стратегии и результаты для этого игрока. Конечно, мы могли бы рассчитать ожидание от каждого действия, однако есть куда более простой метод. Как мы уже показали выше, если каждый из игроков придерживается оптимальной стратегии, то игрок X безразличен к коллу – иными словами, для него между коллом и фолдом нет никакой разницы. Так что мы можем представить, что он всегда будет скидывать свои карты. Конечно, если бы игрок X на самом деле придерживался такой стратегии, его оппонент смог бы этим воспользоваться. Однако поскольку мы считаем цену игры, а не ищем оптимальную стратегию, мы можем просто сказать, что стратегия игрока Y останется неизменной.

Цена игры составит $1/_{18}$ ставки (для игрока Y). Мы призываем читателя проверить этот результат для всех возможных стратегий игрока X, если он делает колл с королями.

Таким образом, мы решили эту игру на половине улицы и нашли оптимальные стратегии для размера банка в две ставки. Однако мы можем использовать те же самые методы, чтобы решить такую игру для произвольного размера банка.

Давайте немного скорректируем условия – теперь размер банка в игре составляет P единиц. Полученная игра будет ничем не сложнее уже рассмотренной нами выше.

Пример 13.2 – игра AKQ #2

- Игра на половине улицы.
- Размер банка равен P единицам.
- Ограничение на размер ставки – одна единица.

Как и в прошлый раз, мы можем составить полную платежную матрицу для такой игры:

	Игрок Y	**Туз**		**Король**		**Дама**	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
	Фолд			+P	0	+P	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+P	0
Дама	Колл	+1	0	+1	0		
	Фолд	0	0	0	0		

Эта матрица может быть сокращена путем исключения доминируемых стратегий (как и в игре AKQ #1, пример 13.1):

	Игрок Y	**Туз**	**Дама**	
Игрок X		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+P	0

Две формулы безразличия, в этом случае, будут выглядеть так (здесь «b» выражает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами, а «c» - как часто игрок X делает колл с королями):

<Y, блеф> = (проигрывает тузам) + (проигрывает королям) +
+ (короли делают фолд, он выигрывает банк)

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = \left(\tfrac{1}{2}\right)(-1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(c)(-1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(1 - c)(P)$$

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}[c(-1) + (1 - c)(P)]$$

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Pc$$

$$\langle Y, \text{чек}\rangle = 0$$

Приравняем эти два выражения, получим:

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Pc = 0$$

$$1 + c - P + Pc = 0$$

$$(P + 1)c = P - 1$$

$$c = (P - 1)/(P + 1)$$

Полученное выражение для «c» и является частотой колла с королями для игрока X. Когда же у игрока Y оказывается дама, у его оппонента в половине случаев окажется туз, а еще в половине – король. Поэтому общая доля рук (тузов и королей), с которыми он будет делать колл, составляет $^1/_2$ + ($^1/_2$)$(P-1)/(P+1)$. Это, в свою очередь, означает, что он должен делать фолд $1/(P+1)$ раз (чтобы игрок Y был безразличен к блефу), что в точности равно уже известной нам константе «α».

Далее найдем частоту блефа с дамами для игрока Y:

<X, колл> = (проигрывает тузам) + (выигрывает у дам)
<X, колл> = $^1/_2$ (-1) + $^1/_2$ $[b(1)]$
<X, колл> = $-\,^1/_2 + \,^1/_2\, b$
<X, фолд>= $^1/_2\,(b)(-P)$

Составим новое уравнение:

$-\,^1/_2 + \,^1/_2\, b = \,^1/_2\,(b)(-P)$
$-1 + b = -bP$
$b(1+P) = 1$
$b = 1/(1+P)$
$b = \alpha$

И вновь мы пришли к выводу, что отношение блефов к ставкам на вэлью должно быть равно «α».

Теперь мы можем рассчитать цену игры:

Руки игроков	Выгода для игрока Y	*p*(раздачи)	Взвешенное вэлью
(A, K)	0	$^1/_6$	0
(A, Q)	$-1/(P+1)$	$^1/_6$	$-\,^1/_6\,(P+1)$
(K, A)	0	$^1/_6$	0
(K, Q)	$+P/(P+1)$	$^1/_6$	$P/6(P+ I)$
(Q, A)	0	$^1/_6$	0
(Q, K)	0	$^1/_6$	0
Сумма			**$(P-1)/6(P+1)$**

Таким образом, цена игры для игрока Y составляет $(P-1)/6(P+1)$. С увеличением размера банка, цена игры приближается к $1/_6$. Если банк будет очень большим, то игрок X просто станет отвечать со всеми своими королями, а игрок Y практически перестанет блефовать. В этой ситуации игрок Y получит ставку только если у него окажется туз, а у его оппонента – король. Вероятность такой раздачи составляет $1/_6$.

В завершение стоит сделать одну ремарку – решение, приведенное выше, действительно только для банков размером больше 1. Причина заключается в том, что когда банк меньше 1, игрок Y всегда теряет деньги, блефуя с дамами – в этом случае игрок X просто будет делать колл с тузами, которые составляют половину его рук. Даже если игрок X будет скидывать всех своих королей и отдавать банк своему оппоненту, этого все равно будет недостаточно, что компенсировать потерю одной ставки при маленьком банке. Чем ближе размер банка к единице, тем больше становится соотношение «α». При банке в 2 единицы оно равно $1/_3$, при банке в 1.5 - $2/_5$, при 1.1 - $10/_{21}$, и когда банк становится равным 1 единице, игрок Y перестает блефовать.

Мы можем проследить изменение цены игры на графике. Обратите внимание то, что происходит с линиями при P = 1: игрок Y переходит от полного отсутствия блефов к блефу с половиной своих рук. Причиной этому является тот факт, что колл превращается в смешанную стратегию, также как и блеф. Если банк меньше единицы, ни один игрок не будет ни блефовать, ни отвечать на ставки, однако такую стратегию невозможно эксплуатировать из-за частоты, с которой туз оказывается в диапазоне каждого игрока. Также вы можете заметить, что при больших размерах банка игрок X должен часто отвечать на ставку, в то время как игрок Y должен редко блефовать. Таким образом, увеличение размера банка выгодно игроку Y.

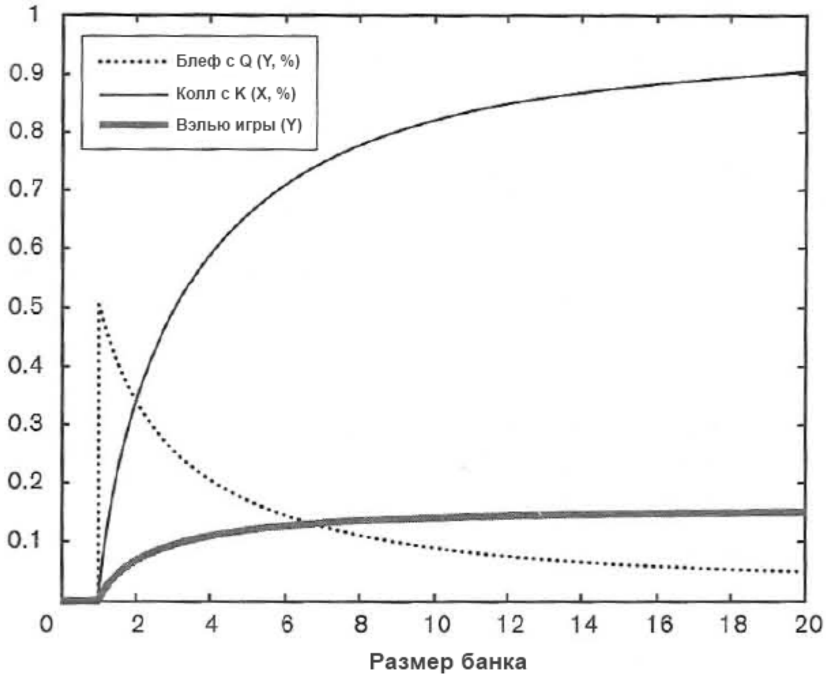


График 13.1. Оптимальные стратегии для лимитной игры AKQ

Какой вывод стоит сделать из этой главы? Изменение размера банка влияет на стратегии игроков и их ожидание. Также важно понять, что решение игр с банком произвольных размеров зачастую оказывается ничем не сложнее решения для банков фиксированного размера. В дальнейшем мы не станем искать решения для игр с определенным банком (если только этого не требует тема нашего обсуждения), и просто будем считать, что в каждой игре есть некий банк *P*.

Нужно запомнить

- Соотношения ставок на вэлью и блефов – это ключ к оптимальной игре, когда у обоих игроков есть руки с четко определенной силой (натсы, средние руки, воздух).

- В Лимитном покере практически никогда нельзя ставить на ривере руки, которые могут побить только блеф или получить колл от более сильной комбинации.

- Исключение карт может оказывать существенное влияние на диапазон оппонента.

Глава 14
Хватит гадать: Размеры ставок в безлимитном покере

Бетсайзинг - достаточно важная часть игры в безлимитный Холдем, однако по какой-то причине почти все авторы книг и статей по покеру обделяют ее своим вниманием. При этом диапазон рекомендаций, если они встречаются, максимально широк – от минибетов до овербетов. В подавляющем большинстве случаев такие советы основаны лишь на личном опыте, а математическое обоснование остается в стороне. В этой главе мы постараемся показать полезные алгоритмы, которые помогут вам лучше ориентироваться в размерах своих ставок.

Для начала, давайте рассмотрим игру на половине улицы против ясновидящего (ставки без ограничений). В прошлый раз, как вы можете помнить, мы анализировали лимитный вариант такой игры – в ней ясновидящий оппонент ставил со всеми сильными руками и небольшим количеством блефов, причем в пропорции, которая делала другого игрока безразличным к выбору действия. Однако в безлимитных играх мы можем делать ставки произвольного размера.

Пример 14.1 – Игра на половине улицы с ясновидящим

- Игра на половине улицы
- Размер банка составляет 1 единицу
- Ставки без ограничений по размеру (стэки бесконечного размера)
- Игрок Y – ясновидящий, и его рука случайным образом выбирается из диапазона, где половина рук являются блефами, а половина натсами.

Примечание: в лимитной версии этой игры мы использовали несколько иную систему обозначений. Так, банк был равен P единицами, а ставка составляла 1 единицу. Здесь же, поскольку мы можем поставить произвольное количество денег, мы будем считать, что банк равен 1 единице, а ставка – некоему «*s*» (которое привязано к размеру банка).

Давайте разберемся, как будет протекать игра. После того, как игрок X делает чек, игрок Y поставит все свои натсы, а также будет защищать эту часть своего диапазона с некоторым количеством блефов таким образом, чтобы его оппонент был безразличен к коллу. При этом игрок Y выберет размер ставки *s* и будет его использовать для всех своих рук. Если же ставки будут разного размера, то чтобы такая стратегия считалась оптимальной, ожидание от всех ставок против идеального оппонента должно быть одинаковым.

Зададим функцию *f(s)*, которая будет выражать ожидание игрока Y для различных размеров ставок. Нам необходимо найти точку, в которой функция достигает максимума – это и будет его оптимальным бетсайзингом (и решением игры по совместительству). Если игрок Y ставит на вэлью и блефует в оптимальном соотношении, то игроку X нет разницы, что делать: уравнивать или падать. Так что для упрощения расчетов мы можем считать, что игрок X уравнивает каждый раз (при условии, что стратегия игрока Y от этого никак не меняется). Мы еще не раз обратимся к такому приему, когда будем изучать [0,1] игры в следующих главах.

В главе 11 мы нашли, что отношение блефов к ставкам на вэлью для игрока Y будет равно α, а игрок X должен скидывать α от всех своих рук, способных побить блеф. Для безлимитных игр (формула 11.2):

$$\alpha = s / (1 + s)$$

Для каждого размера ставки *s* игрок Y будет блефовать с $s/(1 + s)$ от своих натсов. Пусть *y* – доля натсов в его диапазоне, тогда (из главы 11, см. объяснение после формулы 11.3):

f(s) = (частота вэлью бета) (размер ставки) (частота колла)

$$f(s) = (y)(s)\,(1 / (1 + s))$$
$$f(s) = ys/(1 + s)$$

Однако полученная нами функция не имеет локальных минимумов или максимумов:

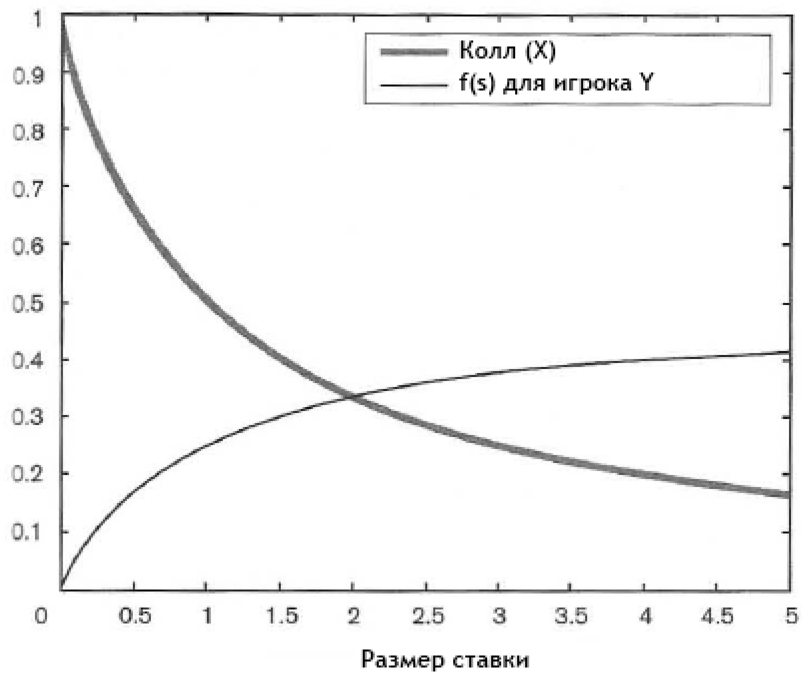


Рисунок 14.1. Игра против ясновидящего, y= 0.5

Примечание от переводчика: Линия на графика «Колл (X)» описывается коэффициентом a.

Более того, эта функция бесконечно возрастает, так что игрок Y может максимизировать свое ожидание, поставив весь стэк (и при этом блефуя соответствующее количество раз).

По условиям игры диапазон игрока Y состоит из 50% натсов и 50% блефов. Но пусть теперь y равен $^3/_5$, то есть $^3/_5$ его диапазона окажутся натсами, а $^2/_5$ блефами. При этом стэки в раздаче в пять раз больше банка. Игрок Y идет в олл-ин. Как должен ответить его оппонент? А если игрок Y сделает ставку размером в банк (s = 1)?

Что касается ответа на первый вопрос, то здесь все, кажется, просто – игрок X должен скинуть α = 5/(1 + 5) = $^5/_6$ своих рук, и уравнять со всеми остальными. Таким образом, он сделает своего оппонента безразличным к блефу.

Теперь давайте разберемся, почему это совсем не так.

- Игрок Y: Ставит 5 единиц со всеми натсами и блефами.
- Игрок X: Уравнивает с $^1/_6$ частью своих рук.

С блефом игрок Y заберет банк в одну единицу пять раз из шести, его ожидание составит $^5/_6$. В то же время он потеряет ставку s = 5 один раз из шести, итого ожидаемый проигрыш $^5/_6$ единиц. В сумме мы получим нулевое ожидание по блефам (вне зависимости от их частоты). Что касается вэлью бетов, игрок Y выиграет 5 единиц $^1/_6$ раз. И поскольку его диапазон состоит из вэлью рук на $^3/_5$, то его общее ожидание в игре составит $^1/_2$ единицы.

> *Примечание от переводчика: Если ожидание игрока Y составляет $^1/_2$ единицы, то ожидание его оппонента будет равно -$^1/_2$.*

Но что если игрок X всегда скидывает свою руку в ответ на ставку? Тогда игрок Y просто выиграет банк со всеми своими блефами (которые составляют $^2/_5$ его рук), и не получит ничего от вэлью бетов. Получается, что найденная нами стратегия не может считаться оптимальной, поскольку игрок X имеет возможность в одностороннем порядке улучшить свое ожидание, начав скидывать все руки подряд. В свою очередь, игрок Y может попытаться эксплуатировать это, ставя олл-ин со всеми своими блефами. Предположим, что он так и сделает. С натсами он ничего не получит, а с пустой рукой выиграет целый банк – в итоге его ожидание составит те же $^2/_5$ единицы. Таким образом, против заданной стратегии лучшим ответом со стороны игрока X будет фолд со всеми руками.

Примечание от переводчика: Может показаться странным, почему игрок Y получит ожидаемый выигрыш всего в две пятых единицы, когда он забирает целый банк. Однако здесь важно помнить, что мы все еще имеем дело с экс-шоудаун вэлью. Иными словами, даже если оппонент скинул свои карты, игрок Y с блефами выиграет целый банк у более сильной руки (поскольку у блефа 0% эквити, а у руки игрока X – 100%), а с натсами – ничего (игроку Y и так принадлежит 100% банка).

Это очень важный вывод: лучшей стратегией игрока X будет фолд, даже если его оппонент блефует со всеми своими мертвыми руками. Это происходит из-за того, что диапазон игрока Y оказывается очень сильным (помните, мы дали ему больше натсов), и его оппонент фактически ничего не может с этим поделать, поскольку каждый колл будет обладать отрицательным ожиданием. Мы еще поговорим о таких ситуациях в главе, посвященной играм на нескольких улицах.

Ниже вы можете увидеть график цены игры и стратегий участников:

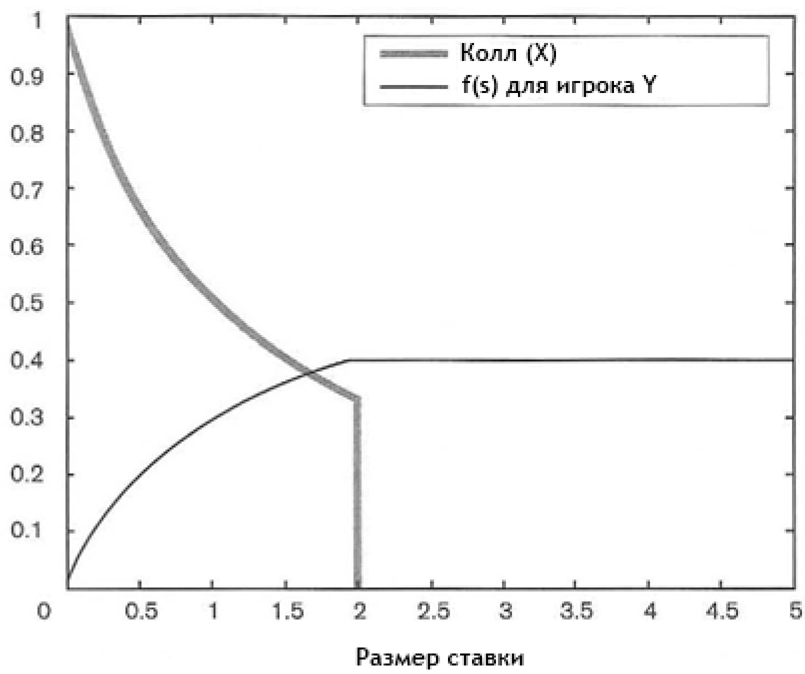


Рисунок 14.2. Игра против ясновидящего, y=0.6

Примечание от переводчика: График выше следует читать следующим образом. Линию «Колл (X)» нужно понимать как частоту колла для игрока X, которая зависит от коэффициента a. Линию «f(s) для игрока Y» следует понимать как ожидание игрока Y. Когда игрок X перестает делать колл, то его оппонент просто забирает банк в одну единицу со всеми своими блефами (помните, мы все еще говорим про экс-шоудаун, так что натсы игрока Y ничего не получают) ровно 40% раз, поскольку именно такое деление между натсами и блефами мы задали чуть выше (60% на 40%).

Теперь ответим на второй вопрос: что если игрок Y ставит не олл-ин, а одну единицу (размер банка, *s =1*)? Может сложиться впечатление, что мы можем просто взглянуть на график сверху, найти точку *s* = 1 и сказать, что игрок X должен уравнивать с половиной своих рук. Однако не все так просто. На самом деле, игроку X ***все равно нужно скидывать все руки***. Более того, даже если игрок Y поставит 1% от банка, это решение никак не изменится.

Давайте разберемся почему. Для этого нужно проанализировать, как игрок Y может эксплуатировать коллы своего оппонента. Мы знаем, что игрок X будет вынужден скинуть свою руку, если игрок Y пойдет в олл-ин. Представим теперь, что игрок X сталкивается со ставкой меньшего размера и отвечает на нее по некой смешанной стратегии. Тогда игрок Y может начать ставить мало со всеми натсами и пушить с блефами. И так далее. Однако пока у игрока Y есть возможность улучшить свое ожидание против стратегии оппонента, мы не можем говорить о том, что нашли оптимальную стратегию. С другой стороны, игрок Y может ставить олл-ин в каждой раздаче – это и есть его оптимальная стратегия. Для игрока X же это фактически значит, что его ожидание против оптимальной стратегии оппонента равно фолду еще до начала игры. Значит, оптимальной стратегией для игрока X будет фолд!

Примечание от переводчика: Это объяснение может показаться нелогичным. На первый взгляд оно не объясняет почему игрок X должен скидывать свои руки даже если его оппонент поставит 1% от банка.

Дело в том, что в случае, если s = 1%, игрок Y будет играть неоптимально, но у него будет возможность улучшить свое ожидание против игрока X, эксплуатируя его подстройки. А это значит, что стратегия игрока X также будет неоптимальной, поскольку его оппонент может увеличить свое ожидание (и таким образом, уменьшить ожидание игрока X).

В главе 13 мы рассмотрели лимитную игру AKQ. Как вы можете помнить, там мы нашли способ определять оптимальную частоту блефов и коллов для каждого из участников. Снова обратимся к этой игре, но уже в ее безлимитной вариации.

Пример 14.2 – Игра AKQ #3

- Игра на половине улицы
- Размер банка – 1 единица
- Ставки без ограничений по размеру (стэки составляют n ставок)

Правила в этой игре идентичны тем, что мы использовали в предыдущем примере – игрок X делает чек, а его оппонент пытается извлечь максимум вэлью со своим диапазоном. Однако вместо простого выбора между бетом и чеком, перед игроком Y стоит более сложная задача. Если он решится на ставку, ему придется выбрать и ее размер. Здесь мы будем считать, что чек с его стороны означает решение поставить в банк ноль единиц.

Как можно сразу заметить, со стороны игрока Y было бы глупо делать ставку размером больше банка. Если он все же это сделает, то игрок X сможет вскрывать его блефы со своими тузами и никогда не уравнивать с королями. Так что мы можем не рассматривать любые ставки, превышающие размер банка.

Теперь представим, что может случиться, если игрок Y будет использовать различные размеры ставок для блефа и вэлью. Очевидно, что игрок X сможет этим воспользоваться – достаточно только начать скидывать всех королей на «вэлью» беты и уравнивать с ними против всех «блеф» бетов. Иными словами, для каждого размера ставки, который мы используем с вэлью руками, мы должны иметь некое количество блефов (задаваемое коэффициентом α). Важно понимать, что если существует некий размер ставки *s*, при котором наше ожидание выше, чем при ставке *t*, то наша стратегия не является оптимальной. В таком случае мы можем просто начать ставить *s* со всем диапазоном и улучшить свою стратегию. Так что в оптимальной стратегии игрока Y окажется только один размер ставки (либо у нескольких из них будет одинаковое ожидание).

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию, нам нужно определить оптимальные тенденции для блефа и колла при произвольных *s*, а затем использовать их для составления функции математического ожидания игрока Y (она обозначается *f(s)*, как и в примере выше). Как только мы получим эту функцию, мы сможем найти ее максимум, и вместе с ним – оптимальный размер ставки.

Как мы знаем из главы 11, отношение блефов к вэлью бетам для игрока Y задается коэффициентом α, причем столько же рук (α) должен будет скидывать игрок X. Значение α нам известно, оно составляет $s/(1 + s)$.

Для произвольного *s*, будет верно следующее: игрок Y будет блефовать $s/(1 + s)$ раз когда у него оказывается дама, а игрок X будет скидывать $s/(1 + s)$ всех своих рук.

Мы уже показали, что игрок Y имеет нулевое ожидание со своими блефами, поскольку игрок X будет уравнивать достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к этому действию (таким образом, математическое ожидание от блефа будет равно ожиданию от чека, то есть нулю). Однако вэлью беты будут обладать положительным ожиданием для игрока Y, поскольку его оппонент иногда будет уравнивать с королем.

Игрок X должен уравнивать (1 – α) раз, или 1/(1 + s). Вычтем отсюда $^1/_2$, поскольку с тузами игрок X, очевидно, всегда будет делать колл:

$$c_{kings} = 2(1/(1+s) - {}^1/_2)$$
$$c_{kings} = 2/(1+s) - (1+s)/(1+s)$$
$$c_{kings} = (1-s)/(1+s)$$

Примечание от переводчика: Вы уже сталкивались с этой формулой в прошлых главах.

Итак, игрок X должен уравнивать с (1 - s) / (1 + s) своих королей. Если у игрока Y при этом окажется туз, то он выиграет ставку s, а ожидание от такого сценария составит $s(1-s)/(1+s)$. Причем случится это $^1/_6$ раз, поэтому ожидаемый выигрыш для игрока Y будет равен:

$$f(s) = s(1-s)/6(1+s)$$

Все, что осталось нам сделать – выбрать s таким образом, чтобы значение функции было максимальным. Перед тем как перейти к расчетам, давайте взглянем на график полученной функции:

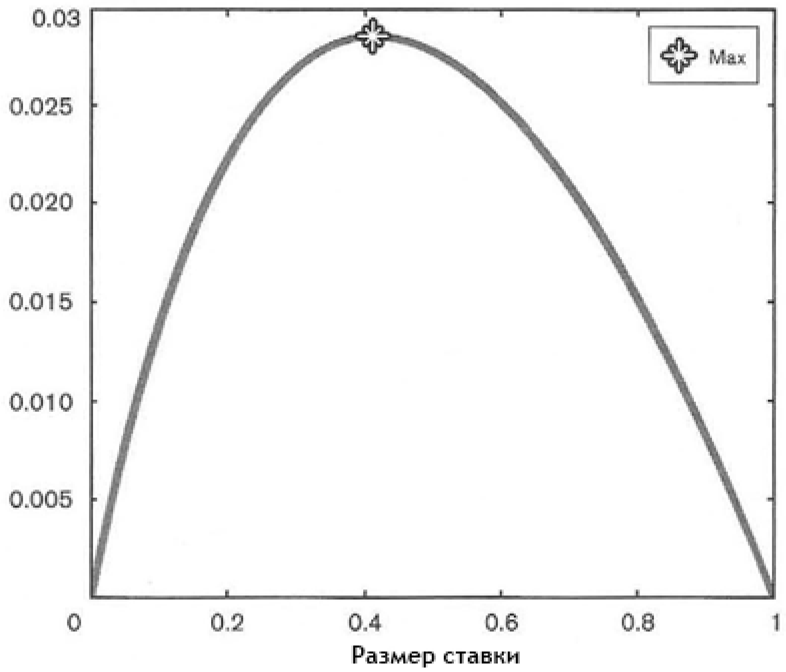


Рисунок 13.3. Ожидание игрока Y в безлимитной игрке AKQ

Найдем максимум этой функции. Для этого возьмем ее производную и приравняем к нулю:

$$f(s) = s(1 - s)/(1 + s)$$
$$f(s) = -(s^2 + 2s - 1)/(1+s)^2$$
$$s^2 + 2s - 1 = 0$$
$$(1+s)^2 = 2$$
$$s = -1 \pm \sqrt{2}$$

$-1 - \sqrt{2}$ является невозможным решением, поскольку мы не можем сделать ставку отрицательного размера. Значит, $\sqrt{2} - 1$ (или приблизительно 0.414) будет оптимальным размером ставки.

В своей книге «Теория Покера» Дэвид Склански ввел понятие «Фундаментальная Теорема Покера» по аналогии с «Фундаментальной Теоремой Алгебры». Полученный нами ответ ($\sqrt{2}$ – 1) настолько часто встречается в покерном анализе, что для простоты мы будем его называть «Золотым Сечением» в покере, а также введем для него обозначение «*r*». Мы еще не раз встретим это число в наших изысканиях.

$$r = \sqrt{2} - 1 \qquad \textbf{(14.1)}$$

Итак, в игре, в которой выполняются следующие условия:

- В вашем диапазоне есть и натсы, и блефы
- Когда у вас блеф, у оппонента окажется натс половину раз, а еще половину раз – рука, которая может побить только блеф.

Оптимальным размером ставки будет бет ($\sqrt{2}$ – 1) от размера банка (примерно 41%) со всеми натсами и блефами (причем с последними вы должны ставить 1 - $1/\sqrt{2}$ раз). Ваш оппонент, в свою очередь, будет делать колл со всеми натсами и некоторым количеством средних рук. Причем всего он будет уравнивать с $1/\sqrt{2}$ от всех своих рук (70% диапазона).

Мы можем использовать этот алгоритм, чтобы решить и более сложные безлимитные игры. В AKQ мы определили, что оптимальная стратегия подразумевала только один размер ставки. Однако как мы сейчас покажем в примере с распределением [0,1], иногда диапазон наших ставок может быть более широким.

Пример 14.3 - [0,1] игра #3

- Игра на половине улицы
- Ставки без ограничений. Эффективный стэк значительно больше банка
- Размер банка – 1 единица
- Игроки могут скидывать свои карты

Здесь мы имеем дело с уже знакомой ситуацией – игрок X делает чек, а его оппонент может ответить либо чеком, либо ставкой. Однако здесь нам придется рассматривать не одну, а две переменные: силу руки и размер ставки. В случае с лимитной AKQ, если у игрока Y оказывалась дама, то он мог выбрать между ставкой и чеком. В безлимитной версии игры, ему также надо было выбрать размер ставки.

В игре [0,1] игроку Y необходимо определить размер ставки для каждой руки, причем вполне возможно, что он будет вынужден использовать плавающий бетсайзинг (в зависимости от силы своей руки). Как и в предыдущих примерах, для решения этой игры мы введем систему переменных, и каждый из игроков будет стараться максимизировать свое ожидание, используя только те переменные, на которые он может повлиять.

Для начала, давайте вернемся к некоторым выводам, которые мы сделали в примере 14.2. Так, мы можем с уверенностью сказать, что стратегия игрока Y будет подразумевать и блефы, и вэлью беты, причем они будут связаны между собой коэффициентом α. Тогда игрок X должен будет уравнивать ставку *s* от своего оппонента такое количество раз, чтобы сделать его безразличным к блефу.

Мы можем выразить стратегию игрока X через функцию от s. Пусть *x(s)* – порог колла для игрока X. Тогда диапазон *x(s)* будет состоять только из рук, которые могут побить блеф. Очевидно, что игрок X никогда не будет уравнивать с руками, проигрывающими блефам своего оппонента. Причем игрок X никогда не будет делать колл в точке x(0), которую мы назовем x_0 (в ней размер ставки равен нулю).

Примечание от переводчика: Пороговым значением для колла у игрока X является x(0), поскольку при ставке в 0, он не может делать колл, и как уже было отмечено выше, диапазон его колла зависит от размера ставки. Таким образом, в диапазоне игрока X должна существовать некая настолько слабая пороговая рука, которая ничего не желает вкладывать в банк.

Игрок X будет строить свою функцию *x(s)* таким образом, чтобы в случае, когда руки его оппонента слабее x_0, он будет безразличен к блефу. Иными словами, игрок X будет уравнивать ставку размера *s* достаточное количество раз, чтобы его оппоненту не было разницы, что делать: делать чек или ставить *s* с мертвой рукой. Таким образом, s_1, s_2, s_3 и так далее будут иметь ожидание равное ожиданию чека для игрока Y.

Найдем порог безразличия:

Рука игрока X	**Игрок Y ставит s**	**Игрок Y делает чек**
[0, x(s)]	-*s*	0
[x(s), y_0]	1	0

P(у игрока X сильная рука)(-s) + p(у игрока X слабая рука)(+1) = k

$(x(s) - 0)(-s) + (y_0 - x(s))(+1) = k$
$Y_0 - x(s) - sx(s) = k$ (где k – некая константа)
$x(s) = (y_0 - k)/(1+s)$

Примечание от переводчика: Мы уже сталкивались с такими диапазонами, когда анализировали игру «Пуш или Фолд». Так, [0, x(s)] означает диапазон рук для игрока X от сильнейших (0) до порога колла (x(s), зависящего от размера ставки). В свою очередь, диапазон [x(s), y_0] включает в себя все руки от порога колла игрока X до порога блефа игрока Y.

Не совсем ясно, почему в правой части уравнения авторы используют вместо 0 некую константу «k», которая должна обозначать ожидание от чека. Ведь если принять, что она равна нулю, мы получим те же результаты, что и в главе 11 (при этом сам ход решения никак не пострадает). Причем при k = 0 мы можем получить важный результат, который окажется полезным в нахождении x_0.

Мы уже определили, что $x(0) = x_0$, тогда $y - k = x_0$:

$$x(s) = x_0/(1+s) \qquad \textbf{(14.2)}$$

Мы вывели формулу, которая фактически говорит следующее: если игрок X сделает чек, а его оппонент поставит *s*, то игрок X сделает колл со всеми руками лучше, чем $x_0/(1+s)$. Сейчас мы еще не имеем представления о значении x_0, однако игрок X никогда не должен уравнивать даже самые незначительные ставки, если его рука хуже найденного нами порога.

Теперь вернемся к стратегии игрока Y.

Его стратегия для вэлью бетов также будет зависеть от *s*. Нам нужно составить функцию, которая бы на заданный бетсайзинг возвращала силу руки, соответствующую этой ставке.

Если игрок Y поставит *s* с некой рукой *y*, он потеряет свою ставку, если у игрока X окажется рука лучше (это случится *y* раз), и выиграет *s*, если у его оппонента будет рука между порогом колла $x(s)$ и *y*. Это произойдет $(x(s) - y)$ раз. Следовательно, ожидание игрока Y составит:

$$\langle Y\rangle = (\text{вероятность поигрыша})\,(-s) + (\text{вероятность выигрыша})(s)$$
$$\langle Y\rangle = (y)(-s) + (x(s) - y)s$$
$$\langle Y\rangle = sx(s) - 2sy.$$

Для того, чтобы найти максимум этой функции, возьмем ее производную, получим:

$$sx'(s) + x(s) - 2y=0$$
$$s(-x_0/(1 + s)^2) + x_0 / (1 + s) - 2y = 0$$
$$x_0 / (1 + s)^2 - 2y = 0$$

$$y_1(s) = x_0 / 2(1 + s)^2$$

Это и есть стратегия вэлью бетов для игрока Y. Как вы можете видеть, каждому значению *y* соответствует свой бетсайзинг. Вы уже знакомы с принципом сокрытия информации, так что на первый взгляд может показаться, что со стороны игрока Y было бы чудовищной ошибкой следовать этой стратегии, ведь каждый раз он будет фактически открыто говорить о силе своей руки.

Однако в этой игре его оппонент никак не сможет эксплуатировать столь очевидную слабость, поскольку на каждый вэлью бет игрока Y будет приходиться строго определенное количество блефов. Так что решая что делать против ставки *s*, игрок X может сделать либо легкий колл (когда он уверен, что его рука лучшая), либо пограничный колл (когда он знает, что у оппонента либо блеф, который он может побить, либо вэлью комбинация, которая бьет его), либо скинуть свою руку. Более того, согласно правилам игры, игрок X не может делать рейз, так что игрок Y может ничуть не волноваться о том, что выдает силу своей руки.

Наша следующая задача заключается в определении диапазона для блефа у игрока Y, который бы соответствовал только что найденному вэлью диапазону. Вот что мы имеем на текущий момент:

На интервале [0, x(0)], игрок X уравнивает в соответствии со своей функцией *x(s)*. На интервале от [x(0), 1] он должен всегда скидывать свою руку.

На интервале [0, $y_1(0)$], игрок Y ставит на вэлью в соответствии со своей функцией y(*s*). На интервале [$y_1(0)$,$y_0(0)$] он будет делать чек, а с руками хуже он будет блефовать в соответствии с $y_0(0)$.

> *Примечание от переводчика: Пороговым значением для ставки у игрока Y будет $y_1(0)$, поскольку очевидно, что если сила его руки зависит от размера ставки, и ставим мы 0, то это равносильно чеку. В то же время неизвестным остается второе пороговое значение, ограничивающее диапазон чека снизу. О нем мы поговорим позже.*

Теперь найдем значение x_0, а также покажем связь между диапазонами блефа и вэлью бетов для игрока Y.

Мы уже знаем, что его функция вэлью бетов выглядит следующим образом:

$$y_1(s) = x_0 / 2(1 + s)^2$$

Можем продифференцировать эту функцию.

$$dy = x_0 / (1 + s)^3 ds$$

Мы уже знаем, что блефы и вэлью беты находятся в соотношении α, то есть *s*/(1 + *s*). Оно применимо и в этом случае, поскольку мы фактически имеем дело с приращением функции вэлью бетов (это и есть смысл производной). Получаем выражение для блефов:

$$sx_0 / (1+s)^4 ds$$

Теперь можем найти область, заключенную под функцией блефов – это и будет доля блефов в общей стратегии.

$$\int_0^\infty \frac{sx_0}{(1+s)^4} ds$$

Сделаем замену t = 1 + s, получим:

$$x_0 \int_{t=1}^{\infty} \frac{t-1}{t^4} dt$$
$$= x_0 \int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} dt$$

$$= x_0\left[\left(-{}^1/_2\, t^2\right) + \left({}^1/_3\, t^3\right)\right] \mid 1\infty$$

$$= {}^1/_6\, x_0$$

Значит, область блефов для игрока Y составляет ${}^1/_6\, x_0$. Поскольку область блефов начинается сразу за порогом x_0, имеем:

$$x_0 + {}^1/_6\, x_0 = 1$$

$$x_0 = {}^6/_7$$

Примечание от переводчика: Здесь как раз и проявляется тот «важный результат», о котором мы говорили для формулы x(s). Если мы принимаем, что k действительно равно нулю, то получим, что $x_0 = y_0$. Это, в свою очередь, значит, что область x_0 равна сумме областей ставки на вэлью и чека для игрока Y (как мы уже знаем, его пороги идут в таком порядке: 0, y_1, y_0). В сумме все три области для игрока Y составляют единицу. Поэтому уравнение выше имеет смысл.

Таким же образом мы можем определить диапазон для блефа игрока Y, однако мы оставим эту задачу нашим наиболее мотивированным читателям. Вернемся к функциям стратегий обоих участников (мы не включили сюда функцию блефа для игрока Y):

$$x(s) = {}^6/_7(1+s)$$
$$y(s) = {}^3/_7(1+s)^2$$

Однако главным выводом из этого примера являются не сами оптимальные стратегии, а метод, использованный нами для поиска правильного бетсайзинга. В решении каждой из игр (AKQ и [0,1]) мы рассматривали переменные, подконтрольные каждому из участников, а не стратегические опции. Иными словами, каждый игрок старался максимизировать свое ожидание с использованием доступных ему переменных (в нашем случае, это был размер ставки для игрока Y).

Из тех игр на половине улицы, что мы успели проанализировать в последних четырех главах, можно извлечь множество полезных уроков:

- Игра против ясновидящего – соотношения блефов и вэлью бетов
- [0,1] игра #1 – области чистых стратегий и пороги
- [0,1] игра #2 – применение соотношений блефов и вэлью бетов для непрерывных симметричных распределений
- [0,1] игра «Пуш или Фолд» - неопределенность шоудауна заставляла участников играть гораздо более агрессивно на префлопе
- «Пуш или Фолд» для безлимитного Холдема – решение реальной ситуации
- Лимитный случай игры AKQ – блокеры могут оказывать существенное влияние на оптимальную стратегию
- Безлимитный случай игры AKQ – мы впервые вывели оптимальный бетсайзинг
- [0,1] игра – решение сложных стратегических функций для непрерывных распределений.

Нужно запомнить

....

- Проблему бетсайзинга в покере можно решить аналитически. Для этого нам нужно составить функции, зависящие от размеров ставок. Тогда игрок, который решает, сколько денег будет вложено в банк, сможет найти такой бетсайзнг, который бы максимизировал его ожидание. А это, в свою очередь, позволит вывести пару оптимальных стратегий.

....

- Когда у одного из игроков есть очень сильный диапазон, либо он ясновидящий, вполне вероятно, что оптимальной стратегией для его оппонента будет фолд со всем диапазоном против любой ставки.

....

- Сокрытие информации становится особенно важным, когда игроки могут делать ставки произвольного размера.

Глава 15

Игрок X наносит ответный удар: Игры на полной улице

В предыдущих главах мы обсуждали исключительно игры на половине улицы, где игрок X мог сделать только чек, а его оппонент принимал решение о ставке или ответном чеке (который приводил к шоудауну). В главе 15 мы начинаем изучение игр на полной улице – здесь игрок X также действует первым, однако он также может выбрать между чеком и бетом. Если он выбирает последнее, то игрок Y может сделать рейз (если правила игры это позволяют), колл или фолд. Соответственно, в ответ на чек он может либо поставить, либо посмотреть на бесплатный шоудаун.

Некоторые из выводов, которые мы сделали при анализе игр на половине улицы, окажутся полезными и здесь, однако какие-то концепции нам придется проработать с чистого листа. Так, например, соотношения ставок на вэлью и блефов для игрока X ничем не будут отличаться от таковых для игрока Y. Однако поскольку теперь игрок X может сделать бет, его диапазон для чека окажется несколько иным. А это повлияет на стратегию игрока Y.

Кроме того, важно понимать, что ***игрок X не может потерять в математическом ожидании при игре на полной улице*** (по сравнению с игрой на половине улицы), при условии, что правила игры остаются неизменными. Если бы это было не так, то игрок X мог бы проигнорировать новые стратегические возможности и следовать своей старой стратегии. По сути, здесь мы экстраполируем определение стратегических возможностей, ведь они не могут обладать отрицательным ожиданием. Таким образом, ставка для игрока X должна обладать как минимум нулевым математическим ожиданием, иначе он может просто отказаться от этой линии в пользу чека.

В-третьих, в полноценных играх (это также верно и для любой игры хоть сколько-нибудь сложнее игр на половине улицы), мы будем описывать оптимальные стратегии в несколько ином ключе. В играх на половине улице, в частности в [0,1] игре, каждый участник фактически имел всего два варианта действий. Игрок Y мог сделать чек или бет, а его оппонент мог либо уравнять, либо скинуть свою руку. И поскольку каждая из этих стратегий выражалась только одним решением, мы могли провести параллель между стратегией «фолд» и стратегическим выбором «фолд».

Также в играх на половине улицы стратегия каждого из участников была разделена на определенные области. В [0,1] играх это были отрезки, где применялся только один стратегический выбор. Кроме того, мы разобрали и примеры, где определенные руки требовалось играть по смешанным стратегиям (игра AKQ). Но в каждом из этих случаев участники выбирали диапазон рук и соответствующую ему стратегический возможность, а сумма диапазонов и составляла стратегию.

Однако в играх на полной улице ситуация меняется. Если раньше игрок X был обязан делать чек, то теперь у него есть выбор между чеком и ставкой, а затем – выбор между коллом и фолдом. На наш взгляд, это не два отдельных решения. Поэтому в наших моделях, игрок X будет выбирать из более сложных стратегий: Бет, Чек-Колл и Чек-Фолд. Изменятся и платежные матрицы – теперь они будут отражать ожидание от целых линий, а не он конкретных действий.

Приступим к анализу первой игры в этом разделе – еще одной вариации знакомой нам AKQ.

Пример 15.1 – Игра AKQ #4

- Игра на полной улице
- Размер банка – *P* единиц (P > 1)
- Размер ставки – 1 единица
- Игроки не могут делать рейзы

Составим полную матрицу экс-шоудаун выплат для рассматриваемой игры (все выплаты указываются для игрока Y):

	Игрок Y	**Туз**				**Король**				**Дама**			
		X - Бет		X - Чек		X - Бет		X - Чек		X - Бет		X - Чек	
Игрок X		Колл	Фолд	Бет	Чек	Колл	Фолд	Бет	Чек	Колл	Фолд	Бет	Чек
Туз	Бет					-1	0			-1	0		
	Чек/Колл							-1	0			-1	0
	Чек/Фолд							+P	0			+P	0
Король	Бет	1	-P							-1	0		
	Чек/Колл			1	0							-1	0
	Чек/Фолд			0	0							+P	0
Дама	Бет	1	-P			1	-P						
	Чек/Колл			1	0			1	0				
	Чек/Фолд			0	0			0	0				

Мы можем сразу исключить доминированные стратегии и упростить игру. Для игрока X линия Чек/Фолд с тузом явно доминирована линией Чек/Колл. Обратное верно для дамы – линия Чек/Фолд имеет более высокое ожидание. Что касается игрока Y, то нам следует исключить Колл с дамой и Фолд с тузом. Кроме того, Чек с тузом доминирован Бетом. Получим следующую упрощенную матрицу:

Игрок X	Игрок Y	Туз		Король				Дама		
		Колл	Бет	Колл	Фолд	Бет	Чек	Фолд	Бет	Чек
Туз	Бет			-1	0			0		
	Чек/Колл					-1	0		-1	0
Король	Бет	1						0		
	Чек/Колл		1						-1	0
	Чек/Фолд		0						+P	0
Дама	Бет	1		1	-P					
	Чек/Фолд		0			0	0			

Как вы можете заметить, стратегия Бет с королями доминирована для обоих игроков:

Игрок X	Игрок Y	Туз	Король		Дама	
		Колл/Бет	Колл/Чек	Фолд/Чек	Фолд/Бет	Фолд/Чек
Туз	Бет		-1	0	0	0
	Чек/Колл		0	0	-1	0
Король	Чек/Колл	1			-1	0
	Чек/Фолд	0			-P	0
Дама	Бет	1	1	-P		
	Чек/Фолд	0	0	0		

Давайте посмотрим на стратегические выборы игрока X. Он может сделать Чек со всеми королями, а затем уравнять или скинуть на ставку оппонента, чтобы сделать игрока Y безразличным к блефу с дамой. Кроме того, он должен выбрать стратегию для своих тузов и дам. Так, с тузом он может выбрать Чек/Колл и получить вэлью от блефа оппонента (когда тот поставит с дамой). Однако вэлью есть и в ставке – тогда игрок Y может иногда уравнять с королем. Что касается дам, то игрок X получает вэлью от успешного блефа против королей и теряет вэлью в ситуациях, когда его оппонент делает колл с A и K.

Для игрока Y все немного проще – ему нужно выбрать стратегии только для своих королей (с которыми он должен уравнивать достаточно часто, что сделать своего оппонента безразличным к блефу с дамой) и дам (так чтобы его оппоненту было все равно, что делать со своими королями).

Таким образом, стратегия для игрока X будет состоять из трех переменных:

- Частота бета с тузами - *x*
- Частота колла с королями - *c* (поскольку игрок X всегда делает чек с королями, то эта переменная относится к линии Чек/Колл)
- Частота блефа с дамами – *b*

Стратегия его оппонента будет включать в себя две переменные:

- Частота колла с королями - c_y
- Частота блефа с дамами - b_y

Давайте рассмотрим ситуацию, когда игрок X делает ставку. Мы уже определили, что такой сценарий возможен только когда у него на руках тузы или дамы. Оппонент должен уравнивать с королями настолько часто, чтобы сделать его безразличным к блефу. Причем не имеет значения, делает ли игрок X ставку с тузами каждый раз, или иногда выбирает линию Чек/Колла. Также как и в играх на половине улицы, если игрок X ставит с диапазоном, состоящим из тузов и дам, игрок Y должен скинуть ровно α от своих рук, способных побить блеф. Используя наши выводы из игры AKQ #2 (пример 13.2), мы можем сказать, что когда игрок X делает ставку, его оппонент должен уравнивать с $(P-1)/(P+1)$ своих королей.

В свою очередь, игрок X должен ставить с тузами и дамами таким образом, чтобы сделать своего оппонента безразличным к коллу с королями. И здесь нам стоит обратиться к разнице между экс-шоудаун ожиданием для двух возможных действий игрока Y. Когда он уравнивает ставку с королем, туз игрока X выиграет одну единицу. В то же время, если игрок Y скинет свои карты, то он не выиграет ничего (помните, что мы говорим только об экс-шоудауне, так что если лучшая рука забирает банк, то фактически она ничего не выигрывает). Однако когда у игрока X оказывается дама, игрок Y выигрывает не только ставку от своего оппонента, но и весь банк, поскольку альтернативой для него был бы фолд и проигрыш банка худшей руке. Таким образом, поскольку игрок Y выигрывает $(P+1)$ ставок, уравнивая против дамы, и проигрывает 1 ставку против туза, игрок X должен ставить с одной дамой на каждые (P+1) тузов.

> *Примечание от переводчика: Хотя это определение может показаться немного запутанным, мы уже сталкивались с ним при решении игры AKQ ранее. Его также легко проверить, составив формулы для математического ожидания в описанных ситуациях. Поэтому подробно разбирать формулу для вывода коэффициента «а» мы не будем.*

Выражаясь на языке формул:

$$b/x = 1/(P+1) = \alpha \qquad \textbf{(15.1)}$$

И снова мы видим, что фундаментальная константа, выражающая отношение блефов к ставкам на вэлью, никак не изменилась. Мы также можем не обращать внимания на переменную b в стратегии игрока X, поскольку мы легко сможем найти ее с помощью описанного выше уравнения.

Перейдем к случаю, когда игрок X делает чек. Здесь почти полностью повторяется ситуация из игры #2, за исключением того факта, что игрок X должен ставить со своими тузами x раз (а не делать чек со всеми диапазоном, как раньше). Игрок Y, в свою очередь, поставит со всеми тузами и α от своих дам. И чтобы сделать своего оппонента безразличным к блефу, игрок X должен из своего оставшегося диапазона скинуть α рук, способных побить блеф.

Предположим, что игрок X делает чек со всеми тузами (тогда $x = 0$). В таком случае в его диапазоне окажется равное количество королей и тузов, и он будет вынужден скинуть α от этих рук (естественно, предпочитая королей). Как мы показали в игре AKQ #2 (пример 13.2), он будет делать фолд с $(P-1)/(P+1)$ от своих королей. Однако в нашем случае общее количество рук в его диапазоне будет уменьшено на x тузов, с которыми он ставит. Поэтому в диапазоне Чек/Колла окажется чуть больше королей.

Диапазон игрока X после чека:

Диапазон = (все тузы) (часть тузов, с которыми они сделал бет)
+ (все короли)

$$\text{Диапазон} = \left(\tfrac{1}{2}\right)(1 - x) + \left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\text{Диапазон} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

Диапазон для фолда = (α) (диапазон)

$$\tfrac{1}{2}(1 - c) = \alpha\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$1 - c = \alpha(2 - x)$$
$$c = 1 - 2\alpha + \alpha x \qquad \textbf{(15.2)}$$

Примечание от переводчика: в левой части уравнения – руки, с которыми игрок X должен делать фолд. Этот диапазон состоит из королей, с которыми он не делает колл, то есть (1 – c), но поскольку королей в его диапазоне всего половина, то необходимо использовать коэффициент $\tfrac{1}{2}$.

Мы можем проверить полученную формулу, подставив вместо x два экстремальных значения. Для начала, посмотрим что произойдет, если x равен 0%:

$$c = 1 - 2\alpha + \alpha x$$
$$c = 1 - 2\alpha$$
$$c = 1 - 2\alpha\,[1 / (P + 1)]$$
$$1 - 2\alpha = (P + 1 - 2) / (P + 1)$$
$$c = (P - 1) / (P + 1)$$

Чего и следовало ожидать. Теперь, пусть x равен 100%. Если игрок X ставит со всеми своими тузами, ему нужно скинуть α от своих королей, чтобы сделать оппонента безразличным к блефу с дамой. Наша формула покажет, что в таком случае $c = 1 - \alpha$.

Эти уравнения полностью описывают действия каждого игрока во всех возможных ситуациях, однако мы все еще не знаем значения x.

Итак, на данный момент мы знаем, что:

- Игрок X ставит с x своих тузов и αx дам
- Игрок X делает Чек/Фолд с оставшимися дамами, а с тузами – чек и колл
- Игрок X делает чек и колл с $(1 - 2\alpha + \alpha x)$ своих королей, а с остальными – чек и фолд
- Игрок Y уравнивает ставки с $1 - 2\alpha$ всех королей, а также со всеми тузами
- Игрок Y скидывает оставшихся королей, а также всех дам
- Игрок Y ставит в ответ на чек с тузами и α всех дам

Мы нередко будем встречаться с похожими ситуациями, когда у нас есть готовое решение для игры, однако нам не известна какая-то ключевая переменная. В таком случае мы будем использовать правило, по которому контролирующие эту переменную игроки будут выбирать ее значение таким образом, что максимизировать свое ожидание.

Чтобы найти x, сначала нам нужно определить цену игры (то есть ожидание игрока Y). Всего существуют шесть различных случаев:

Случай 1:
Игрок X: A, Игрок Y: K

Здесь игрок X поставит x раз, а его оппонент уравняет $1 - 2\alpha$ раз. Итоговое ожидание для игрока Y: $-x(1 - 2\alpha)$. Когда игрок X делает чек, цена игры будет равна нулю.

Случай 2:
Игрок X: A, Игрок Y: Q

Если игрок X сделает ставку, то цена игры будет равна нулю. Однако он также сделает чек $(1 - x)$ раз, и тем самым ровно α раз заставит своего оппонента поставить с дамой. Цена игры равна $-\alpha(1 - x)$.

Случай 3:
Игрок X: K, Игрок Y: A

Игрок X сделает чек 100% раз, а когда его оппонент поставит, он будет уравнивать ($1 - 2\alpha + \alpha x$) раз. Цена игры в таком случае составит $1 - 2\alpha + \alpha x$.

Случай 4:
Игрок X: K, Игрок Y: Q

Игрок X снова всегда сделает чек, а игрок Y будет блефовать α раз. В случае колла, игрок Y потеряет одну ставку, а в случае фолда – выиграет весь банк. Мы знаем, что общее ожидание от блефов игрока Y должно быть равно нулю, поскольку оптимальная стратегия его оппонента предполагает отсутствие разницы между блефом и чеком (ожидание чека равно нулю). Поэтому сумма Случая 2 и Случая 4 должна равняться нулю. Поэтому здесь цена игры для игрока Y составит $\alpha(1 - x)$.

Случай 5:
Игрок X:Q, Игрок Y: A

Игрок X будет блефовать αx раз. Игрок Y всегда будет делать колл, и получит ожидание αx.

Случай 6:
Игрок X: Q, Игрок Y: K

Ожидание от блефов для игрока X должно быть равно нулю, поэтому сумма Случая 5 и Случая 6 должна быть равна нулю. А это значит, что в этой ситуации игрок Y имеет ожидание $-\alpha x$.

Мы можем представить полученные значения в виде таблицы:

Ситуация	**Цена игры**
(A, K)	$-x\ (1 - 2\alpha)$
(A, Q)	$-\alpha\ (1 - x)$
(K, A)	$1 - 2\alpha + \alpha x$
(K, Q)	$\alpha\ (1 - x)$
(Q, A)	αx
(Q, K)	$- \alpha x$
Итого	$(x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha)\ /6$

Последнее выражение связывает цену игры со значением x. Вы можете посмотреть, как меняется цена игры в зависимости от *x* и размера банка на графике ниже:

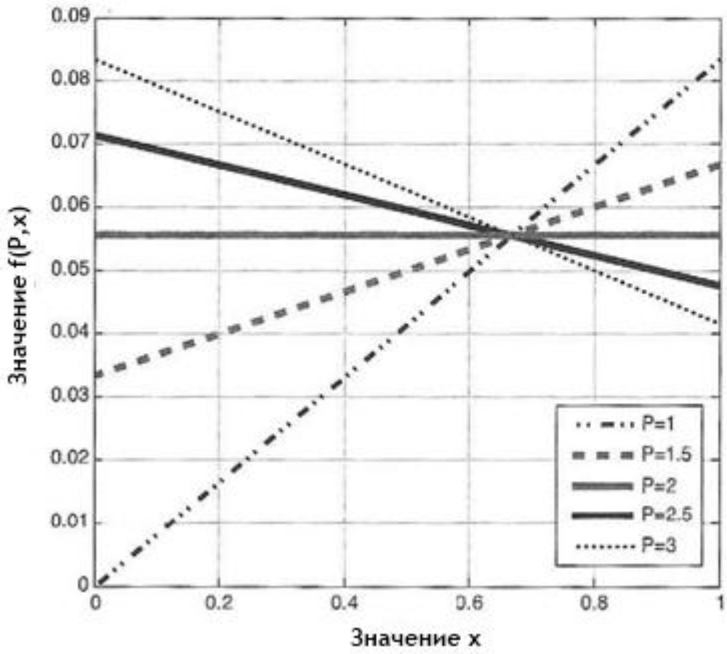


Рисунок 15.1. Цена игры AKQ #4 при различных значениях x

Цена игры оказывается минимальной при $x = 1$ для размеров банка более 2, а при $x = 0$ для банков между 1 и 2 единицами.

Примечание от переводчика: Здесь решается задача минимизации цены игры (иными словами – минимизация ожидания игрока Y при условии, что все стороны играют оптимально), поскольку переменная x находятся под контролем игрока X. А он, в свою очередь, хочет уменьшить ожидание своего оппонента. Иными словами, сейчас мы смотрим на эту ситуацию со стороны игрок X.

Получим следующие оптимальные стратегии:

Для P < 2:

Игрок X:
Делает чек со всеми своим диапазоном
Уравнивает со всеми тузами и $(P - 1)/(P + 1)$ королей

Игрок Y:
Ставит со всеми тузами и $1/(P + 1)$ своих дам

Для P > 2:

Игрок X:
Ставит со всеми тузами и $1/(P+1)$ дам
Уравнивает с $P/(P+1)$ своих королей

Игрок Y:
Если игрок X делает чек – бет со всеми тузами и $1/(P+1)$ дам
Если игрок X делает бет – колл со всеми тузами и $(P-1)/(P+1)$ королей

Правила этой игры не предусматривают возможность рейза. Однако легко доказать, что включив в свою стратегию рейз, ни один из игроков не улучшит свое ожидание по сравнению с найденными нами оптимальными стратегиями. Таким образом, описанное выше решение применимо и для более сложной игры, где игроки могут делать рейзы.

Единственное, чем игры на полной улице отличались от своих урезанных аналогов – это количество стратегических выборов, доступных игрокам. Все остальные ключевые коэффициенты и правила остались неизменными: блефы и вэлью беты находятся в соотношении α, игроки все еще должны скидывать α рук, способных побить блеф и так далее. Дополнительную сложность игре добавило только решение о чеке с тузами для игрока X.

Теперь давайте посмотрим на безлимитную версию этой же игры. Как вы можете помнить, мы решили игру AKQ #3 (пример 14.1) в достаточно схожей манере: вывели функцию от размера ставки *s* для игрока Y, а затем нашли ее максимум. Может сложиться ложное впечатление, что имея на руках результаты для игры на половине улице, решение полной версии AKQ не окажется намного сложнее. Это далеко не так, однако мы вернемся к этой теме немного позже.

Сейчас же мы бы хотели обратиться к еще одной вариации игры AKQ с необычной структурой ставок.

Пример 15.2 – Игра AKQ #5

- Игра на полной улице
- Размер банка составляет 4 единицы
- Игроки вправе сделать чек, бет, или рейз. Причем размер ставок и рейзов может составлять либо 1, либо 2 единицы, по выбору игрока.

Рассматриваемая здесь игра идентична той, что мы проанализировали в предыдущем примере (15.1) с банком в 2 единицы, за той лишь разницей, что теперь каждый из игроков может поставить $^1/_4$ банка, вместо половины. Решая игру #4 мы установили, что при P = 2, игрок X был безразличен к ставке с тузами. Это позволило нам сделать вывод о том, что цена такой игры была идентична цене игры на половине улицы, где игрок X должен был делать чек со всеми своим диапазоном (поскольку в игре на полной улице при банке в 2 единицы он мог сделать чек и не потерять в ожидании).

В примере 15.1 мы также нашли, что цена игры составляла:

$$f\ (1,\ P) = (x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha)\ /\ 6$$

Пусть x равно нулю (игрок X безразличен к ставке с тузами), а $\alpha = 1/(2 + 1) = {}^{1}/_{3}$.

> *Примечание от переводчика: Здесь авторы применяют уже описанный ранее прием, когда в точке безразличия (в данном случае – для игрока X, по отношению к бету и чеку с тузами) мы начинаем играть по чистой стратегии (например, чек с тузами 100% раз) и фиксируем стратегию оппонента. Это становится возможным из-за равенства ожидания от бета и чека с тузами в точке безразличия.*
>
> *Иными словами, мы делаем следующее допущение: оппонент никак не поменяет свою стратегию, даже если ему будет известно, что мы всегда делаем чек с тузами. Это существенно упрощает расчеты, при этом не страдает точность получаемых ответов. Хотя в реальной игре нам следовало бы выбирать ситуации для чека и бета с тузами случайным образом, поскольку игра по любой из чистых стратегий с тузами позволила бы оппоненту без труда нас эксплуатировать.*

$$f\ (1,\ 2) = ((0)(-1 + 3\alpha) + 1 - 2({}^{1}/_{3}))/6$$
$$f\ (1,\ 2) = (1 - {}^{2}/_{3})/6$$
$$f\ (1,\ 2) = {}^{1}/_{18}$$

Однако это верно для ставки в 1 единицу при банке P = 2. Поэтому нам нужно умножить полученный ответ на два:

$$f\ (s = 2,\ P = 4) = {}^{1}/_{9}$$

Это цена игры при условии, что оба игрока будут следовать той же стратегии, что и в предыдущем примере, каждый раз выбирая ставку размером в половину банка. Теперь давайте посмотрим, увеличится ли ожидание любого из игроков от ставки в четверть банка.

Пусть игрок X решает делать бет в 1 единицу со всеми тузами и, соответственно, частью дам. Тогда игрок Y ответит стратегией колла с ${}^{4}/_{5}$ всех своих рук (все тузы, плюс ${}^{3}/_{5}$ королей), делая своего оппонента безразличным к блефу. В этом случае игрок X выиграет 1 единицу ${}^{3}/_{10}$ раз.

С другой стороны, если игрок X сделает чек, то его оппонент поставит с дамами $^1/_3$ раз (причем дамы занимают ровно половину диапазона) и проиграет две единицы. В таком случае ожидаемый выигрыш игрока X составит $^1/_3$. И поскольку это больше, чем $^3/_{10}$, мы можем говорить о том, что игрок X теряет в математическом ожидании, ставя одну единицу вместо двух. Значит, такая стратегия не будет являться оптимальной.

> *Примечание от переводчика: Почему игрок X будет выигрывать $^3/_{10}$ единицы? Мы рассматриваем ситуацию, где у него на руках туз и он ставит 1 единицу в банк 4. Поскольку его оппонент будет уравнивать достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к блефу с дамой, то мы можем считать, что ожидание от блефа с дамой равно нулю. Тогда игрок X будет ставить на вэлью со своими тузами, которые составляют половину его диапазона, и получать колл от $^3/_5$ королей оппонента. Умножаем 1 на $^3/_5$ и на $^1/_2$, получим $^3/_{10}$.*

> *Примечание от переводчика: Игрок Y будет проигрывать две единицы, когда игрок X делает чек, поскольку мы пока считаем, что только игрок X решает ставить четверть банка. Соответственно, его оппонент этого делать не будет.*

Если же игрок X всегда будет делать чек, то ожидание игрока Y от изменения размера ставки составит:

$$f(1, P) = (x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha) / 6$$

Тогда для P = 4:

$$f(1, 4) = (1 - {}^2/_5) / 6$$
$$f(s = 1, P = 4) = {}^1/_{10}$$

Значит, игрок Y тоже не может получить дополнительное вэлью от более мелкой ставки.

В этой игре участники также могут делать и рейз, однако поскольку игрок X поставит только с дамами и тузами, его оппоненту нет смысла вкладывать в банк еще больше денег. Единственная ситуация, где рейз имеет смысл – когда у игрока Y оказывается туз. То же самое будет верно и для игрока X.

Получается, что эта игра фактически ничем не отличается от той, что мы рассмотрели в предыдущем примере?

Сейчас выбранные нами стратегии выглядят следующим образом:

Игрок X:
Чек со всеми руками
Колл ставки в 2 единицы со всеми тузами и $1/3$ королей
Колл ставки в 1 единицу с $3/5$ королей

Игрок Y:

Если игрок X ставит, колл 2 единиц со всеми тузами и $1/3$ королей
Если игрок X ставит, колл 1 единицы с тузами и $3/5$ королей
Если игрок X делает чек, бет 2 единицы с тузами и $1/3$ дам

Вспомним одно из главных требований к оптимальным стратегиям – ***игроки не могут увеличить свое ожидание в одностороннем порядке просто изменив свои стратегии***. Это значит, что если мы можем получить более высокое математическое ожидание от другой линии розыгрыша с любой рукой, то найденная нами стратегия не является оптимальной.

Сейчас игрок X теряет $2/3$ единицы каждый раз, когда у него оказывается король. Половину раз у оппонента будет дама, с которой он поставит треть раз. Игрок X уравняет в $1/3$ случаев и выиграет две единицы. Однако две трети раз он скинет свои карты и отдаст худшей руке оппонента банк в четыре единицы. Кроме того, у игрока Y в половине случаев окажется туз, и тогда игрок X проиграет ставку в 2 единицы также $1/3$ раз. Это значит, что ожидание от розыгрыша короля против туза составляет минус $2/3$ единицы, а общий проигрыш с королем - $2/3$.

Примечание от переводчика: Формула для расчета ожидания, когда у игрока X оказывается король должна выглядеть следующим образом:

*(доля Q у игрока Y) * (Частота блефа * Частота колла * (+2) + Частота блефа * Частота фолда * (-4))*

Это равно: $1/2 * (1/3 * 1/3 * (+2) + 1/3 * 2/3 * (-4)) = - 1/3$

*(доля A у игрока Y) * (Частота ставки * Частота колла * (-2) + Частота ставки * Частота фолда * 0)*

Это равно: $1/2 * (1 * 1/3 * (-2) + 1 * 2/3 * 0) = - 1/3$

В сумме получим ожидаемый проигрыш $2/3$ *единицы.*

Если игрок X решит изменить свою стратегию и начнет уравнивать с королями, например, в половине случаев, он будет чаще выиграть против блефов, но в то же время и чаще проигрывать тузам. А поскольку соотношение блефов к ставкам на вэлью у его оппонента останется 3 к 1, его суммарный проигрыш с королем никак не изменится.

Но что если он начнет делать бет с королем?

В уже рассмотренных нами играх ставка с этой рукой была доминированной стратегией, которую мы практически сразу исключили из матрицы выплат. Действительно, мы никогда не получали колл от рук хуже, но при этом проигрывали целую ставку рукам лучше.

Однако теперь мы можем поставить всего одну единицу с нашими королями. В таком случае игрок Y уравняет со всеми тузами, а наш общий проигрыш сократится до $^1/_2$, так как мы проиграем нашу ставку ровно половину раз. Это значит, что найденная нами стратегия не является оптимальной, ведь игрок X может в одностороннем порядке улучшить свое ожидание для одной из своих рук (с -$^2/_3$ до -$^1/_2$).

Как игрок Y может ответить на такую ставку? Раньше мы полностью исключили возможность блеф-рейза, поскольку стратегия игрока X не предполагала ставку с королем (единственной рукой, против которой это действие имело бы смысл). Естественно, теперь игнорировать такую линию мы не можем. Когда у игрока Y оказывается туз, при новой стратегии игрока X рейз явно доминирует колл. Но если он делает рейз только с тузами, он не сможет получить никакого вэлью, так как его оппонент просто начнет скидывать всех своих королей. Значит, игрок Y должен защитить свои вэлью рейзы некоторым количеством блефов.

Перед нами встает еще одна сложность – мы не можем применить коэффициент *s/(1 + s)*, поскольку размер банка увеличился из-за ставки игрока X. Кроме того, игрок Y может сделать рейз двух разных размеров: на две единицы или на одну (мини-рейз).

Можно предположить, что здесь целью игрока Y будет рейз с таким количеством блефов, которое сделает его оппонента безразличным к коллу с королем. Однако как мы покажем чуть позже, блеф часто окажется весьма дорогим удовольствием для игрока Y. Поэтому он скорее должен делать блеф-рейз настолько часто, чтобы игроку X было все равно: ставить с королем одну единицу и скидывать на рейз (то есть играть по линии Бет-Фолд), либо делать чек.

Игрок X получил $^2/_3 - {}^1/_2 = {}^1/_6$ единицы дополнительного математического ожидания от бета с королем. Игрок Y должен постараться компенсировать эту разницу своими блефами. Пусть q – частота блеф-рейзов (на одну единицу). Тогда в случае успешного блефа игрок Y заберет банк в пять единиц (размер банка до ставки, плюс ставка оппонента с королем).

(банк) *p(*у игрока Y дама) q = $^1/_6$

(5)($^1/_2$) q = $^1/_6$
q = $^1/_{15}$

Таким образом, если игрок Y будет делать мини-рейз (до двух единиц), то он должен блефовать с $^1/_{15}$ со своими дамами. Это сделает его оппонента безразличным к ставке с королями. Очевидно, что игрок X должен всегда скидывать в ответ на рейз, поскольку оставшиеся 15 раз из 16 он будет играть против туза.

Как можно заметить, размер рейза игрока Y не влияет на частоту блефа, поскольку его оппонент никогда не будет уравнивать. Однако мини-рейз всегда будет более предпочтительным в этой игре, поскольку он гарантирует меньший проигрыш, если у оппонента окажется туз.

Вернемся к игроку X, которому теперь доступна новая стратегическая возможность, поскольку изменилось его ожидание от розыгрыша тузов. Раньше ожидаемый выигрыш от чека с тузами составлял $^1/_3$ единицы (благодаря блефам игрока Y). Однако теперь он может поставить с ними (а также некоторым количеством дам) одну единицу и получить колл от короля оппонента. Кроме того, иногда он будет получать рейз от дамы, которая пытается выбить из раздачи его короля.

Ожидание от ставки в одну единицу с тузом составит:

<X, бет 1 > = *p*(игрок Y делает колл)(размер ставки) +
+ *p*(игрок Y делает рейз с дамой)(размер рейза)

<X, бет 1 > = ($^3/_5$)($^1/_2$)(1) + ($^1/_{15}$)($^1/_2$)(2)
<X, бет 1 > = $^{11}/_{30}$

Примечание от переводчика: Первое слагаемое в этом выражении уже было разобрано выше – оптимальной стратегией игрока Y против ставки в одну единицу будет колл с $^3/_5$ королей, которые окажутся в его диапазоне ровно половину раз (если мы знаем, что у игрока X туз).

Ожидание от чека с тузом:

<X, чек> = p(игрок Y блефует) (размер ставки)

<X, чек> = $(^1/_2)(^1/_3)(2)$
<X, чек> = $^1/_3$

Значит, ставка с тузом добавляет к ожидаемому выигрышу игрока X $^1/_{30}$ единицы.

Давайте сделаем паузу и посмотрим на то, к чему мы пришли.

Мы задались целью найти оптимальные стратегии для игры, где правилами разрешены два размера ставок и рейзов. Сперва мы думали, что ее можно решить точно так же, как и предыдущие игры, где короли никогда не делали ставку, а остальные руки старались извлечь максимальное математическое ожидание из соотношений вэлью бетов к блефам. По нашим расчетам оба игрока могли игнорировать ставку меньшего размера, таким образом, следуя стратегии из игры #4 для банка в 2 единицы. Однако оказалось, что игрок X мог улучшить свое ожидание, начав ставить одну единицу с королями.

Затем мы нашли оптимальное соотношение рейзов на вэлью и блефов для игрока Y. Но из-за этого игроку X стала доступна новая стратегическая возможность – бет одной единицы с тузами. Такая линия извлекает извлекает вэлью с королей и дам оппонента. Первые уравнивают против блефов, вторые делают рейз против возможных королей в диапазоне игрока X.

Во всех этих стратегиях игрок X будет ставить с дамами только чтобы защитить своих тузов и гарантировать им колл от королей оппонента, так что его суммарное ожидание от блефов с дамами будет равно нулю.

Игроку X нет разницы, что делать со своими королями: чек или бет (поскольку игрок Y играет рейзом с дамой оптимальное число раз). В то же время, его ожидание увеличивается на $^1/_{30}$ единицы от маленькой ставки со всеми тузами, а это значит, что чек с ними делать уже не имеет смысла (эта линия обладает меньшим ожидаемым выигрышем). Тогда нам необходимо найти оптимальное соотношение для ставки с королями и тузами, чтобы игрок Y продолжал делать блеф рейзы. Если мы будем ставить с королями слишком часто, то потеряем часть своего ожидания из-за блеф-рейзов; слишком редко – и наши тузы будут реже собирать вэлью.

В случае успеха своего блеф-рейза игрок Y получит 5 единиц (когда у игрока X король), но потеряет 2, если получит колл (когда у игрока X туз). Получается, чтобы сделать оппонента безразличным к таким рейзам, игрок X должен ставить с A и K в соотношении 5 к 2. Поскольку с тузами он поставит всегда, то ему нужно делать бет с 40% своих королей.

Получаем новую стратегию:

Игрок X:

- Со всеми тузами, 40% королей и 20% дам – ставить 1 единицу
- Если игрок Y делает мини-рейз – отвечать ре-рейзом со всеми тузами и скидывать королей
- Если игрок Y делает рейз на две единицы – отвечать ре-рейзом со всеми тузами и скидывать королей
- Со всеми оставшимися королями и дамами – делать чек; уравнивать с королями $^4/_5$ раз ставки в 1 единицу, а ставки в 2 единицы - $^2/_3$ раз

Примечание от переводчика: Мы получили 20% дам умножив частоту вэлью бетов (с тузами) на коэффициент a для банка в 4 единицы.

Игрок Y:

- Если игрок X ставит две единицы – колл со всеми тузами и $^1/_3$ королей, фолд со всеми дамами
- Если игрок X ставит одну единицу –мини-рейз со всеми тузами и $^1/_{15}$ дам, а также колл с $^3/_5$ королей
- Если игрок X делает чек – ставить две единицы со всеми тузами и $^1/_3$ дам, делать чек со всеми королями.

Итоговая цена игры составит:

Игрок X	Игрок Y	Действия	Результат	Вероятность	Ожидание
A	K	Б1 – К	1	3/30	3/30
A	K	Б1 – Ф	0	2/30	0
A	Q	Б1 – Р1 – Р – Ф	2	1/90	1/45
A	Q	Б1 – Ф	0	14/90	0
K	A	Б1 – Р1 – Ф	-1	1/15	-1/15
K	A	Ч – Б2 – К	-2	1/15	-2/15
K	A	Ч – Б2 – Ф	0	1/30	0
K	Q	Б1 – Р1 – Ф	-5	1/225	-1/45
K	Q	Б1 – Ф	0	14/225	0
K	Q	Ч – Б2 – К	2	1/45	2/45
K	Q	Ч – Б2 – Ф	-4	1/90	-2/45
K	Q	Ч – Ч	0	1/15	0
Q	A	Б1 – Р1 – Ф	-1	1/30	-1/30
Q	A	Ч – Б2 – Ф	0	2/15	0
Q	K	Б1 – К	1	1/50	-1/50
Q	K	Б1 – Ф	4	1/75	+4/75
Q	K	Ч – Ч	0	2/15	0
Сумма				**1**	**-1/10**

Б1 – ставка в 1 единицу
Б2 – ставка в 2 единицы
К – колл
Ф – фолд
Ч – Чек
Р – рейз произвольного размера
Р1 – рейз в 1 единицу (мини-рейз)

Цена игры (для игрока X) по старой стратегии составляла $-{}^{1}/_{9}$, однако воспользовавшись новыми стратегическими возможностями, игрок X смог увеличить свое ожидание на ${}^{1}/_{90}$ до $-{}^{1}/_{10}$.

Примечание от переводчика: Здесь авторы считают цену игры не с позиции игрока Y (что требуется правилами теории игр), а с позиции игрока X. Ничего страшного в этом нет – мы просто берем уже известную нам цену игры для игрока Y (составляет ${}^{1}/_{9}$), и поскольку мы имеем дело с игрой с нулевой суммой, можно сказать, что цена игры для игрока X составляет $-{}^{1}/_{9}$.

Интересно отметить следующее: если бы игрок X знал, что стратегия оппонента никак не изменится от его подстроек, он бы предпочел всегда ставить две единицы с тузами. Однако ставка в одну единицу больше подходит для королей. Таким образом, ему приходиться выбирать между эксплуатацией со стороны оппонента (если он будет ставить по две единицы с тузами) и сбалансированным бетсайзингом.

Нужно запомнить

- Важно не игнорировать возможные структуры оптимальных стратегий, даже если они кажутся маловероятнотными. Так, в этой главе для решения более сложной игры мы воспользовались результатами и закономерностями, выведенными в прошлых примерах. И в какой-то момент могло показаться, что мы нашли правильный ответ. Однако только более глубокий анализ и сравнение ожидания всех возможных линий помогли нам прийти к абсолютно новой структуре решения.

- Найденная стратегия игры с королем выбивается из привычной модели, где все ставки на ривере должны быть либо вэлью бетами, либо блефами. Действительно, эта линия не подпадает ни под одну из категорий, поэтому мы введем для нее новый термин - ***упреждающая ставка***. Фактически, игрок X делает бет, чтобы не дать своему оппоненту максимизировать ожидание от блефа с дамами. В свою очередь, игрок Y может ответить блеф-рейзом, однако в таком случае тузы игрока X получат больше вэлью. Такая стратегия становится возможной в игре с произвольными размерами ставок, когда один из участников может поставить меньше, чем хотел бы его оппонент.

- Упреждающая ставка – отличный пример ситуации, где определенная линия обладает отрицательным ожиданием, но все равно оказывается лучше своей альтернативы (еще более убыточной). При этом общее ожидание от стратегии с упреждающей ставкой также возрастает. Вполне вероятно, что оптимальная стратегия для безлимитного Холдема предполагает такие ставки на ривере.

- Интересной особенностью этой игры является тот факт, что хотя игрок X и делает упреждающую ставку с королем, он всегда скидывает на рейз (при том, что его оппонент иногда блефует с дамами). Это происходит из-за того, что в диапазоне рейза у игрока Y тузов окажется гораздо больше. Как вы можете помнить из прошлых глав, игроку X нужно было делать колл, чтобы удержать оппонента от частого блефа, в то время как здесь доля блефов оказывается очень незначительной. Кроме того, игрок Y пытается сделать своего оппонента безразличным не к коллу с королем, а к ставке с ним.

Глава 16

Маленькие ставки, большие банки: [0,1] игры без фолдов

В этой главе мы возвращаемся к играм [0,1], с которых началось наше знакомство с серьезным покерным анализом. Такие игры тем важнее, поскольку именно они больше всего похожи на реальный покер из-за широкого спектра возможных рук, а также пороговой структуры решений.

Все игры, которые мы рассмотрим ниже, не предусматривают возможность фолда ни для одного из участников. Следствием этого правила является отсутствие диапазона для блефа как у игрока X, так и у игрока Y (поскольку критерием успешности блефа является фолд оппонента). Мы уже сталкивались с подобной ситуацией, когда рассматривали пример из лимитного покера в главе 11.

Игры без фолдов позволяют лучше понять методы извлечения вэлью с сильными руками.

Для начала мы решим самую примитивную [0,1] игру без фолдов, где игроки могут сделать только одну ставку (но не рейз). В ней игрок X должен решить, какие руки он хочет ставить на вэлью, а игрок Y – что он хочет делать в ответ на чек своего оппонента. Если один из игроков сделает ставку, другой обязан уравнять с любой рукой.

Пример 16.1 - [0,1] игра #4

- Игра на полной улице
- Ни один из игроков не может сделать фолд
- Одна ставка

Из правил следует, что в этой игре возможны только три сценария:

- Игрок X ставит – Игрок Y делает колл
- Игрок X делает чек – Игрок Y ставит – Игрок X делает колл
- Игрок X делает чек – Игрок Y делает чек

Очевидно, что игрок X всегда будет иметь диапазон для ставки. Причем эти руки никогда не окажутся слабее тех, с которыми он будет делать чек, ведь игрок Y никогда не скинет свои карты.

Если игрок X сделает чек, то его оппонент поставит со всеми руками, которые бы поставил игрок X – в таком случае ему (игроку Y) гарантировано положительное математическое ожидание. Плюс он может поставить с сильнейшей половиной оставшихся комбинаций. Тогда он получит нейтральное ожидание, если рука игрока X попадет в тот же промежуток, а если окажется хуже – выиграет одну ставку.

Стратегия игрока Y будет выглядеть следующим образом:

- Если игрок X ставит – колл с любой рукой
- Если игрок X делает чек – бет со всеми руками, которые бы игрок X поставил сам, плюс 50% от его диапазона чека.

Примечание от переводчика: Это решение должно быть интуитивно понятно, поскольку игрок X будет ставить на вэлью с достаточно сильным диапазоном, плюс, как мы уже узнали из прошлых глав, в играх без фолдов игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека своего оппонента.

Как должен ответить игрок X?

Игрок Y получает вэлью когда его оппонент делает чек. В противном случае, правила обязывают его уравнять ставку игрока X. Тогда, чтобы не дать оппоненту возможность эксплуатировать себя, игрок X должен ставить со всеми своим диапазоном. В таком случае игра будет иметь одинаковое ожидание для обоих участников.

Теперь давайте посмотрим на эту игру с другой стороны. В [0,1] играх для описания стратегии мы использовали пороги, и, как ни странно, даже в такой игре без фолдов мы также можем найти им применение.

Введем следующую параметризацию:

- Порог x_1 разделяет стратегии бет и чек для игрока X.
- Порог y_1 разделяет стратегии бет и чек для игрока Y (в случае чека его оппонента).

Если игрок X хочет играть по оптимальной стратегии, то он должен подобрать такое значение для своего порога, чтобы игрок Y не смог улучшить свое ожидание, изменяя значение y_1, и наоборот. Таким образом, каждый участник игры будет стараться сделать своего оппонента безразличным к выбору действия.

Стоит отметить, что мы все еще имеем дело с экс-шоудаун вэлью – то есть мы принимаем в расчет только ожидание от сделанных ставок (без учета банка).

Составим уравнение безразличия для точки y_1:

Рука игрока X	**Вероятность**	**<Y, бет>**	**Ожидание**	**<Y, чек>**	**Ожидание**
$[0, x_1]$	x_1	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_1, y_1]$	$y_1 - x_1$	-1	$(x_1 - y_1)$	0	0
$[y_1, 1]$	$1 - y_1$	+1	$(1 - y_1)$	0	0
Сумма			$\mathbf{x_1 - 2y_1 + 1}$		0

Примечание от переводчика: В графе руки игрока X от 0 до x_1 стоит N/A (фактически - прочерк), поскольку с этими руками игрок X всегда будет делать бет. Но для существования y_1 нужно, чтобы игрок X сделал чек (тогда игрок Y может принять решение о ставке или чеке). Поэтому случай $[0, x_1]$ не рассматривается.

По аналогии с примером 11.3, мы можем утверждать, что в уравнении безразличия суммарное ожидание от ставки должно быть равно суммарному ожиданию от чека:

$$0 = x_1 - 2y_1 + 1$$
$$2y_1 = x_1 + 1$$

Следующая точка - x_1:

Рука игрока Y	Вероятность	<X, бет>	Ожидание	<X, чек>	Ожидание
$[0, x_1]$	x_1	-1	x_1	-1	x_1
$[x_1, y_1]$	$y_1 - x_1$	+1	$(y_1 - x_1)$	+1	$y_1 - x_1$
$[y_1, 1]$	$1 - y_1$	+1	$(1 - y_1)$	0	0
Сумма			$\mathbf{1 - 2x_1}$		$y_1 - 2x_1$

Снова приравниваем ожидания от чека и ставки:

$$1 - 2x_1 = y_1 - 2x_1$$
$$y_1 = 1$$

Подставим полученное значение в первое уравнение:

$$2y_1 = x_1 + 1$$
$$2 = x_1 + 1$$
$$x_1 = 1$$

Получается, что наши рассуждения действительно были верными - оба порога находятся в точке 1, а это значит, что игрок X должен ставить 100% раз.

Пример 16.2 - [0,1] игра #5

Следующая игра разрешает участникам делать рейзы на вэлью:

- Игра на полной улице
- Две ставки
- Чек/Рейз делать нельзя
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Важное замечание, которое стоит сделать для этой игры, заключается в том, что хотя здесь и присутствует порог y_2 (между бетом и рейзом), порога x_2 не существует, поскольку игрок X не может сделать чек/рейз. Однако если он поставит, то игрок Y повысит с определенной частью своих рук.

В предыдущем примере мы показали, что игрок X должен ставить со всеми своим диапазоном – так игрок Y лишается возможности эксплуатировать его стратегию. Однако в этой игре игрок Y может делать рейз, поэтому лучшей линией для всех слабых рук игрока X будет чек и колл.

Зададим новую параметризацию:

$$0 < y_2 < x_1 < y_1 < 1$$

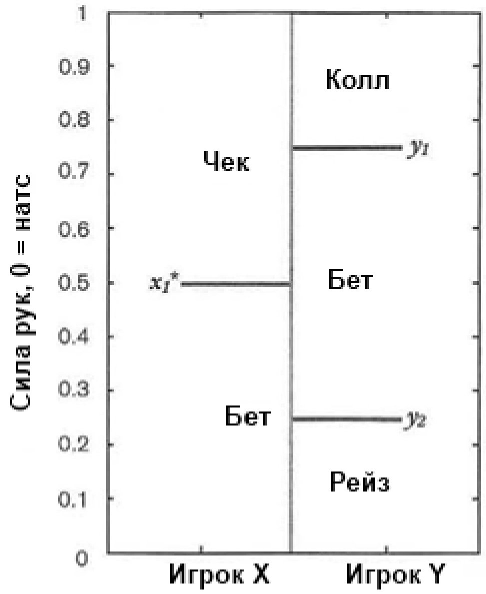


Рисунок 16.1. Структура стратегии для [0,1] игры #5

Из этой параметризации следует, что оптимальная стратегия для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид: игрок X ставит с какой-то частью своих рук; игрок Y в свою очередь, делает рейз с чуть более узким диапазоном. Но в случае чека от игрока X, его оппонент поставит с бóльшим количеством комбинаций.

Составим и решим уравнения безразличия для каждого из порогов.

Здесь мы немного упростим привычный алгоритм – вместо прямого сравнения ожидания от различных действий в пороговых точках, мы будем указывать только разницу между ними, а затем приравняем ее к нулю (иными словами, такое уравнение покажет, что разницы между действиями нет).

В точке y_2 (порог между коллом и рейзом против ставки игрока X):

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, рейз>	Разница	Произведение
$[0, y_2]$	-1	-2	1	y_2
$[y_2, x_1]$	+1	+2	-1	$-1(x_1 - y_2)$
Сумма				$\mathbf{2y_2 - x_1}$

$$2y_2 - x_1 = 0$$
$$y_2 = x_1/2$$

Получается, игрок Y должен делать рейз с половиной от диапазона, с которым игрок X будет ставить. Здесь применимо то же объяснение, которые мы дали в игре без фолдов на половине улицы. Если диапазон игрока X состоит из некоего количества рук, которые он не может скинуть, то игрок Y должен делать рейз (в примере из главы 11 мы имели дело с ситуацией Чек-Бет, здесь – с Бет-Рейз) ровно с половиной рук из этого диапазона.

Более того, даже в играх, когда игрок X может сделать ре-рейз, диапазон бета игрока X и диапазон рейза игрока Y находятся в строго определенном соотношении. Назовем его R:

$$y_2 = Rx_1$$

Значение R показывает долю рук от диапазона игрока X, с которой его оппонент должен сделать ре-рейз. В нашем случае R равно $^1/_2$, поскольку игрок X не может ответить ре-рейзом. Интересно, что когда правила в игре без фолдов ограничивают количество рейзов, для последнего из них R всегда будет равно $^1/_2$.

Идем к следующей точке – x_1. Игрок X вынужден ставить с более сильным диапазоном из-за возможного рейза со стороны оппонента:

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_2]$	-1	-2	+1	y_2
$[y_2, x_1]$	-1	-1	0	0
$[x_1, y_1]$	-1	-1	0	0
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{y_2 - 1 + y_1}$

Как вы можете заметить, составленное уравнение безразличия не зависит от x. Фактически это говорит о том, что область рейза в оптимальной стратегии игрока Y должна быть равна области ответного чека (после чека игрока X).

$$y_2 = 1 - y_1$$

В точке y_1 уже знакомая нам закономерность – игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека своего оппонента.

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_1, y_1]$	0	-1	+1	$y_1 - x_1$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-1(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{2y_2 - x_1 - 1}$

$$2y_2 - x_1 - 1 = 0$$
$$y_1 = (1 + x_1)/2$$

Имеем три уравнения и три порога:

$$y_2 = Rx_1$$
$$y_2 = 1 - y_1$$
$$y_1 = (1 + x_1)/2$$

Первые два уравнения содержат в правой части y_2, значит, мы можем составить из них одно и вывести y_1:

$$Rx_1 = 1 - (1 + x_1)/2$$

$$x_1 = \frac{1}{1 + 2R}$$

Нам уже известно, что $R = {}^1/_2$. Тогда:

$$x_1 = {}^1/_2$$
$$y_1 = {}^1/_4$$
$$y_2 = {}^3/_4$$

Давайте удостоверимся в том, что найденная нами стратегия является оптимальной. Главный критерий оптимальности – невозможность одностороннего улучшения ожидания ни одним из игроков.

Пусть игрок X получил некую руку x, которая находится в промежутке от 0 до ${}^1/_4$. С ней он может либо сделать чек, либо поставить. В последнем случае возможны следующие исходы:

- У игрока Y рука лучше, чем x, игрок X проигрывает две ставки (вероятность: $p = x$)
- У игрока Y рука хуже, чем x, но лучше ${}^1/_4$, игрок X выигрывает две ставки (вероятность: $p = {}^1/_4 - x$)

- У игрока Y рука хуже $^1/_4$, игрок X выигрывает одну ставку (вероятность: p = $^3/_4$)

<Y, игрок X ставит> = (x) (2) + ($^1/_4$ - x) (-2) + ($^3/_4$) (-1)
<Y, игрок X ставит> = 4x - $^5/_4$

Если игрок X делает чек с рукой между 0 и $^1/_4$.

- У игрока Y рука лучше, чем x, игрок X проигрывает ставку (вероятность: p = x)
- У игрока Y рука хуже, чем x, но лучше $^1/_4$, игрок X выигрывает ставку (вероятность: p = $^1/_4 - x$)
- У игрока Y рука хуже $^1/_4$, но лучше $^3/_4$ игрок X выигрывает ставку (вероятность: p = $^1/_2$)
- У игрока Y рука хуже $^3/_4$, ожидание игрока X нейтрально (вероятность p = $^1/_4$)

<Y, игрок X делает чек> = (x) (1) + ($^1/_4$ - x) (-1) + ($^1/_2$) (-1)
<Y, игрок X делает чек > = 2x - $^3/_4$

Второе выражение оказывается больше первого только если:

$2x - {}^3/_4 > 4x - {}^5/_4$
$x < {}^1/_4$

Примечание от переводчика: Это значит, что ожидание игрока Y оказывается больше, если игрок X делает чек с руками ниже $^1/_4$. Естественно, игрок X должен стараться минимизировать ожидание своего оппонента.

Таким образом, для игрока X ставка с руками в диапазоне от 0 до $^1/_4$ имеет более высокое ожидание, нежели чек. Значит, игрок X никак не может улучшить свою стратегию. Остальные пороги можно проверить в схожем ключе.

Кстати, в этом примере цена игры для игрока Y будет положительной благодаря позиционному преимуществу. Мы еще вернемся к этой теме в главе 18.

Пример 16.3 - [0,1] игра #6

- Игра на полной улице
- Игроки могут делать рейзы и ре-рейзы до бесконечности, причем размер рейза равен одной ставке.
- Чек/Рейз делать нельзя
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Эта игра очень похожа на рассмотренную выше, однако здесь игроки могут делать рейзы столько раз, сколько им захочется. Причем по оптимальной стратегии один из участников рано или поздно остановится и сделает колл.

Для этой игры пороги можно задать следующим образом.

Пусть x_1 будет порогом между чеком и ставкой. Поскольку по правилам игры чек/рейз делать нельзя, то после чека игрока X, стратегия его оппонента будет обладать лишь порогом y_1 (колл или рейз). Как мы уже убедились в предыдущем примере, y_1 будет находиться ровно на середине отрезка между x_1 и 1, поскольку это последняя ставка, и игрок X не может делать рейз. Нам также известно, что игроки никогда не станут блефовать, делая n-ый ре-рейз с руками ниже соответствующего порога.

Однако если игрок X все же поставит, это приведет к бесконечной цепочке рейзов, а, значит, и порогов. Естественно, первым из них будет y_2, который разделяет колл и рейз для игрока Y. Порог ре-рейза для игрока X (x_3) будет находиться левее y_2, порог y_4 – еще левее и так далее.

Таким образом, наша параметризация принимает вид:

$0 < y_{2n} < x_{2n-1} < \ldots < y_2 < x_1 < y_1 < 1$

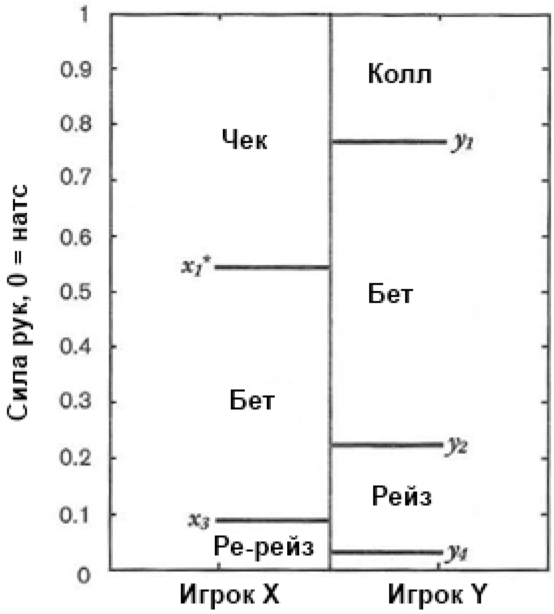


Рисунок 16.2. Структура стратегии для [0.1] игры #6

Эту игру можно назвать симметричной. Для начала, давайте рассмотрим случай, когда игрок X делает ставку. Его оппонент ответит рейзом с некой частью своих рук. Мы уже знаем отношение этих величин, оно задается R:

$$y_2 = Rx_1$$

Однако в этой игре R не равно $^1/_2$, ведь игрок X может сделать ре-рейз.

В таком случае, у игрока Y будет диапазон $[0, Rx_1]$, а игрок X захочет повысить еще раз с какой-то частью диапазона своего оппонента. Причем с точки зрения игрока X это решение ничем не будет отличаться от решения игрока Y на предыдущем рейзе.

$$x_3 = Ry_2$$

Теперь игрок Y снова должен определиться с тем, что он хочет делать против ре-рейза от игрока X. И снова он будет руководствоваться константой R. Причем для $n > 1$ будет верно следующее:

$y_n = Rx_{n-1}$ (y_3, y_5 и т.п. не существуют)
$x_n = Ry_{n-1}$ (x_2, x_4 и т.п. не существуют)

Решение для этой является ответом на вопрос: «С каким диапазоном мне стоит делать рейз, если мой оппонент может ответить ре-рейзом, при этом ни один из нас не собирается скидывать свою руку?» Если мы найдем значение R, то найдем и оптимальную стратегию для такой ситуации.

Теперь давайте рассмотрим случай, когда игрок X делает чек. Мы уже знаем, что его оппонент поставит со всеми руками лучше, чем x_1, а также с половиной рук хуже:

$$y_1 = (1+x_1) / 2$$

Кроме того, уравнение безразличия из прошлого примера оказывается применимым и здесь (поскольку игра все еще не предусматривает возможность Чек/Рейза). Поэтому для игрока Y область рейза y_2 будет в точности равна его области чека:

$$y_2 = 1 - y_1$$

Получим:

$$y_2 = 1 - (1 + x_1)/2$$
$$2Rx_1 = 2 - 1- x_1$$
$$x_1 = 1/(2R + 1)$$

Используя это значение, мы можем найти пороги y_2, x_3, y_4 и так далее через R. Более того, мы можем выразить через R и y_1.

Остается только один вопрос: чему равно R? Здесь нам потребуется еще пара уравнений безразличия.

Для игрока Y в точке y_2 (между рейзом и коллом):

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>	Разница	Произведение
$[0, x_3]$	-3	-1	+2	$2x_3$
$[x_3, y_2]$	-2	-1	+1	$y_2 - x_3$
$[y_2, x_1]$	+2	+1	-1	$- 1(x_1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{x_3+2y_2 - x_1}$

$$x_3+2y_2 - x_1 = 0$$

Это уравнение зависит сразу от трех порогов, однако мы легко можем выразить каждый из них через R и x_1:

$$R^2x_1 + 2Rx_1 - x_1=0$$
$$R^2 + 2R - 1 = 0$$
$$R = \sqrt{2} - 1$$

Как вы можете помнить, в прошлых главах мы окрестили $\sqrt{2} - 1$ «золотым сечением» в покере.

Получаем следующее решение:

$x_1 = 1/(1+2r)$ ≈ 0.5469
$y_1 = (1/(1 + 2r) + 1)/2 = (1 + r)/(1 + 2r)$ ≈ 0.7735
$y_2 = r/(1 + 2r)$ ≈ 0.2265
$x_3 = r^2/(1 + 2r)$ ≈ 0.0938
$y_n = r^{n-1}/(1 + 2r)$ (для четных $n > 1$)
$x_n = r_{n-1}/(1 + 2r)$ (для нечетных $n > 2$)

Теперь рассмотрим гораздо более сложную игру.

Пример 16.4 - [0,1] игра #7

- Игра на полной улице
- Две ставки
- Игрок X может делать Чек/Рейз
- Ни один из игроков не может сделать фолд

В примере 16.2, где Чек/Рейз был запрещен правилами игры, мы отметили, что порога x_2 не существовало. Здесь перед нами все та же игра, но с дополнительным порогом.

Для того, чтобы найти решение, нам необходимо определить, с каким диапазоном игрок X будет делать Чек/Рейз. Очевидно, что делать это он будет с руками лучше, чем y_1, иначе он потеряет в математическом ожидании (по сравнению с коллом). Кроме того, игрок X никогда не должен делать Чек/Рейз с рукой слабее, чем его собственный порог ставки. Мы уже не раз обсуждали, что эта стратегия является доминируемой.

Может показаться, что игрок X должен всегда делать Чек/Рейз со своими сильнейшими руками, однако на самом деле, любая стратегия игрока X, которая предполагает правильный диапазон для Чек/Рейза с руками старше y_2 будет ко-оптимальной. Введем следующую параметризацию:

$$0 < x_2 < y_2 < x_1 < y_1 < 1$$

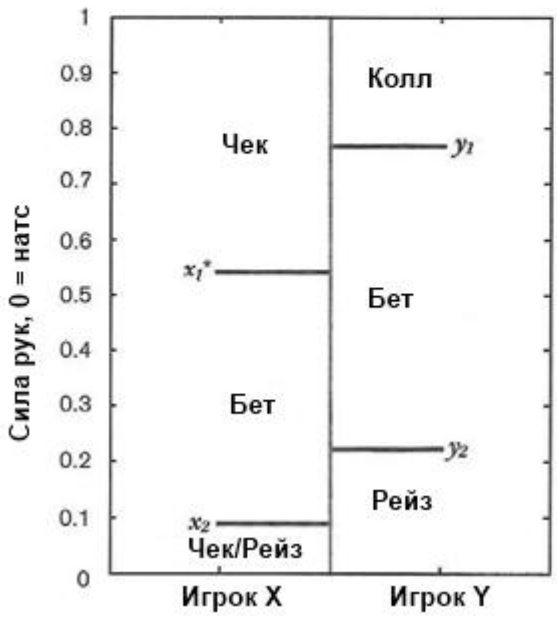


Рисунок 16.3. Структура стратегии для [0,1] игры #7

Получим следующие стратегии:

Игрок X:

Чек и рейз с диапазоном $[0, x_2]$.
Вэлью бет с диапазоном $[x_2, x_1]$.
Чек и колл с $[x_1, 1]$.

Игрок Y:

Если оппонент поставил, рейз на вэлью с $[0,y_2]$.
Если оппонент поставил, колл с $[y_2, 1]$.
Если оппонент сделал чек, вэлью бет с $[0, y_1]$.
Если оппонент сделал чек, ответный чек с $[y_1, 1]$.

Нам остается лишь составить уравнения безразличия для всех названных порогов:

Для игрока X в точке x_2 (между чек/рейзом и бетом):

Рука игрока Y	<X, чек/рейз>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_2]$	-2	-2	0	0
$[y_2, y_1]$	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{2y_1 - y_2 - 1}$

$2y_1 - y_2 - 1 = 0$
$y_2 = 2y_1 - 1$

Для игрока Y в точке y_2 (между рейзом и коллом):

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>	Разница	Произведение
$[0, x_2]$	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_2, y_2]$	-2	-1	+1	$y_2 - x_2$
$[y_2, x_1]$	+2	+1	-1	$-1(x_1 - y_2)$
$[x_1, 1]$	N/A	N/A	N/A	N/A
Сумма				$\mathbf{2y_2 - x_1 - x_2}$

$2y_2 - x_1 - x_2 = 0$
$y_2 = (x_1 + x_2)/2$

Для игрока X в точке x_1 (между чек/коллом и ставкой):

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_2]$	-1	-2	+1	y_2
$[y_2, y_1]$	-1	-1	0	0
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{y_2 - 1 + y_1}$

$y_2 - 1 + y_1 = 0$
$y_2 = 1 - y_1$

Для игрока Y в точке y_1 (между бетом и чеком):

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>	Разница	Произведение
$[0, x_2]$	0	-2	+2	$+2x_2$
$[x_2, x_1]$	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_1, y_1]$	0	-1	-1	$-1(y_1 - x_1)$
$[y_1, 1]$	0	+1	+1	$1 - y_1$
Сумма				$\mathbf{2x_2 + 2y_2 - x_1 + 1}$

$2x_2 + 2y_2 - x_1 + 1 = 0$
$2y_1 = 1 + x_1 - 2x_2$

Теперь у нас есть четыре уравнения безразличия и мы можем выразить через них четыре переменные:

$2y_1 = 1 + x_1 - 2x_2$
$y_2 = (x_1 + x_2)/2$
$y_2 = 2y_1 - 1$

$y_2 = 1 - y_1$

$2y_1 - 1 = 1 - y_1$

$y_1 = {}^2/_3$

$y_2 = {}^1/_3$

${}^4/_3 = 1 + x_1 - 2x_2$

${}^1/_3 = (x_1 + x_2)/2$

$x_1 = {}^2/_3 - x_2$

${}^4/_3 = 1 + {}^2/_3 - 3x_2$

$3x_2 = {}^1/_3$

$x_2 = {}^1/_9$

$x_1 = {}^5/_9$

$y_2 = {}^1/_3$

$y_1 = {}^2/_3$

Чем эта игра отличается от рассмотренной нами в примере 16.2 (без чек/рейзов)? Вполне ожидаемо, что игрок Y ставит с более узким диапазоном после чека своего оппонента, поскольку теперь существует вероятность получить чек/рейз, в то время как в игре #5 игра заканчивалась сразу после его бета.

Однако чек/рейз существенно меняет стратегию и для игрока X. В примере 16.2 он мог делать чек и колл с руками близкими к ${}^1/_2$ (ведь диапазон для ставки у его оппонента начинался с ${}^3/_4$). Здесь же они теряют свое вэлью – игрок Y больше не может делать бет со средними руками. Так что игроку X придется ставить и с руками хуже порога ${}^1/_2$. Это, в свою очередь, дает игроку Y возможность рейзить на вэлью с более широким диапазоном, поскольку и диапазон бета игрока X становится слабее (он делает чек с какой-то частью своих лучших рук).

Все вышесказанное отражается и в найденных нами порогах для игры #7:

Порог	**Игра #5**	**Игра #7**
x_1	${}^1/_2$	${}^5/_9$
y_1	${}^3/_4$	${}^2/_3$
y_2	${}^1/_4$	${}^1/_3$

Последняя игра, которую мы рассмотрим в рамках этой главы, весьма похожа на игру #6, однако на этот раз мы не будем запрещать игроку X делать чек/рейз.

Пример 16.5 - [0,1] игра #8

- Игра на полной улице
- Игроки могут делать рейзы и ре-рейзы до бесконечности, причем размер рейза равен одной ставке.
- Игрок X может делать Чек/Рейз
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Как и в игре #6, здесь мы сталкиваемся с бесконечным числом порогов, а это значит, что одними уравнениями безразличия нам не обойтись. Поэтому мы снова прибегнем к сложным степенными уравнениям.

Введем параметризацию для рассматриваемой игры:

Для любого положительного n будем считать, что , $0 < x_{n+1} < y_{n+!} < x_n < y_n < 1$

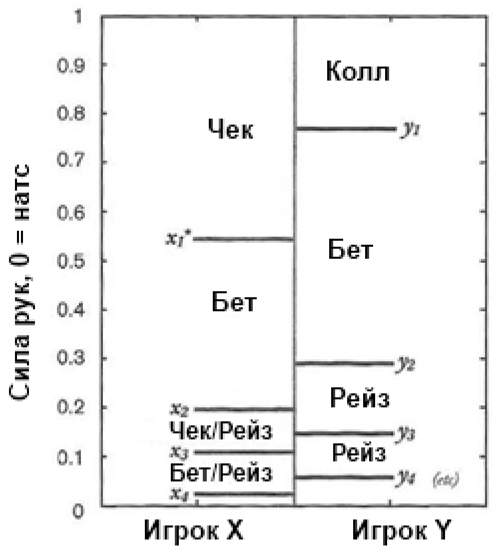


Рисунок 16.4. Структура стратегии для [0,1] игры #8

Начнем с уравнений безразличия для порогов игрока X:

В точке x_1:

$y_2 = 1 - y_1$ (то же самое, что и в игре #6)

В точке x_2 (безразличие между чек/рейзом и бетом):

Рука игрока Y	**<X, чек/рейз>**	**<X, бет>**	**Разница**	**Произведение**
$[0, y_3]$	-3	-2	-1	$-y_3$
$[y_2, y_1]$	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{-y_3 + 1 - 2y_1 - y_2}$

$-y_3 + 1 - 2y_1 - y_2 = 0$
$y_3 + y_2 + 1 = 2y_1$

Подставим известное нам значение y_2, получим:

$y_3 + 1 - y_1 + 1 = 2y_1$
$y_3 + 2 = 2y_1$

В точке x_3 (безразличие между бет-рейзом и чек/рейзом):

Рука игрока Y	<X, бет/ре-рейз>	<X, чек/рейз>	Разница	Произведение
$[0, y_4]$	-4	-3	-1	$-y_4$
$[y_3, y_2]$	+3	+2	+1	$y_2 - y_3$
$[y_2, y_1]$	+1	+2	-1	$-1(y_1 - y_2)$
$[y_1, 1]$	+1	0	+1	$1 - y_1$
Сумма				$\mathbf{-y_4 - y_3 + 2y_2 - 2y_1 + 1}$

$-y_4 - y_3 + 2y_2 - 2y_1 + 1 = 0$
$y_4 + (y_1 - y_2) = (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$

В точке x_4 (безразличие между чек/рейз/ре-рейзом и бет/ре-рейзом):

Рука игрока Y	<X, бет/ре-рейз>	<X, чек/рейз>	Разница	Произведение
$[0, y_5]$	-5	-4	-1	$-y_5$
$[y_4, y_3]$	+4	+3	+1	$y_3 - y_4$
$[y_3, y_2]$	+2	+3	-1	$-(y_2 - y_3)$
$[y_2, y_1]$	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$\mathbf{-y_5 + 2y_3 - y_4 - 2y_2 + 2y_1 + 1}$

$-y_5 + 2y_3 - y_4 - 2y_2 + 2y_1 + 1 = 0$
$(y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = y_5 + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$

Мы можем обобщить это уравнение для произвольного x_n, где n нечетное:

$y_{n+1} + (y_{n-2} - y_{n-1}) + (y_{n-4} - y_{n-3})$ […] $+ [y_1 - y_2] = (y_{n-1} - y_n) + (y_{n-3} - y_{n-2}) +$ […] $+ (1 - y_1)$

Для четных n:

$(y_{n-1} - y_n) + (y_{n-3} - y_{n-2})$ […] $+ [y_1 - y_2] = y_{n+1} + (y_{n-2} - y_{n-1}) + (y_{n-4} - y_{n-3}) +$ […] $+ (1 - y_1)$

Давайте посмотрим на пороги x_6 и x_7. Уравнения безразличия для них будут выглядеть следующим образом:

$$(y_5 - y_6) + (y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = y_7 + (y_4 - y_5) + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

$$y_8 + (y_5 - y_6) + (y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = (y_6 - y_7) + (y_4 - y_5) + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

Интересно, что мы можем вычесть второе уравнение из первого, тогда получим:

$$y_8 = -2y_7 + y_6$$

Очевидно, что то же самое мы можем сделать для любых значений n. Пусть мы рассматриваем некие пороги k + 1 и k:

$$y_{k+2} + (y_{k-1} - y_k) + (y_{k-3} - y_{k-2}) [\dots]+ (y_1 - y_2) = (y_k - y_{k+1})+(y_{k-2} - y_{k-1})+(y_{k-4} - y_{k-3}) + \\ + [\dots] + (1 - y_1)$$

$$(y_{k-1} - y_k)+(y_{k-3} - y_{k-2})+ [\dots]+ (y_1 - y_2) = y_{k+1} + (y_{k-2} - y_{k-1})+(y_{k-4} - y_{k-3})+ [\dots]+ (1 - y_1)$$

Снова находим их разность:

$$y_{k+2} = -2y_{k+1} + y_k$$

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = 0 \qquad \textbf{(16.1)}$$

Такие уравнения называются **разностными**, их решение требует несколько более сложной математики. Поэтому сейчас мы просто приведем готовый ответ, а в приложении к этой части дадим для него подробное обоснование:

$$y_n = r^n/(1 - r) \qquad \text{(для } y > 0)$$

Это выражение полностью описывает стратегию игрока Y. Так, порог y_1 будет равен $1/(1 - r)$. В игре #6 стратегии обоих игроков были связаны коэффициентом R – порог y_n был равен rx_{n-1}, и так далее. Здесь же это применимо только для игрока Y:

$$y_n = ry_{n-1}$$

Теперь давайте обратимся к стратегии игрока X, которую можно найти в схожем ключе, однако решение будет несколько более сложным. Так, нашей целью будет определение x_n, однако в случае с игроком Y нам не приходилось учитывать влияние первых порогов (и соответствующих им областей) на пороги более высокого уровня. Поэтому поскольку игрок X всегда выбирает между бетом и чек/рейзом, мы столкнемся с первыми трудностями уже на пороге y_1.

Безразличие для игрока Y в точке y_1:

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>
$[y_1, 1]$	0	+1
$[x_1, y_1]$	0	-1
$[x_3, x_2]$	0	-2
$[x_5, x_4]$	0	-2
$[x_7, x_6]$	0	-2
[...]		
$[x_{2k+1}, x_{2k}]$	0	-2

$$1 - y_1 = (y_1 - x_1) + 2(x_2 - x_3) + 2(x_4 - x_5) + 2(x_6 - x_7) + [\ldots] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \to \infty)$$

На этом пороге игрок Y выбирает между чеком и бетом. Он выиграет одну ставку, если игрок X не станет ставить со слабой рукой; но потеряет две, когда его оппонент задумал чек/рейз с верхней частью своего диапазона.

В точке y_2:

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>
$[y_2, x_1]$	+2	+1
$[x_2, y_2]$	-2	-1
$[x_4, x_3]$	0	-2
$[x_6, x_5]$	0	-2
$[x_8, x_7]$	0	-2
[...]		
$[x_{2n}, x_{2n+1}]$	0	-2

$$x_1 - y_2 = (y_2 - x_2) + 2(x_3 - x_4) + 2(x_5 - x_6) + 2(x_7 - x_8) + [] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \to \infty)$$

Снова обобщим для точки y_n:

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>
$[y_n, x_{n-1}]$	+2	+1
$[x_n, y_n]$	-2	-1
$[x_{n+2}, x_{n+1}]$	0	-2
$[x_{n+4}, x_{n+3}]$	0	-2
[...]		
$[x_{2n}, x_{2n+1}]$	0	-2

$$x_{n-1} - y_n = (y_n - x_n) + 2(x_{n+1} - x_{n+2}) + 2(x_{n+3} - x_{n+4}) + [] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \to \infty)$$

Давайте на секунду вернемся к y_1 – вполне очевидно, что это уравнение является частным случаем от только что выведенного y_n, где $x_0 = 1$ (игрок X никогда не будет блефовать в игре, где его оппонент не может скинуть свои карты)

Давайте рассмотрим это уравнение для двух произвольных значений: k и k + 1:

$$x_{k-1} - y_k = (y_k - x_k) + 2(x_{k+1} - x_{k+2}) + 2(x_{k+3} - x_{k+4}) + [...]$$
$$x_k - y_{k+1} = (y_{k+1} - x_{k+1}) + 2(x_{k+2} - x_{k+3}) + 2(x_{k+4} - x_{k+5}) + [...]$$

Сложив их, мы увидим, что члены со старшими k исключат друг друга из конечного уравнения (из-за противоположных знаков). Получим:

$$x_{k+1} - y_k + x_k - y_{k+1} = y_k - x_k + y_{k+1} + x_{k+}1$$
$$x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 2y_k + 2y_{k+1}$$
$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2y_{k+1} + 2y_{k+2}$$

Формула для y_n нам уже известна:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2(r^{k+1})/(1 - r) + 2(r^{k+2})/(1 - r)$$
$$r/(1 - r) = (\sqrt{2} - 1)/(2 - \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$$
$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = \sqrt{2}(r^k) + \sqrt{2}(r^{k+1})$$
$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = \sqrt{2}(r^k)(1 + r)$$

$$x_k + 2x_k + 1 - x_{k+2} = 2r^k \qquad \textbf{(16.2)}$$

Для решения этого уравнения нам также потребуется более сложный математический аппарат, поэтому вывод ответа мы приведем в приложении к этой главе. Стратегия игрока X будет выглядеть следующим образом:

$$x_n = r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2$$

Общее решение для игры:

$$x_n = r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2$$
$$y_n = r^n/(1 - r)$$

Интересно сравнить эти две стратегии. Так, игрок Y должен играть в достаточно прямолинейной манере: его пороги находятся в экспоненциальной зависимости. В ответ на чек он поставит со всеми руками старше $r/(1 - r)$, а диапазон его рейзов задается коэффициентом R.

В свою очередь, каждый порог игрока X лежит между порогами его оппонента, начиная с x_1 в $1 - r$. Однако они распределены неравномерно из-за того, что изначальная область чек/рейза игрока X гораздо уже, чем область бета. Обратите внимание на $(-1)^n$ в формуле – эта часть оказывается положительной при четных значениях n, и отрицательной при нечетных. Действительно, игроку X имеет смысл ставить с очень сильными руками, поскольку тогда он может получить значительное вэлью от рейза оппонента.

Порог (n)	y_n	x_n	y_n/x_n
0	1	1	1
1	0.707107	0.585786	$r/(1 - r) + {}^1\!/_2$
2	0.292893	0.171573	$r/(1 - r) + 1$
3	0.12132	0.100505	$r/(1 - r) + {}^1\!/_2$
4	0.050253	0.029437	$r/(1 - r) + 1$
5	0.020815	0.017244	$r/(1 - r) + {}^1\!/_2$

Кроме того, несколько интересных закономерностей проявляются и в диапазоне чека для игрока X:

$x_0 \rightarrow x_1 : 1 - (1 - r) = r$
$x_2 \rightarrow x_3 : r^2 - r^2(1 - r) = r^2(1 - (1 - r)) = r^3$
$x_4 \rightarrow x_5 : r^4 - r^4(1 - r) = r^4 (1 - (1 - r)) = r^5$
$x_{2n} \rightarrow x_{2n+1} : r^{2n} - r^{2n}(1 - r) = r^{2n+1}$

Сумма этих выражений равна:

$$r \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$$

Значение r^2 будет меньше 1, так что сумма этой бесконечной последовательности будет равна $r (1 / (1 - r^2))$.

$$r^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2} - 1)/(1 - (3 - 2\sqrt{2})) = {}^1\!/_2$$

Получается, в целом игрок X будет делать чек с половиной своих рук. Большинство из них сделает «плохой» колл (r от этого диапазона), а остальные переставят игрока Y.

Нужно запомнить

……………………………………………………………………………………………………

- В играх на полной улице без фолдов существует прямая зависимость между диапазонами участников.

……………………………………………………………………………………………………

- Если вы не можете получить ре-рейз, а оппонент не может скинуть свои карты, оптимальной стратегией будет бет (или рейз) с $^1/_2$ от тех рук, с которыми оппонент сделал чек (или бет).

……………………………………………………………………………………………………

- Если оппонент может сделать ре-рейз, то диапазон для ставки (рейза) существенно сузится. В случае с бесконечной последовательностью рейзов, он сводится к r рук.

……………………………………………………………………………………………………

- Игры без фолдов позволяют лучше понять, как мы можем извлечь вэлью с сильными руками.

……………………………………………………………………………………………………

Приложение к главе 16
Решение разностных уравнений

Уравнение 16.1:

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = 0 \qquad \textbf{(16.1)}$$

Это уравнение называется однородным (гомогенным) разностным уравнением второго порядка. Оно описывает зависимость между тремя последовательными порогами для игрока Y.

Все уравнения вида

$$y_{n+2} + cy_{n+1} + dy_n = 0$$

где c и d некие константы, имеют решение:

$$y_n = ap^n+bq^n \qquad \textbf{(16.1a)}$$

где a и b некие константы, а p и q – различные реальные корни характеристического уравнения вида $x^2 + cx + d= 0$.

В нашем случае характеристическое уравнение примет следующую форму:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$\text{или } x = - 1 \pm \sqrt{2}$$

Как вы уже знаете, $\sqrt{2} - 1$ является «золотым сечением». Таким образом, мы можем подставить значение r в решение разностного уравнения (формула 16.1a):

$$y_n = ar^n + b(- 1 - \sqrt{2})q^n$$

Очевидно, что при $n \to \infty$, y_n приближается к 0, поскольку игроку Y потребуется очень сильная рука, чтобы продолжать ставить ре-рейзы.

Однако второй член уравнения невозможно свести к нулю, за исключением случая, когда b равно 0. Получим упрощенное уравнение:

$$y_n = ar^n$$

Чтобы найти значение константы a, проанализируем уравнение для порога x_1:

$$y_2 = 1 - y_1$$
$$ar^2 = 1 - ar$$

$$ar^2 + ar - 1 = 0$$

Поскольку мы уже знаем значение r, произведем следующую замену:

$$r^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$
$$r^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1$$
$$r^2 = - 2(\sqrt{2} - 1) + 1$$
$$r^2 = 1 - 2r$$
$$a(1 - 2r) + ar - 1 = 0$$
$$a - ar - 1 = 0$$
$$a(1 - r) = 1$$
$$a = 1/(1 - r)$$

Следовательно:

$$y_n = r^n/(1 - r)$$

Уравнение 16.2:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2r^k \qquad \textbf{(16.2)}$$

Здесь мы снова сталкиваемся с разностным уравнением второго порядка, однако поскольку его правая часть не равна нулю, оно называется неоднородным, поэтому его решение будет чуть более сложным.

Пусть Z – некое «частное решение», то есть решение для заданного значения k. Тогда решения для общего уравнения будут решениями для однородной вариации этого уравнения с прибавленным Z.

$$x_n = ap^n + bq^n + Z \qquad \textbf{(16.2a)}$$

$$1 + 2x - x^2 = 0$$
$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$
$$p = 1 - \sqrt{2} = - r$$
$$q = 1 + \sqrt{2}$$
$$x_n = a(-r)^n + b(1 + \sqrt{2})^n + Z$$

Теперь мы можем сделать предложение о том, как будет выглядеть частное решение для уравнения. Пусть Z имеет вид:

$$Z = cx^n$$

Для некоторых констант c и x.

Если мы подставим это значение в исходное уравнение 16.2, то получим:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2r^k \qquad \textbf{(16.2)}$$

$$cx^n + 2cx^{n+1} - cx^{n+2} = 2r^n$$
$$cx^n(1 + 2x - x^2) = 2r^n$$

Здесь $(1 + 2x - x^2)$ будет константой (как мы условились выше), таким образом, $x = r$ будет решением для любого c:

$$cr^n(1 + 2r - r^2) = 2r^n$$
$$c(1 + 2r - (1 - 2r)) = 2$$
$$c(4r) = 2$$
$$c = r/2$$

Таким образом, частное решение Z будет выглядеть так:

$$Z = (r/2)r^n$$

При n стремящимся к бесконечности, Z стремится к нулю. Также, используя логику из решения уравнения 16.1, мы можем утверждать, что второй член общего уравнения сходится к z при b = 0.

$$x_n = a(-r)^n + (r/2)\, r^n$$

Чтобы найти значение a, мы просто используем правило из игры, что $x_0 = 1$.

$$x_0 = a(-r)^0 + ({}^1/_2 r)\, r^0$$
$$1 = a + {}^1/_2\, r$$
$$a = (2r - 1)/2r$$

$$x_n = ((2r - 1)/2r)(-1)r^n + ({}^1/_2 r)r^n$$
$$x_n = r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2$$

Глава 17

Вспоминаем про блеф: [0,1] игры с конечным банком

В главе 16 все рассмотренные нами примеры подчинялись правилу, которое обычно неприменимо в покере – ни один из игроков не мог скинуть свою руку. Важной чертой всех этих игр было полное отсутствие блефов: оба участника конструировали свои диапазоны только с целью извлечь максимальное вэлью с сильными руками.

В свою очередь, блефы в покере не только занимают одну из ключевых ролей, но также и делают игру гораздо более сложной. Поэтому ниже мы рассмотрим игры на полной улице с конечным размером банка, в чьих оптимальных стратегиях будут присутствовать области блефа.

Пример 17.1 - [0,1] игра #9

- Игра на полной улице
- Остается одна ставка
- Размер банка – P единиц
- Размер ставки – 1 единица

Как вы можете помнить, когда мы решали первую [0,1] игру с ограниченным банком в главе 11 (пример 11.2) помимо порога y_n (который был предметом нашего пристального внимания на протяжении всей главы 16), мы также рассматривали y_0, порог между чеком и блефом, а также x_1^*, порог между чек/коллом и чек/фолдом для игрока X. Причем как игрок Y, так и игрок Y стремились блефовать со своими худшими руками и ставить на вэлью с лучшими.

В игре на полной улице игрок X может сделать бет, тем самым создавая в своей стратегии пороги x_1 и x_0. В свою очередь, игрок Y должен добавить к своим порогам y_0^*, который будет разделять колл и фолд в ответ на ставку оппонента. Очевидно, что стратегия колла со слабейшими руками всегда будет доминирована стратегией фолда.

Исходя из вышесказанного, можем задать параметризацию для вероятного решения:

Стратегия игрока X будет состоять из следующих порогов:

x_0 – порог между чек/фолдом и блефом

x_1^* порог между чек/коллом и чек/фолдом

x_1 порог между вэлью бетом и чек/коллом

Стратегия игрока Y также будет включать в себя три порога:

y_0 – порог между чеком и блефов (если игрок X сделает чек)
y_1^* – порог между коллом и фолдом (если игрок X поставит)
y_1 – порог между вэлью бетом и чеком (если игрок X сделает чек)

Что касается расположения этих порогов на отрезке от 0 до 1, основываясь на результатах анализа прошлых игр, мы можем предположить, что диапазон для ставки у игрока Y после чека оппонента будет шире, чем диапазон для ставки самого игрока X. Это значит, что $y_1 > x_1$. Как мы покажем чуть ниже, α, коэффициент, задающий отношение блефов к вэлью бетам (уравнение 11.1), в этом примере идентичен α в [0.1] игре #2 для обоих игроков. И поскольку области блефа будут равны αx_1 и αy_1 соответственно, мы можем поставить y_0 слева от x_0.

Пороги колла для каждого из игроков будут находиться между порогами блефа и вэлью бета оппонента (таким образом будет достигаться безразличие). Тогда, $x_1 < y_1^* < x_0$ и $y_1 < x_1^* < y_0$. В свою очередь, зависимость между y_1^* и x_1^* не имеет никакого значения. Когда мы будем составлять уравнения безразличия для определенных порогов, мы будем принимать в расчет только один из них.

Наша параметризация приняла следующий вид:

$$0 < x_1 < y_1 < x_1^* , y_1^* < y_0 < x_1< 1$$

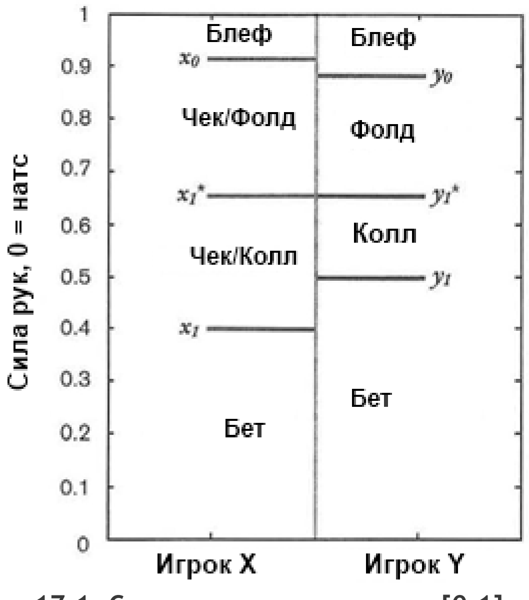


Рисунок 17.1. Структура стратегии для [0,1] игры #9

Остается только составить уравнения безразличия для каждого из этих порогов. Мы специально не стали включать в таблицы ниже отрезки, где рассматриваемые действия оказываются невозможными. Например, на пороге y_1 игрок Y должен выбрать между чеком и бетом, однако если рука оппонента попадает в область [0, x_1] или [x_0, 1], то ему придется принимать решение о колле или фолде. Значит, мы можем не рассматривать отрезки [0, x_1] или [x_0, 1] при составлении уравнения для точки y_1.

Примечание от переводчика: С рукам от $[0, x_1]$ и $[x_0, 1]$ игрок X ставит на вэлью и блефует соответственно. В этом случае игрок Y не может сделать чек или бет. В предыдущей главе авторы не исключали подобные ситуации из таблиц, а ставили напротив них N/A.

В точке y_1 (безразличие между чеком и бетом):

Рука игрока X	<Y, бет>	<Y, чек>	Разница	Произведение
$[x_1, y_1]$	-1	0	-1	$-(y_1-x_1)$
$[y_1, x_1^*]$	+1	0	+1	$x_1^*-y_1$
$[x_1^*, x_o]$	0	0	0	0
Сумма				$\boldsymbol{-2y_1 + x_1 + x_1^*}$

$-2y_1 + x_1 + x_1^* = 0$
$y_1 = (x_1 + x_1^*)/2$

Вполне понятно, что игрок Y будет ставить со всеми руками, с которыми бы его оппонент поставил на вэлью. Кроме того, он поставит с половиной рук, которые игрок X будет разыгрывать через чек/колл. Таким образом порог y_1 будет находиться точно посередине между $[x_1\ x_1^*]$.

В точке y_1^* (безразличие между фолдом и коллом):

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, фолд>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	-1	0	-1	$-x_1$
$[x_0, 1]$	+ (P+1)	0	+ (P+1)	$(P+1)(1-x_0)$
Сумма				$\boldsymbol{(P+1)(1-x_0) - x_1}$

$(P+1)\ (1-x_0) - x_1 = 0$
$1-x_0 = \alpha x_1$

Это уравнение показывает зависимость между величиной областей вэлью бета (x_1) и блефа ($1-x_0$).

В точке x_1^* (безразличие игрока X между чек/коллом и чек/фолдом):

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, чек/фолд>	Разница	Произведение
$[0, y_1]$	-1	0	-1	$-y_1$
$[y_0, 1]$	P + 1	0	+(P+ 1)	$(P + 1)(1 - y_0)$
Сумма				$\boldsymbol{(P + 1)(1 - y_0) - y_1}$

$(P + 1)(1 - y_0) - y_1 = 0$
$1 - y_0 = \alpha\ y_1$

В точке y_0 (безразличие между чеком и блефом):

Рука игрока X	<Y, бет>	<Y, чек>	Разница	Произведение
$[x_1, x_1^*]$	-1	0	-1	$-(x_1^*-x_1)$
$[x_1^*, y_0]$	+ P	0	+ P	$(P)(y_0-x_1^*)$
$[y_0, x_0]$	0	0	0	0
Сумма				$\boldsymbol{-(x_1^*-x_1)+(P)(y_0-x_1^*)}$

$-(x_1^* - x_1) + (P)(y_0 - x_1^*) = 0$
$x_1^* - x1 = P(y_0 - x_1^*)$
$x_1^* = \alpha(py_0 + x_1)$
$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0) + ax_1 + (x_1 - x_1)$
$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0) - (1 - \alpha)x_1 + x_1$
$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1$

Во второй [0,1] игре, которую мы рассмотрели (пример 11.3), коэффициент α не только задавал соотношение блефов к вэлью бетам, но также и частоту колла для блеф-кэтчеров, (1 – α). Однако в нашем случае игрок X принимает решение о колле уже после ставки с некоторой частью своих рук, отсюда и другой вид уравнения.

Диапазон чека игрока X находится на отрезке от x_1 до x_0, причем блеф-кэтчерами могут считаться только руки старше порога y_0. Значит, мы можем утверждать, что порог x_1^* равен (1 - α) от рук, способных побить блеф, плюс x_1.

В точке x_0 (безразличие для игрока X между чек/фолдом и блефом):

Рука игрока Y	<X, чек/фолд>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_1^*]$	0	-1	+1	y_1^*
$[y_1^*, x_0]$	0	+P	-P	$(-P)(x_0 - y_1^*)$
$[y_0, 1]$	-P	0	-P	$-P(1 - x_0)$
Сумма				$\boldsymbol{(P + 1)\, y_1^* - P}$

$(P + 1)\, y_1^* - P = 0$
$y_1^* = P/(P+1)$
$y_1^* = 1 - \alpha$

Здесь мы сталкиваемся с аналогичной ситуацией. Единственное отличие заключается в том, что диапазон игрока Y (после ставки оппонента) все еще ничем не ограничен, поэтому ему следует уравнять с 1 - α всех возможных рук. Мы не говорим «способных побить блеф», поскольку решение игрока X заключается в выборе между блефом и чек/фолдом. Если он предпочтет второе, то все равно проиграет слабейшим рукам игрока Y, так как они войдут в диапазон блефа последнего.

В точке x_1 (безразличие между чек/коллом и бетом):

Рука игрока Y	<X, бет>	<X, чек/колл>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	-1	-1	0	x_1
$[x_1, y_1]$	+ 1	+1	0	0
$[y_1, y_1^*]$	+1	0	+1	$y_1^* - y_1$
$[y_1^*, y_0]$	0	0	0	0
$[y_0, 1]$	0	+1	-1	$(1- y_0)$
Сумма				$\boldsymbol{y_1^* - y_1 - (1- y_0)}$

$$y_1^* - y_1 - (1- y_0) = 0$$
$$y_1^* - y_1 = 1- y_0$$

Если игрок X сделает чек, то он выиграет одну ставку, поскольку заставит своего оппонента блефовать. Если он поставит, то получит вэлью от тех рук игрока Y, которые бы не поставили сами, но в то же время вынуждены делать колл. Значит, в оптимальной стратегии размер этих двух областей будет одинаковым (таким образом достигается безразличие).

Мы получили шесть уравнений, каждое из которых описывает некую часть оптимальной стратегии. Теперь нам остается лишь решить несложную систему уравнений и найти значения всех шести порогов.

$$y_1 = (x_1^*+x_1)/2$$
$$1 - x_0 = \alpha x_1$$
$$1 - y_0 = \alpha y_1$$
$$x_1^* = (1-\alpha)\ (y_0-x_1) + x_1$$
$$y_1^* = 1 - \alpha$$
$$y_1^* - y_1 = 1 - y_0$$

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$
$$x_1 = (1 - \alpha)2/(1 + \alpha)$$
$$y_0 = (1 + \alpha)2/(1 + \alpha)$$
$$x_0= 1 - \alpha(1 -\alpha)2/(1 + \alpha)$$
$$y_1^* = 1 - \alpha$$
$$x_1^* = 1 - \alpha$$

Давайте рассмотрим полученные пороги на конкретном примере. Пусть размер банка составляет 4 единицы. Тогда согласно уравнению 11.1, $\alpha = {}^1/_5$. Как мы уже знаем, игрок X будет ставить на вэлью с определенной частью своих рук, на что игрок Y ответит коллом с диапазоном, который чуть шире диапазона блефов игрока X. Если блеф оказывается успешным, игрок X заработает 4 ставки, если нет – потеряет одну. Таким образом, чтобы сделать своего оппонента безразличным к блефу, игрок Y должен уравнивать в четыре раза чаще, чем фолдить - $^4/_5$ от общего распределения [0,1] или 1 - α.

В то же время игрок X должен сбалансировать свои вэлью беты и блефы таким образом, чтобы игрок Y никак не мог его эксплуатировать. Например, если бы игрок X никогда не блефовал, его оппоненту следовало бы уравнивать лишь с весьма узким диапазоном. Тогда чтобы извлечь вэлью со своими натсами, игроку X придется ставить какое-то количество блефов, вынуждая оппонента делать колл с пограничными руками (которые находятся между порогом блефа и вэлью бета игрока X).

При банке в 4 единицы, игрок X проиграет с блефом одну единицу в случае колла от игрока Y, но выиграет 4, если его оппонент скинет карты. Чтобы его оппонент был безразличен к коллу, игроку X следует ставить на вэлью в четыре раза чаще, чем блефовать. Получаем порог αx_1.

Как вы уже, наверное, поняли, если игрок X сделает чек, то игрок Y должен будет сбалансировать свои вэлью беты с блефами из диапазона [y_0, 1].

Теперь давайте определим, как часто игрок X должен ставить на вэлью. На пороге между ставкой и чек/коллом, он может либо сделать бет и получить вэлью от игрока Y, когда рука последнего находится в промежутке между y_1 и y_1* (здесь он уравнивает ставку с рукой хуже, но никогда не ставит сам); либо сделать чек и вынудить оппонента поставить с блефом из диапазона от y_0 до 1. И поскольку игрок X будет безразличным к выбору действия на этом пороге, область [y_1 y_1*] должна быть в точности равна [y_0, 1].

Мы знаем, что размер последней области составляет αy_1, а первой – (1 – α – y_1). Значит, мы легко можем составить и решить уравнение для y_1 (диапазон, с которым игрок Y поставит в ответ на чек оппонента). Как было показано в решении выше, этот порог равен (1 - α)/(1 + α). Подставим сюда размер банка в 4 единицы. Тогда y_1* будет равен $^4/_5$, а 1 -y_0 составит $^1/_5$ от y_1. Получим $^4/_5$ - y_1= $^1/_5 y_1$, или y_1 = $^2/_3$.

Таким же образом мы можем подтвердить решение для порогов x_1* и x_1.

Как вы можете помнить, в играх без фолдов мы вывели правило, что игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека игрока X (при условии, что тот не может сделать рейз). Однако здесь, когда игрок Y выбирает между чеком и бетом в точке y_1, он руководствуется несколько иным принципом. Так, он выиграет одну ставку, если рука игрока X находится между y_1 и x_1*, но проиграет ставку, если она окажется в диапазоне от x_1 до y_1. И поскольку эти две области должны быть одинакового размера, порог y_1 должен находиться ровно посередине между x_1 и x_1*.

Иными словами:

Если ваш оппонент мог поставить, но вместо этого сделал чек (теперь он может сделать либо колл, либо фолд, но не рейз), оптимальной стратегией будет бет со всеми руками, которые бы оппонент поставил сам, а также с половиной рук из его диапазона колла.

Вполне очевидно, что эта концепция является следствием правила для игр без фолдов. В них оппонент не имел возможности скинуть свои карты, поэтому мы ориентировались на его диапазон чека. Однако в этом примере игрок X может сделать фолд, поэтому отправной точкой в анализе становится его диапазон колла.

Кроме того, игрок X должен выбрать порог x_1^* таким образом, чтобы защитить свой диапазон чека от блефов оппонента. Причем в этом случае он выбирает соответствующие руки не из всего распределения [0,1], а лишь из $[x_1, x_0]$, ведь со всеми остальными руками он ставит сам. Получается, что он должен уравнивать с $(1 - \alpha)$ рук из диапазона $[x_1, x_0]$. А это, в свою очередь, значит, что порог x_1^* должен отстоять от x_1 на $1 - \alpha$.

При банке в 4 единица, $y_2 = {}^2/_3$ находится посередине между x_1 и x_1^*, в то время как x_1^* находится на расстоянии ${}^4/_5$ от x_1 к $1 - ({}^1/_5)x_1$. Пусть *c* – расстояние между x_1 и x_0, *a* – расстояние между x_1 и y_1, *b* – расстояние между 0 и x_1, тогда верно следующее:

$$b = {}^2/_3 - \alpha$$
$$1 = {}^4/_5 b + {}^5/_2 \alpha$$
$$b = {}^4/_5(1 - {}^5/_2 \alpha) = {}^4/_5 - 2\alpha$$
$${}^4/_5 - 2\alpha = {}^2/_3 - \alpha$$
$$\alpha = {}^2/_{15}$$
$$b = {}^8/_{15}$$
$$c = {}^1/_3$$

Получаем в точности те же результаты, что и для формул выше ($b = x_1$).

Понимание описанной выше игры очень важно для решения более сложных примеров из этой главы. Мы постарались максимально доступно раскрыть смысл каждого из выведенных нами уравнений, поэтому в дальнейшем не будем тратить время на столь подробные объяснения.

Следующая игра во многом похожа на [0,1] игру #6 (пример 16.3), где игроки могут делать конечное число рейзов.

Пример 17.2 - [0,1] игра #10

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Чек/рейз делать нельзя
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица

Как вы уже могли догадаться, в этой игре мы снова обратимся к порогу y_2. Кроме того, мы введем последний элемент, который необходим для решения игр [0,1] в общем виде – диапазон блеф рейза.

Представьте, что игрок X сделал ставку. Как должна выглядеть стратегия игрока Y? Самым простым ответом (но необязательно верным) будет следующий: с натсами он сделает вэлью рейз, с чуть более слабыми руками – уравняет, а с нижней частью распределения – скинет.

Но если это так, как тогда следует игроку X реагировать на рейз? Вполне очевидно, что правильной контрстратегией будет фолд со всеми руками младше порога рейза оппонента. Значит, игрок Y обязан защищать свои вэлью рейзы некоторым количеством блефов.

Следующий вопрос, на который мы должны дать ответ: какие руки будут составлять его диапазон блеф-рейза?

Давайте подумаем о природе блефов. Когда правилами игры разрешена только одна ставка, нам следует блефовать с худшими руками из-за того, что они обладают минимальной ценностью на вскрытии и всегда проиграют, если мы сделаем чек вдогон.

Что изменится, если наш оппонент уже сделал ставку, и у нас появилась возможность сделать рейз? Как мы уже отметили выше, нам имеет смысл повышать со всеми сильнейшими руками и уравнивать со средними, поскольку мы хотим использовать их вполне неплохое шоудаун вэлью. Поэтому наш диапазон для блефа будет состоять исключительно из рук, в которых мы не видим никакой ценности на вскрытии. Причем его размер будет зависеть от размера ставки, размера банка, а также нашего вэлью диапазона.

Скорее всего ваша интуиция сейчас вам подсказывает, что в таком случае мы должны следовать тем же правилам, что и в примерах, где была разрешена только одна ставка – то есть блефовать с наихудшими руками. Вообще говоря, когда мы спускаемся ниже порога y_1*, с точки зрения оптимальной стратегии игроку Y уже нет разницы, с чем блефовать. Но здесь есть несколько оговорок. Во-первых, мы будем скидывать все слабые руки, которые не войдут в диапазон рейза. Во-вторых, поскольку мы говорим об области ниже порога колла, то даже с верхней частью этого диапазона мы не увидим шоудаун. Поэтому стратегия рейза с сильнейшими руками из числа тех, с которыми мы не можем делать колл, всегда будет доминирующей.

Таким образом, мы получили новый порог. При этом мы должны немного пересмотреть наше представление о порогах для игр с рейзами:

> y_n* теперь означает порог между коллом n-ой ставки и блефом или фолдом, если (n+1)-ая ставка и фолд разрешены правилами.
>
> y_n# означает порог между диапазоном блефа для n-ой ставки и диапазоном фолда на (n-1)-ую ставку.

Примечание от переводчика: Представьте себе ситуацию, когда игрок X сделал ставку, и игроку Y нужно принимать решение. Если он может либо сделать фолд, либо ответить рейзом (то есть (n+1)-ой ставкой), то порог y_n будет разделять области колла ставки игрока X и области, где мы либо блефуем, либо скидываем свои карты.*

В свою очередь, порог y_n# разделяет диапазон фолда на ставку игрока X и диапазон рейза с блефом.

Как мы покажем чуть ниже, пороги y_n* и y_{n+1}# очень тесно связны друг с другом.

В этой игре мы впервые сталкиваемся с разветвленным древом решений, и это оказывает существенное влияние на используемую параметризацию. Иными словами, здесь для каждого возможного сценария будет существовать свой набор порогов, не связанный с другими ветвями, поскольку в одной отдельно взятой ситуации мы будем иметь дело лишь с определенной линией розыгрыша.

Например, порог x_1* появляется только если игрок X делает чек. В таком случае y_1* и y_2# оказываются бессмысленными. И хотя мы сможем найти расположение точки x_1* относительно y_1*, никакого практического значения это иметь не будет.

Введем параметризацию для [0,1] игры #10:

0 ,y_2, x_2*, x_1, y_1, x_1*, y_1*, y_2#, y_0, x_0, 1

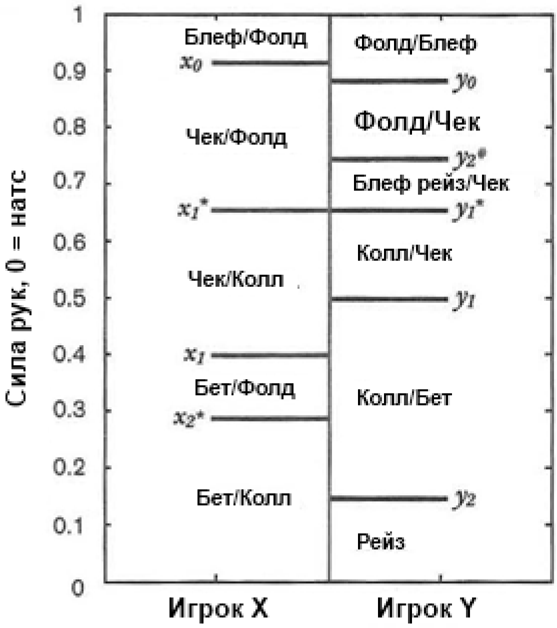


Рисунок 17.2. Структура стратегии для [0,1] игры #10

На языке стратегий она выгладит следующим образом:

Для игрока X:

Бет на вэлью и колл рейза с руками [0, x_2*].
Бет на вэлью и фолд на рейз с руками [x_2*, x_1],
Чек и колл ставки с руками [x_1, x_1*].
Чек и фолд на ставку с руками [x_1*, x_0].
Блеф с руками [x_0 1].

Для игрока Y:

Если игрок X поставил – рейз на вэлью с руками [0, y_2].
Если игрок X поставил – колл с руками [y_2, y_1*]
Если игрок X поставил – блеф рейз с руками [y_1*, y_2#]
Если игрок X поставил – фолд с руками [y_2#, 1],

Если игрок X сделал чек – бет на вэлью с руками [0, y_1].
Если игрок X сделал чек – чек с руками [y_1, y_0].
Если игрок X сделал чек – блеф с руками [y_0, 1].

Еще раз внимательно прочитайте и осмыслите все перечисленные выше стратегии. Это очень важно для понимания более сложных игр. Например в одной из следующих задач мы столкнемся с порогом x_4#, который отделяет диапазон для треьего рейза (если игрок X решил сделать чек/рейз) от диапазона фолда на второй рейз.

Во всех прошлых играх, где была разрешена только одна ставка, мы пользовались фундаментальной константой α, равной $1/(P + 1)$. Она задавала соотношения блефов и вэлью бетов, а также диапазоны коллов. Однако в ситуациях, где возможны две ставки (бет и рейз), мы имеем дело с более крупными банками; кроме того, стоимость блефа может возрасти до двух ставок. Поэтому мы введем новую константу:

$$\alpha_2 = 1/(P + 3)$$

В более сложных играх мы будем использовать общий вид α_n (для n-ых ставок):

$$\alpha_n = 1/(P + (2^n - 1)) \qquad \textbf{(17.1)}$$

Из этого уравнения можно легко получить коэффициент α, выведенный нами для [0,1] игры #2 (при $n = 1$). В целях упрощения наших расчетов мы будем считать, что α (без каких-либо индексов) это и есть α_1.

В этой игре перед нами стоит совсем непростая задача – найти 9 переменных. Для каждой из них мы составим свое уравнение безразличия., а затем попытаемся решить полученную систему уравнений.

Безразличие для игрока Y в точке y_2:

Рука игрока X	**<Y, колл>**	**<Y, рейз>**
$[0, y_2]$	-1	-2
$[y_2, x_2^*]$	+1	+2
$[x_2^*, x_1]$	+1	+1
$[x_0, 1]$	+1	+1

Игрок Y проигрывает на одну ставку больше, если делает рейз против натсов своего оппонента. Но при этом и больше выигрывает, если игрок X уравняет с рукой чуть слабее. Поскольку игрок X не может делать ре-рейз, игроку Y следует повышать ровно с половиной диапазона колла своего оппонента:

$$y_2 = x_2^* - y_2$$
$$y_2 = x_2^*/2$$

В точке y_1 мы сталкиваемся с той же самой ситуацией, что и в [0,1] игре #9 (пример 17.1), поскольку игрок X все еще не может делать чек/рейз. Значит, и уравнение безразличия будет точно таким же:

$$y_1 = (x_1^* + x_1)/2$$

И снова y_1 должен находиться посередине между порогами колла и бета для игрока X.

Безразличие для игрока Y в точке y_1^*:

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, блеф рейз>
$[0, x_2^*]$	-1	-2
$[x_2^*, x_1]$	-1	+(P+1)
$[x_0, 1]$	+1	+1

$$x_2^* = (P + 2)(x_1 - x_2^*)$$
$$x_2^* = x_1(P + 2)/(P + 3)$$
$$x_2^* = (1 - \alpha_2)x_1$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с применением α_2 в наших расчетах. Размер области ставки для игрока X (x_1) оказывается в прямой зависимости от его области бет/колла. Более того, ему следует выбирать линию бет/фолд ровно α_2 раз, поскольку он должен сделать своего оппонента безразличным к блеф рейзу. Заметьте, что мы используем α_2 из-за увеличившегося банка (после ставки игрока X и рейза игрока Y).

Безразличие для игрока Y в точке $y_2\#$:

Рука игрока X	<Y, блеф рейз>	<Y, фолд>
$[0, x_2^*]$	-2	0
$[x_2^*, x_1]$	+(P + 1)	0
$[x_0, 1]$	+1	- P

Для начала, немного несложной алгебры:

$$2x_2^* = (P + 1)(x_1 - x_2) + (P + 1)(1 - x_0)$$
$$2x_2^* = (P + 1)(x_1 - x_2^* + 1 - x_0)$$
$$(P + 3)x_2^* = (P + 1)(x_1 + 1 - x_0)$$
$$\alpha x_2 = \alpha_2(x_1 + 1 - x_0)$$
$$\alpha(1 - \alpha_2)x_1 = \alpha_2(x_1 + 1 - x_0)$$
$$(\alpha/\alpha_2 - \alpha)x_1 = x_1 + 1 - x_0$$

Однако мы можем упростить левую часть этого уравнения:

$$\alpha/\alpha_2 = (1/(P+ 1))/(1/(P+3))$$
$$\alpha/\alpha_2 = (P+3)/(P+1)$$
$$\alpha/\alpha_2 = 1 + 2\alpha$$

Тогда получим:

$$(1 + \alpha)x_1 = x_1 + 1 - x_0$$

$\alpha x_1 = 1 - x_0$

Помните, мы говорили, что у игрока Y диапазон для блеф рейза в принципе может находиться в любой части его диапазона фолда? Мы все еще настаиваем на использовании недоминируемых стратегий, поэтому сейчас мы нашли безразличие между блеф рейзом и фолдом. Стоит отметить, правда, что мы могли бы использовать иную параметризацию и искать порог между коллом и фолдом. Тогда мы бы получили то же самое уравнение, без промежуточных упрощений, к которым нам пришлось прибегнуть чуть выше.

В очередной раз сталкиваемся со знакомым уравнением (пример 11.4 и далее), которое задает отношение между областью бета к области блефа для игрока X.

В точке y_0 мы можем использовать уравнение безразличия из игры #9 (пример 17.1). Причина та же – игрок X все еще не может делать чек/рейз.

$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1$

Безразличие для игрока X в точке x_2^*:

Рука игрока Y	<X, бет/колл>	<X, бет/фолд>
$[0, y_2]$	-1	-2
$[y_1^*, y_2\#]$	+2	-(P+1)

Заметьте, что в этом примере стратегии игрока X становятся несколько более сложными. Так, мы больше не можем говорить об отдельных действиях – мы вынуждены иметь дело с ожиданиями от линий розыгрыша, например: Бет/Колл, Бет/Фолд и т.п.

x_2^* - это один из новых порогов, разделяющий диапазоны колла и фолда в ответ на рейз. Игрок X потеряет одну ставку, если уравняет против вэлью рейза своего оппонента, но выиграет, если там окажется блеф. Как мы увидим позже, поскольку блеф рейз будет стоить игроку Y две ставки, частота колла для игрока X будет выражаться в несколько необычной форме.

$y_2 = (P + 3)(y_2\# - y_1^*)$
$\alpha_2 y_2 = (y_2\# - y_1^*)$

Это уравнение фактически повторяет уравнение 11.4, но с поправкой на большее количество возможных ставок. По нему размер области блеф рейза $y_2\# - y_1^*$ есть размер области вэлью рейза y_2, умноженный на соответствующую константу α_2. Как не сложно догадаться, правила, включающие в себя константу α, повторяются во всех [0,1] играх с конечным размером банка.

Безразличие для игрока X в точке x_1:

Рука игрока Y	**<X, бет/фолд>**	**<X, чек/колл>**
$[0, x_1]$	-1	-1
$[x_1, y_1]$	+1	+1
$[y_1, y_1^*]$	+1	0
$[y_1^*, y_2\#]$	-(P + 1)	0
$[y_2\#, y_0]$	0	0
$[y_0, 1]$	0	+1

$$y_1^* - y_1 = (P+ 1)(y_2\# - y_1^*) + (1 - y_0)$$

Здесь мы получаем уравнение, описывающее зависимость области, с руками из которой игрок Y сделает колл, но никогда не поставит сам (y_1^* - y_1), от его областей блефа и блеф рейза. Фактически, это уравнение показывает последствия от различных вариантов розыгрыша для игрока X: он может либо сделать чек и попытаться поймать блеф своего оппонента, либо бет, но тогда появляется вероятность блеф рейза от игрока Y.

Уравнение безразличия для игрока X в точке x_1^* имеет уже привычный для нас вид:

$$1 - y_0 = \alpha y_1$$

А в точке x_0:

Рука игрока Y	**<X, чек/фолд>**	**<X, блеф>**
$[0, y_2\#]$	0	-1
$[y_2\#, x_0]$	0	+P
$[x_0, 1]$	-P	0

$$y_2\# = (x_0 - y_2\#) (P) + (1-x_0) (P)$$
$$(P + 1)y_2\# = P$$
$$y_2\# = 1 - \alpha$$

Это уравнение похоже на то, что мы получили для y_1^* в [0,1] игре #9 (пример 17.1) - игрок Y будет скидывать α рук в ответ на ставку оппонента.

У нас есть девять уравнений, некоторые из них мы позаимствовали из уже решенных нами игр.

$$y_1 = (x_1^* + x_1)/2 \quad \textbf{(17.2)}$$
$$y_2 = x_2^*/2 \quad \textbf{(17.3)}$$
$$x_2^* = (1 - \alpha_2)x_1 \quad \textbf{(17.4)}$$
$$\alpha x_1 = 1 - x_0 \quad \textbf{(17.5)}$$
$$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1 \quad \textbf{(17.6)}$$
$$\alpha_2 y_2 = (y_2\# - y_1^*) \quad \textbf{(17.7)}$$
$$y_1^* - y1 = (P + 1)(y_2\# - y_1^*) + (1 - y_0) \quad \textbf{(17.8)}$$
$$1 - y_0 = \alpha y1 \quad \textbf{(17.9)}$$
$$y_2\# = 1 - \alpha \quad \textbf{(17.10)}$$

Теперь мы можем решить эту систему уравнений и найти значения всех порогов. Хорошая новость для вас заключается в том, что мы опустим большую часть упрощений, однако мы не можем пройти мимо одной очень важной зависимости, которая обнаруживается в ходе подстановок.

Мы можем объединить уравнения 17.3 и 17.4. Получим:

$$y_2 = x_1(1 - \alpha_2)/2 \quad \textbf{(17.11)}$$

Как и в игре #6 (пример 16.3), мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$y_2 = Rx_1$$

Иными словами, мы получили зависимость между диапазоном ставки игрока X и диапазоном рейза игрока Y. Здесь $R = (1 - \alpha_2)/2$. Легко заметить, что при очень больших значениях *P* эта константа асимптотически приближается к $^1/_2$ – как раз это значение мы и рассматривали в [0,1] игре #6.

Для того, чтобы решить эту громоздкую систему, мы должны свести все ее члены к y_1 и x_1. Так, мы можем свести уравнения 17.2 и 17.6 к x_1^*, а затем приравнять их – в итоге получим одно выражение, содержащее в себе только x_1 и y_1. Далее нам следует обратиться к уравнению 17.8.

Значение y_0 можно выразить через y_1 с помощью уравнения 17.9. В свою очередь, $y_2\#$ является константой (как следует из уравнения 17.10).

В результате получим следующее:

$$x_1 = (1 - \alpha)^2/[1 + \alpha + (2 - \alpha)(1 - a_2)R] \quad \textbf{(17.12)}$$

Это уравнение играет очень важную роль в решении игр без чек/рейзов, поскольку оно работает и в играх, где разрешены три и более ставок. Дело в том, что дополнительные рейзы лишь меняют значение R, в то время как все зависимости между нижними порогами остаются неизменными. Как вы увидите в следующих примерах, это уравнение значительно упростит решение игры с бесконечными рейзами.

Полное решение для всех порогов имеет вид:

$$y_2 = (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) \,/\, (7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$y_1 = (1 - a)(8a^2 + 9a + 3)/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$y_1^* = 1 - a - a_2((1 - a)^2(1 + 2a)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4))$$
$$y_2\# = 1 - a$$
$$y_0 = 1 - a(1 - a)(8a^2 + 9a + 3)/(1 + a)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$x_2^* = 2(1 - a)^2(1 + 2a)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$x_1 = 2(1 - a)^2(1 + 2a)^2/(1 + a)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$x_1^* = 4(1 - a)(2a_2 + 2a + 1)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$
$$x_0 = 1 - 2\alpha(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)^2/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)$$

Давайте посмотрим на найденные пороги при различных размерах банка. В колонке справа рассмотрен случай при бесконечно маленьком P (в математике такие числа обозначаются буквой ε) – вполне ожидаемо, что в таком случае игрокам следует отказаться от каких-либо ставок.

Порог	**P = ∞**	**P = 1**	**P = 2**	**P = 9**	**P = ε (~0)**
y_2	$1/4$	$2/41$	$2/21$	0.195573441	0
x_2^*	$1/2$	$4/41$	$4/21$	0.391146881	0
x_1	$1/2$	$16/123$	$5/21$	0.426705689	0
y_1	$3/4$	$76/246$	$279/630$	0.655203951	0
x_1^*	1	$20/41$	$68/105$	0.883702213	0
y_1^*	1	$20/41$	$68/105$	0.883702213	0
$y_2\#$	1	$1/2$	$2/3$	0.9	0
y_0	1	$208/246$	$537/630$	0.934479605	0
x_0	1	$230/246$	$58/63$	0.957329431	0

Теперь самое время ответить на вопрос: что изменится, если игрок X получит возможность делать чек/рейз?

Пример 17.3 - [0,1] игра #11

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Игрок X может делать чек/рейз
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица

В этой и последующих играх мы уже не будем так подробно расписывать весь процесс выведения уравнений безразличия для каждого порога. Как вы могли понять из примера выше, решения для игр с конечным размером банка могут оказаться достаточно громоздкими. Поэтому мы ограничимся лишь анализом отличий между стратегиями в уже рассмотренных играх и их более сложными аналогами.

Вместе с новой стратегической возможностью в этой игре появляются и новые пороги. Однако многие из них можно опустить, поскольку их зависимость друг от друга уже была изучена выше. Например, игрок X теперь будет делать блефовый чек/рейз с руками между $x_2\#$ и x_1^*. Но мы уже знаем, что размер этой области будет равен диапазону чек/рейза на вэлью (x_2), умноженного на соответствующую константу, α_2. То же самое относится и к диапазонам бет/колла и бет/фолда для игрока Y – он будет скидывать $(1 - \alpha_2)$ своих вэлью бетов в ответ на рейз, делая своего оппонента безразличным блефу.

Наибольший интерес здесь представляют вэлью диапазоны обоих участников, поскольку изменения в них оказывают существенное влияние и на нижние пороги. Но так как мы уже знаем, в каких соотношения должны находиться эти области с вэлью порогами, мы можем не выписывать все уравнения безразличия, а сосредоточиться на более важных аспектах стратегий игроков.

Вполне очевидно, что в этой игре вероятность чек/рейза от игрока X будет оказывать существенное влияние на стратегию вэлью бетов игрока Y. Более того, затронутой окажется и его область вэлью рейзов, так как теперь игрока X скорее всего будет ставить с чуть более слабым диапазоном (ведь часть сильных рук наверняка окажется в его диапазоне чек/рейза). Как вы можете помнить, в игре без фолдов это повлекло за собой значительные сдвиги в стратегиях – игрок Y ставил с более узким диапазоном (из-за появившейся опасности чек/рейза), а игрок X, напротив, должен был делать бет гораздо чаще, чтобы получить вэлью от средних рук своего оппонента. Это, в свою очередь, заставляло игрока Y рейзить более либерально.

Интересно, что игры с и без чек/рейза напрямую связаны между собой. Давайте посмотрим на безразличие для игрока X в точке x_2.

Рука игрока Y	<X, чек/рейз>	<X, ,бет/колл>
$[0, x_2]$	-2	-2
$[x_2, y_2]$	+2	+2
$[y_2, y_2^*]$	+2	+1
$[y_2^*, y_1]$	+1	+1
$[y_1, y_1^*]$	0	+1
$[y_1^*, y_2\#]$	0	+2
$[y_0, 1]$	+1	0

$$y_2^* - y_2 + (1 - y_0) = 2\,(y_2\# - y_1^*) + y_1^* - y_1$$

Найдем y_2^* - для этого нам нужно написать уравнение безразличия для порога $x_2\#$:

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, блеф чек/рейз>
$[0, y_2^*]$	-1	-2
$[y_2^*, y_1]$	-1	-(P+ 1)
$[y_0, 1]$	+ 1	+1

$$y_2^* = (P + 2)\,(y_1 - y_2^*)$$
$$y_2^* = (1 - \alpha_2)y_1$$

Мы также знаем, что область $y_2\# - y_1^*$ равна $\alpha_2 y_2$. Получим:

$$(1 - \alpha_2)y_1 - y_2 + (1 - y_0) = 2\alpha_2 y_2 + y_1^* - y_1$$

В игре без чек/рейза уравнение безразличия в точке x_1 выглядело следующим образом:

$$y_1^* - y_1 = (P + 1)\,(y_2\# - y_1^*) + (1 - y_0)$$

Это уравнение задает безразличие игрока X к бет/фолду и чек/коллу на пороге x_1. Если он сделает ставку, то не даст своему оппоненту возможность поставить на блеф, но выиграет одну единицу против рук, которые нехотя уравняют и никогда не поставят сами. В то же время он также потеряет (P + 1), если игрок Y решит сделать блеф рейз.

Примечание от переводчика: Это очень интересный результат, и такая замена действительно имеет место. Она аналогична тому, что вы могли видеть в главе 16 – там пороги x_1 для игр с и без чек/рейзов (но с ограничением по количеству допустимых рейзов) также были идентичны.

Произведем замену, получим:

$$(1 - \alpha_2)y_1 - y_2 = (P + 3)\alpha_2 y_2$$
$$(1 - \alpha_2)y_1 = 2y_2$$
$$y_2 = y_1(1 - \alpha_2)/2$$

В игре без чек/рейза соотношение $(1 - \alpha_2)/2$ действовало для y_2 и x_1. Однако здесь оно применяется по отношению к порогам y_2 и y_1. Как и в случае с играми из главы 16 (примеры 16.3 и 16.4), мы приходим к выводу, что *r* в играх с чек/рейзом задает последовательность не для двух игроков (y_2, x_3, y_4, и т.д.), а только для порогов y_n.

Мы можем применить эту логику по цепочке и перейти к общему уравнению, описывающему поведение порога y_1 в рассматриваемой игре:

$$y_1 = (1 - \alpha)/[1 + \alpha + (1 - \alpha_2)R] \qquad \textbf{(17.13)}$$

Как вы можете видеть, оно очень похоже на уравнение 17.12, но при этом включает в себя возможность чек/рейза.

Оставшаяся часть решения не представляет никакой сложности – нужно лишь выписать уравнения безразличия и решить их, а затем использовать выведенное выше уравнение, чтобы найти значения всех порогов.

В следующем примере мы обратимся к случаю с бесконечными рейзами.

Пример 17.4 - [0,1] игра #12

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Чек/Рейз делать нельзя
- Игроки могут делать любое количество рейзов и бетов
- Игроки могут скидывать свои карты

Для решения этой игры нам потребуются результаты из наших предыдущих примеров. Большинство уравнений безразличия здесь будут идентичны уже рассмотренным нами в [0,1] игре #10 (пример 17.2); более того, единственным уравнением, которое мы не сможем использовать, будет безразличие в точке y_2. В той игре вторая ставка всегда была последней, причем игроку Y нужно было делать рейз с половиной диапазона колла своего оппонента. Однако в этом примере игрок X может ответить ре-рейзом, и мы обязаны это учесть.

Кроме того, нам следует привнести в параметризацию бесконечный ряд порогов для рейзов и ре-рейзов, который бы удовлетворял условиям задачи. Для каждого из таких порогов мы должны будем найти свое уравнение безразличия. Например, для любого *n* мы получим:

$$\alpha_n y_n = (y_n\# - y_{n-1}*)$$

Это уже знакомое нам отношение блефов к вэлью бетам, определяемое коэффициентом α соответствующего порядка.

Решая игру #10, мы получили ключевое уравнение, которое описывало порог x_1 для игр без чек/рейза.

$$(1 - \alpha)^2 = x_1[1 + \alpha + R(2 - \alpha)(1 - \alpha 2)]$$

Нам следует немного скорректировать одно уравнение, чтобы отразить следующую разницу между этими двумя играми:

$$y_2 = Rx_1$$

Если точнее, изменится значение *R* и только.

Таким образом, мы можем утверждать, что в общем виде уравнение 17.12 все еще в силе. Все, что нам нужно теперь сделать – это найти значение *R* для новой игры.

Обратимся примеру 16.4 – там при банке, стремящимся к бесконечности, значения α стремились к нулю. В той игре порог y_2 был равен $^1/_2$, также как и x_1 ($^1/_2$). Иными словами, значение *R* составляло $^1/_2$. Используя этот результат в формуле выше (при α и α_2 стремящихся к нулю), мы также получим $x_1 = {^1/_2}$.

В игре с одной ставкой *R* было равно нулю, поскольку порога y_2 не существовало. В таком случае x_1 равно $(1 - \alpha)^2/(1 + \alpha)$. Именно такой ответ мы и получили для [0,1] игры #9.

Но вернемся к нашему текущему примеру. Для тех, кто смог понять все выкладки из предыдущих решений, не составит труда предположить, что:

$$x_3\# - x_2* = \alpha_3 x_3$$

Размер n-ой области блефа должен составлять α_n от соответствующей вэлью области

$$x_3\# = (1 - \alpha_2)x_1$$

Когда мы делаем n-ый рейз на вэлью, нам следует уравнивать ре-рейз (или делать ответный ре-рейз) с $(1 - \alpha_{n+1})$ из диапазона n-ого рейза, поскольку в противном случае оппонент сможет эксплуатировать вас своими блеф рейзами.

Безразличие в точке y_2 (первый порог, на котором рассматриваемая игра отличается от [0,1] игры #6):

$$x_2^* - y_2 = y_2 + (P + 3)\alpha_3 x_3$$

Если игрок Y сделает вэлью рейз, когда рука его оппонента находится в пределах от y_2 до x_2^*, то он выиграет одну ставку. Однако он потеряет одну единицу, если у игрока X окажется рука лучше, чем y_2, и (P + 3) единиц, если игрок X сделает блеф ре-рейз с руками $x_3\# - x_2^*$.

Решая это уравнение получим:

$$(1 - \alpha_2)x_1 - \alpha_3 x_3 = 2y_2 + (P + 3)\alpha_3 x_3$$

Заменим все α на соответствующие им выражения:

$$x_1(P + 2)/(P+ 3) = 2y_2 + x_3(P + 4)/(P+ 5) \qquad \textbf{(17.14)}$$

Это уравнение безразличия будет повторяться через каждые две ставки. Иными словами, уравнение 17.14 является частными случаем для последовательности порогов x_n, y_{n+1}, x_{n+2} и так далее.

Мы можем воспользоваться уже рассмотренным ранее принципом, что как только один из игроков делает второй рейз, игра становится абсолютно симметричной в плане соотношений различных порогов (с поправкой на возрастающий размер банка). Естественно, значения самих порогов буду отличаться, поскольку каждый раз мы будем использовать мультипликатор, идентичный уже знакомому нам *r*, однако с ростом размера банка значение этого мультипликатора также будет меняться. В силу этой зависимости мы будем называть его R_p. Тогда получим:

$$y_2 = R_p x_1$$
$$x_3 = R_{p+2} y_2$$
$$y_4 = R_{p+4} x_3$$

И так далее

Произведем соответствующие замены в уравнении 17.14:

$$x_1(P+ 2)/(P+ 3) = 2R_p x_1 + (R_p R_p{+}2x_1)(P+ 4)/(P+ 5)$$

Получим уравнение, независящее от x_1:

$$R_p = \frac{\frac{(P+2)}{(P+3)}}{2 + \frac{(R_{p+2})(P+4)}{(P+5)}}$$

Это рекурсивное уравнение, описывающее зависимость между соседними значениями R_p. Чтобы найти конкретные значения мультипликатора, мы можем воспользоваться следующим свойством: при банке, стремящимся к бесконечности, R_p стремится к *r* (в таком случае мы получим ту же самую игру без фолдов, которую мы рассматривали в примере 16.4). Значит, мы можем выбрать произвольно большое значение n, приравнять все к $\sqrt{2}$ – 1 и найти нужный нам размер банка. К счастью, это рекурсивное уравнение сводится к определенным значениям достаточно быстро.

Как только мы получим значение R_p, мы легко сможем определить точное расположение каждого из порогов, используя уравнение для x_1, а затем корректируя результат с помощью R_p. Как и обычно, области блефа будут соседствовать с областями колла, а те, в свою очередь – с областями вэлью рейзов.

Нужно запомнить

………………………………………………………………………………………………...

- [0,1] игры подходят для рассмотрения достаточно сложных ситуаций, включая чек/рейзы, бесконечные рейзы и т.п.

………………………………………………………………………………………………...

- Вне зависимости от сложности игры ключевыми параметрами являются вэлью диапазоны. Каждому из них соответствует некий блеф диапазон, а также область блеф рейза, которую можно определить, соотнеся размер банка с вэлью диапазоном.

………………………………………………………………………………………………...

- В играх без чек/рейза существует рекурсивная зависимость между последовательными порогами обоих участников: x_1 - > y_2 - > x_3 и так далее.
- В играх с чек/рейзом подобная рекурсивная зависимость наблюдается только для порогов игрока Y.

………………………………………………………………………………………………...

- Если ваш оппонент мог сделать ставку, но предпочел ей чек, то вы должны бет на вэлью со всеми руками, с которыми он бы поставил сам, а также с половиной его диапазона колла (при условии, что оппонент не может делать рейз, только колл или фолд).

………………………………………………………………………………………………...

Глава 18

Цена имеет значение: Возвращаемся к [0,1] играм

В начале этой книги мы оговорились, что не будем предпринимать бессмысленных попыток решить покер. Скорее, мы хотели бы сосредоточиться на изучении отдельных аспектов игры, чтобы получить лучшее представление о том, как различные действия могут повлиять на нашу стратегию (оптимальную или эксплуатирующую).

[0,1] игры как нельзя лучше демонстрируют этот подход – в рамках третьей части мы рассмотрели двенадцать различных примеров с использованием распределения [0,1], каждый из которых имел уникальную структуру ставок и набор правил. До этого момента мы не обращали внимания ни на что кроме оптимальных стратегий, а также методов, которые позволяли бы нам решить любую подобную игру.

Однако важной частью анализа является определение цены игры. Мы уже говорили в начале этой главы, ***ценой игры*** называется ожидание одного из игроков при условии, что оба участника следуют ***оптимальным стратегиям***. Как правило, им оказывается игрок Y, поскольку почти все без исключения покерные игры дают преимуществу именно игроку, который находится в позиции. Логично предположить, что в подавляющем большинстве случаев его цена игры окажется неотрицательной. В этой главе, как и раньше, мы будем иметь дело с экс-шоудаун вэлью (если не сказано иное). Также мы будем использовать букву G для обозначения цены игры, причем неважно где: на конкретном отрезке, либо на всей области определения игры.

Для вычисления цены игры мы всегда можем прибегнуть к методу перебора – достаточно определить вероятности для каждой из возможных рук участников, найти их стратегии, а затем и математическое ожидание. Зачастую это оказывается весьма простым и действенным способом решения примитивных игр, как например [0,1] игра #1 (пример 11.2).

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
[0, $^1/_2$]	[0, $^1/_2$]	$^1/_4$	0	0
[0, $^1/_2$]	[$^1/_2$,1]	$^1/_4$	0	0
[$^1/_2$, 1]	[0, '$^1/_2$]	$^1/_4$	+1	+ $^1/_4$
[$^1/_2$, 11]	[$^1/_2$, 1]	$^1/_4$	0	0
Сумма				+ $^1/_4$

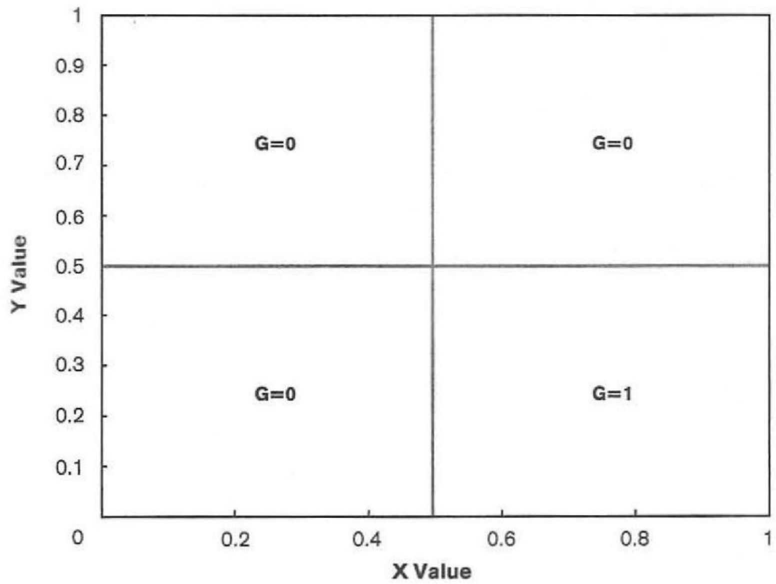


Рисунок 18.1 – Цена игры для [0,1] игры #1

Здесь цена игры (половина улицы, без фолдов) составляет $1/4$. Мы можем применить этот метод ко многим другим примерам, которые мы успели рассмотреть на страницах этой главы. Однако чем сложнее игра, тем более запутанными становятся вычисления. К счастью, мы можем воспользоваться несколькими полезными свойствами оптимальных стратегий, чтобы вычислять цену игры даже в самых сложных случаях.

Давайте рассмотрим следующую игру. Пусть стратегия игрока Y остается неизменной, считаем ее оптимальной. Тогда мы можем варьировать стратегию игрока X, при этом зная, что он никак не сможет улучшить свое ожидание.

> *Примечание от переводчика: Авторы книги уже не раз прибегали к фиксированию стратегии игрока Y – мы уже подробно рассмотрели этот метод в одной из предыдущих глав (в комментариях к решениям).*

Смысл этих манипуляций со стратегиями состоит в следующем. Для рук, с которыми игрок X оказывается безразличным к выбору действия, мы можем выбирать ту линию, которая лучше всего подходит для определения цены игры. Причем это не значит, что игрок X может играть по такой стратегии непосредственно за столом – тогда игроку Y не составит труда его эксплуатировать. Важно понимать, что нашей целью является расчет цены игры, а не поиск оптимальных стратегий. Последним мы занимались на протяжении всей главы.

Обратимся к играм на полной улице:

[0,1] игра #4 (пример 15.1) была скорее небольшим экскурсом в теорию лудомании, чем серьезным инструментом для анализа покерной стратегии. Мы сразу смогли определить цену игры для этого случая, поскольку каждый из

игроков был обязан вкладывать деньги в банк с абсолютно любой рукой. Экс-шоудаун ожидание составляло 0.

[0,1] игра #5 (пример 15.2) - игра без фолдов, но игрок Y мог сделать рейз ставки своего оппонента. Мы получили следующее решение для этой игры:

$x_1 = {}^1/_2$
$y_1 = {}^3/_4$
$y_2 = {}^1/_4$

Мы можем легко посчитать *G*, зафиксировав стратегию игрока Y. Так, играя против оптимальной стратегии, игрок X может либо делать чек, либо поставить с руками между ${}^1/_4$ и ${}^3/_4$ и получить одно и то же математическое ожидание. Если он ставит, то получает одну единицу вэлью от рук игрока Y между ${}^3/_4$ и 1, но теряет единицу против всех рук из диапазона от 0 до ${}^1/_4$ (по сравнению с чеком). И поскольку ожидание от бета и чека на этом отрезке будет одинаковым для игрока X, мы можем утверждать, что математическое ожидание игрока Y составит + ${}^1/_4$, если рука игрока X находится на отрезке $[{}^1/_4, {}^3/_4]$.

Рука игрока X	**Рука игрока Y**	**Вероятность**	**Исход**	**Ожидание**
$[0, {}^1/_4]$	$[0, {}^1/_4]$	${}^1/_{16}$	0	0
$[0, {}^1/_4]$	$[{}^1/_4, 1]$	${}^3/_{16}$	-1	$- {}^3/_{16}$
$[{}^1/_4, {}^3/_4]$	[0, 1]	${}^1/_2$	$+ {}^1/_4$	$+ {}^1/_8$
$[{}^3/_4, 1]$	$[0, {}^3/_4]$	${}^3/_{16}$	+1	$+{}^3/_{16}$
$[{}^3/_4, 1]$	$[{}^3/_4, 1]$	${}^1/_{16}$	0	0
Сумма				$+ {}^1/_8$

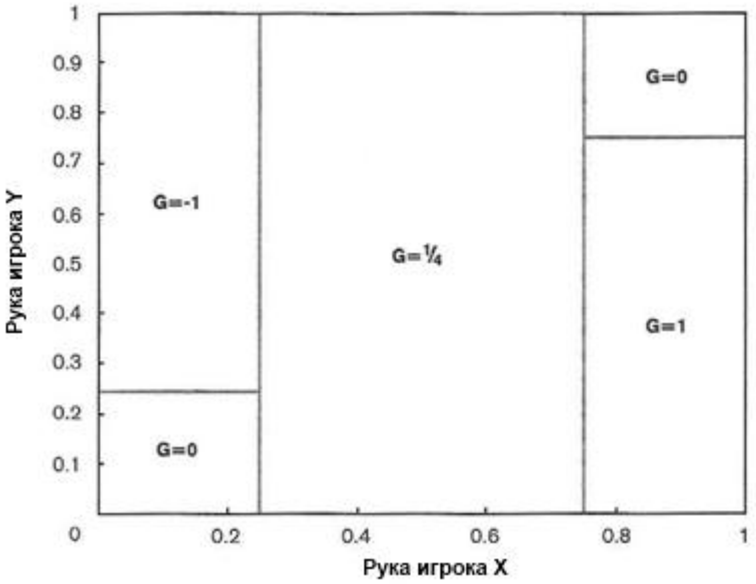


Рисунок 18.2. Цена игры для [0,1] игры #5

Таким образом, цена игры с двумя ставками без чек/рейзов составляет $^1/_8$. И отнюдь не мало! Давайте посмотрим на это с более знакомой вам стороны.

Когда игрок X делает ставку, его оппонент сделает рейз $^1/_4$ раз, и уравняет во всех остальных случаях, таким образом, в среднем он вложит в банк $(^5/_4)(^1/_2)$ или $^5/_8$ единицы. Когда игрок X делает чек, игрок Y вложит в банк одну ставку в $^3/_4$ случаев или $(^3/_4)(^1/_2) = {}^3/_8$ ставки. Иными словами, в среднем игрок Y внесет одну ставку за раздачу, и выиграет $^1/_8$ – его преимущество составляет 12.5%!

Причина столь огромного преимущества находится исключительно в позиции. Рассматриваемая игра полностью симметрична за исключением того, что игрок Y принимает решение последним. Как вы можете видеть, в покере позиция действительно имеет цену. К слову сказать, здесь игрок X чувствует себя несколько более комфортно, чем в играх на половине улицы – там у него не было никакого выбора, кроме как делать колл со всем диапазоном. Появление новой стратегической возможности у оппонента достаточно дорого обошлось игроку Y – он потерял половину своего ожидания (по сравнению с игрой, где игрок X был обязан сделать чек).

Мы можем еще больше сдвинуть баланс (так что ситуация станет несколько ближе к реальному покеру) в сторону игрока X, предоставив ему возможность делать чек/рейз. Игра #7 (пример 16.4) мало чем отличается от игры #5 (пример 16.2). Интуиция может вам подсказать, что ожидание игрока X в этом случае окажется как минимум не хуже.

Давайте проверим, так ли это. Решение для рассматриваемой игры выглядело следующим образом:

$x_1 = {}^5/_9$
$y_1 = {}^2/_3$
$x_2 = {}^1/_9$
$y_2 = {}^1/_3$

И снова мы будем считать, что пороги игрока Y никак не изменятся.

Когда рука игрока X находится ниже порога ${}^1/_3$, мы знаем, что вне зависимости от того, что он будет делать, две ставки всегда окажутся в банке, если рука его оппонента также лежит в интервале от 0 до ${}^1/_3$. Игрок X получит вэлью от чек/рейза (по сравнению со ставкой), если рука игрока Y оказывается в диапазоне [${}^1/_3$, ${}^2/_3$,], но теряет это ставку, если у оппонента рука будет между ${}^2/_3$ и 1. Таким образом, игрок X безразличен к чек/рейзу или бету на всей области [0, ${}^1/_3$].

> *Примечание от переводчика: Мы считаем, что игрок X безразличен, поскольку его ожидание никак не меняется.*

С другой стороны, когда рука игрока X будет между ${}^1/_3$ и ${}^5/_9$, он потеряет возможность делать прибыльные чек/рейзы из-за дополнительной ставки, которую он проиграет против хороших рук оппонента. Значит, ему стоит просто ставить со всем этим диапазоном. С руками хуже ${}^5/_9$ игрок X сделает чек.

Мы можем заново оценить решение игры, предполагая, что игрок X будет следовать такой стратегии:

- Бет с руками лучше, чем ${}^5/_9$
- Чек и колл с руками хуже, чем ${}^5/_9$.

Эта стратегия имеет точно такое же ожидание, как «настоящая» оптимальная стратегия игрока X против оптимальной стратегии игрока Y. В свою очередь, если бы стратегия игрока Y не была фиксированной, он бы мог начать эксплуатировать своего оппонента.

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
[0, $^1/_3$]	[0, $^1/_3$]	$^1/_9$	0	0
[0, $^1/_3$]	[$^1/_3$, 1]	$^2/_9$	-1	-$^2/_9$
[$^1/_3$, $^5/_9$]	[0, $^1/_3$]	$^2/_{27}$	+2	+ $^4/_{27}$
[$^1/_3$, $^5/_9$]	[$^1/_3$, $^5/_9$]	$^4/_{81}$	0	0
[$^1/_3$, $^5/_9$]	[$^5/_9$, 1]	$^8/_{81}$	-1	-$^8/_{81}$
[$^5/_9$, 1]	[0, $^5/_9$]	$^{20}/_{81}$	+1	+$^{20}/_{81}$
[$^5/_9$, 1]	[$^5/_9$, $^2/_3$]	$^4/_{81}$	+$^3/_4$	+$^1/_{27}$
[$^5/_9$,1]	[$^2/_3$, 1]	$^4/_{27}$	0	0
Сумма				+$^1/_9$

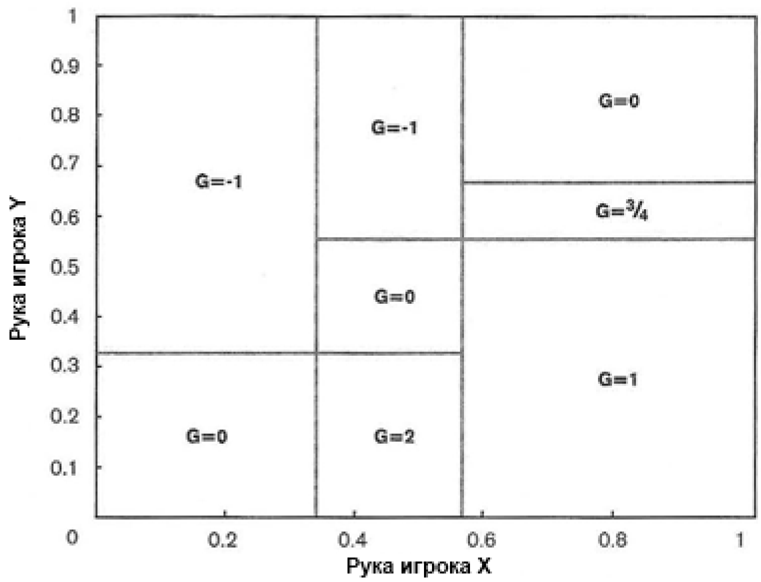


Рисунок 18.3. Цена игры для [0,1] игры #7

Цена этой игры составляет $^1/_9$, что на $^1/_{72}$ лучше для игрока X, чем в предыдущей игре. На самом деле, когда мы решали этот пример, мы думали, что ценность чек/рейза для игрока X будет гораздо выше – в районе половины исходной цены игры. В реальности же эта стратегическая возможность не оказывает большого влияния на стратегию игрока Y. Действительно, он начинает делать чуть более лузовые рейзы и чуть более тайтовые беты, но этого все равно недостаточно, чтобы нивелировать его позиционное преимущество.

Последние две игры без фолдов, которые мы рассмотрели, давали игрокам возможность делать бесконечное количество рейзов. Чтобы посчитать цену для игры из примера 16.3 (где еще не было чек/рейзов), мы можем воспользоваться ее симметричностью после второй ставки. Решение этой игры выглядело так:

$x_1 = 1/(1 + 2r)$
$x_n = r_{n-1}x_1$ (для нечетных $n > 1$)
$y_1 = (1 + r)\ x_1$
$y_n = r_{n-1}\ x_1$ (для четных $n > 1$)

Давайте рассмотрим несколько диапазонов, начиная с самых слабых. Матрица выплат в нашем случае будет выглядеть следующим образом (руки игрока X сверху, игрока Y – слева):

	$[0, x_1]$	$[x_1, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, x_1]$	* (см. ниже)	+1	+1
$[x_1, y_1]$	-1	0	+1
$[y_1, 1]$	-1	0	0

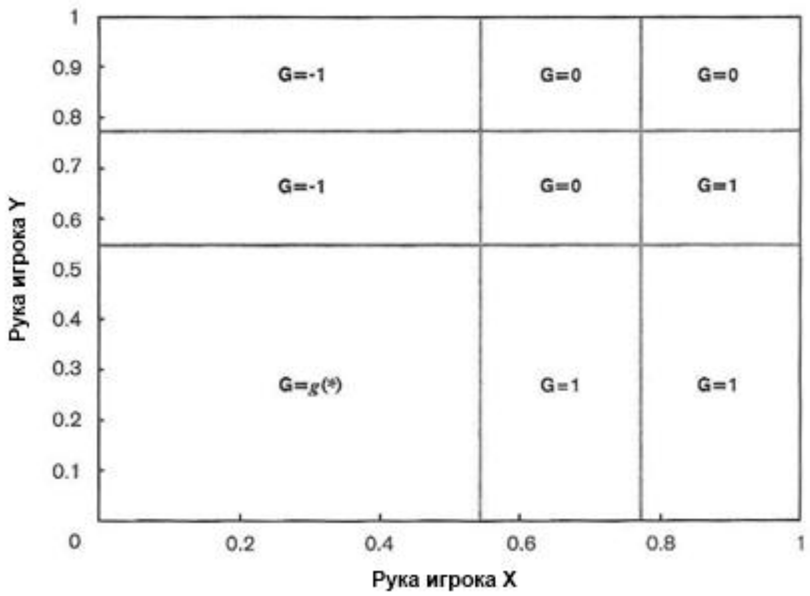


Рисунок 18.4. Цена игры для [0,1] игры #6

Мы отметили звездочкой область, где у обоих игроков оказывается рука старше x_1, поскольку посчитать ее ожидание напрямую не представляется возможным, ведь она включает в себя произвольное число порогов (с различными размерами выигрыша на каждом из них). Естественно, мы не можем оценить всю бесконечную последовательность порогов. Вместо этого, представьте ситуацию, когда у обоих игроков будет рука из интервала $[0, x_1]$. Получим вспомогательную игру (где игрок X делает бет).

Пусть g – ожидание игрока Y в области, помеченной «*». В ней мы имеем:

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
$[y_2, x_1]$	$[y_2, x_1]$	$(x_1 - y_2)^2$	0	0
$[y_2, x_1]$	$[0, y_2]$	$(y_2)(x_1 - y_2)$	+2	$2(y_2)(x_1 - y_2)$
$[0, y_2]$	$[y_2, x_1]$	$(y_2)(x_1 - y_2)$	-1	$-(y_2)(x_1 - y_2)$
$[0, y_2]$	$[0, y_2]$	$y2^2$	-g	$-gy2^2$

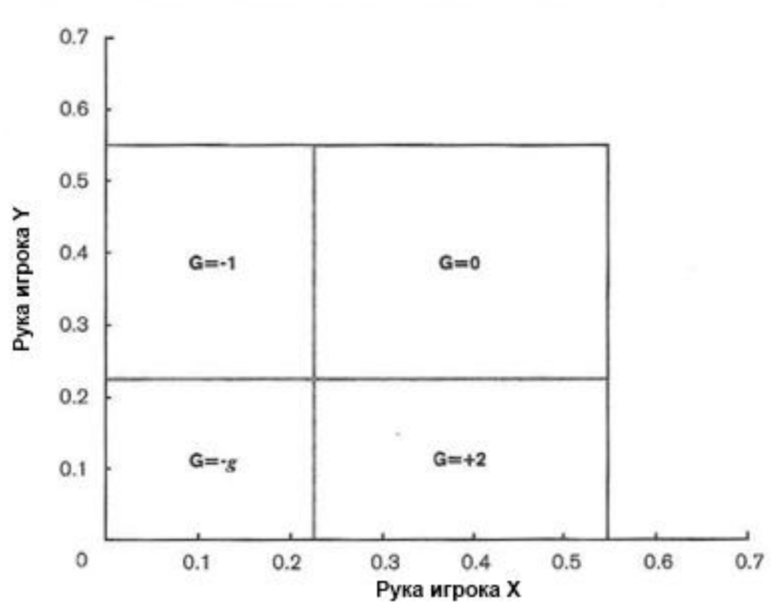


Рисунок 18.5. Цена игры для [0,1] игры #6 в помеченной области

После еще одного рейза эта игра становится идентичной игре #6, за исключением того факта, что теперь ситуация поменялась на обратную. У обоих игроков есть некие руки из заданного интервала, и игрок, сделавший последний рейз имеет ожидание -g.

Теперь найдем значение g:

$$g = y_2(x_1 - y_2) - gy2^2$$
$$g = rx_1(x_1 - rx_3) - gr^2x_1^2$$
$$gr^2x_1^2 + g = rx_1(x_1 - rx_1)$$
$$gr^2 + g = r - r^2$$
$$g(1+r^2) = r - r^2$$
$$g(2(1 - r)) = r - r^2$$
$$g = r/2$$

Таким образом, ожидание для области, где у обоих игроков оказываются сильные руки, составляет r/2.

Внесем это значение в исходную матрицу:

	$[0, x_1]$	$[x_1, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, x_1]$	r/2	+1	+1
$[x_1, y_1]$	-1	0	+1
$[y_1, 1]$	-1	0	0

Посчитаем математическое ожидание для всей игры:

$$\langle Y\rangle = (1 - y_1)(y_1 - x_1) + rx_1^2/2$$
$$\langle Y\rangle = (1/4)(1/4) + r(1/8)$$
$$\langle Y\rangle = 1/16 + r/8$$
$$\langle Y\rangle \approx 0.11428$$

Мы можем сравнить полученное значение с $1/8$, ценой первой игры, которую мы разобрали в этой главе (две ставки, без чек/рейза). Очевидно, что игрок X выигрывает от возможности сделать ответный ре-рейз, однако влияние каждого последующего рейза на общее ожидание от игры будет становиться все меньше. Мы можем убедиться в этом, посчитав порог $x_3 = r^2/(1 + 2r) = 0.09384$. Чтобы игрок X смог поставить в банк третью ставку (с рукой лучше x_3), у его оппонента должен оказаться диапазон y_2, что произойдет лишь 22% раз. Значит, вероятность такого исхода составляет всего 2%.

Последняя из решенных нами игр без фолдов позволяла участникам делать бесконечное число рейзов, и при этом разрешала игроку X применять чек/рейз (пример 16.4). Найти ожидание игрока Y нам снова поможет рассмотренный выше метод.

В игре с двумя ставками и чек/рейзом игрок X был безразличен к чек/рейзу и ставке со всеми руками сильнее y_2. То же самое оказывается верным и для случая с бесконечными рейзами. Игрок X безразличен к чек/рейзу и бету между любыми двумя порогами игрока Y. Тогда стратегия игрока X значительно упрощается:

$$x_1 = y_1$$
$$x_3 = y_3$$

… и так далее.

Для области, где диапазоны обоих игроков старше y_1, мы снова обнаруживаем, что ее ожидание составляет r/2. Мы призываем наших читателей самостоятельно убедиться в том, что это действительно так.

Получаем простую матрицу выплат:

	$[0, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, y_1]$	$r/2$	+1
$[y_1, 1]$	-1	0

Вычисляем ожидание игры:

$<Y> = ry_1^2/2$
$<Y> = r/4$
$<Y> \approx 0.10355$

Появление стратегической возможности «чек/рейз» снова незначительно улучшило ожидание игрока X. Для сравнения, возможность делать ставку урезала ожидание игрока Y ровно вдвое, с $^1/_4$ до $^1/_8$.

Мы еще вернемся к сопоставлению ожидаемых выигрышей от различных игр. Нашей следующей задачей будет определение цены игры для случаев с конечным размером банка.

Самым простым представителем этого класса игр был пример 11.3 – игра на половине улицы с фолдами. Решение для него выглядело так:

$y_1 = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)(\alpha + 1)$
$x_1^* = 2y_1$
$1 - y_0 = \alpha y_1$

Здесь мы будем использовать G_n для обозначения ожидания игрока Y в различных областях стратегии, начиная со слабейшей (где n = 0).

Когда рука игрока X оказывается в диапазоне $[0, y_1]$, его лучшей стратегией будет колл - он X выиграет одну ставку против блефов игрока Y, но против вэлью бетов не получит ничего.

$G_2 = <X \text{ на } [0, y_1]>$
$G_2 = -\alpha y_1$

Примечание от переводчика: Ожидание в этой области отрицательное, поскольку хотя авторы и приводят аргументы со стороны игрока X, цена игры считается по отношению к игроку Y. Значит, если игрок X обладает нейтральным ожиданием против вэлью бетов на диапазоне [0, y_1], и выигрывает одну ставку против блефов, то игрок Y именно эту ставку будет проигрывать со всеми своими блефами.

Ожидание от чек/колла для игрока X против вэлью бетов оппонента будет нейтральным, поскольку если диапазоны обоих игроков равны по *силе (а мы рассматриваем случай, когда рука игрока X берется из интервала [0, y_1], и поскольку стратегия игрока Y является фиксированной, то он будет ставить на вэлью также с [0, y_1]), то их ожидание будет равно нулю, ведь ни один из них не может выиграть на дистанции.*

Когда рука игрока X оказывается на отрезке [y_1, y_0], он становится безразличным к коллу или фолду с каждой из них. Он выигрывает ставку против блефов, но проигрывает вэлью бетам. Раз это так, мы можем считать, что он всегда будет скидывать свою руку (для упрощения расчетов). Тогда игрок Y ничего не получает со своими вэлью руками, но выигрывает банк размером P в случае успешного блефа.

G_1 = <X на [y_1, y_0] >
$G_1 = P\alpha y_1$
$G_1 = (1- \alpha)y_1$

Если же игроку X попалась рука в промежутке от y_0 до 1, он всегда будет делать фолд, отдавая банк своему оппоненту. Игрок Y, в свою очередь, в среднем выиграет половину банка с руками из того же интервала (поскольку рука хуже, чем у игрока X на этом интервале у него окажется ровно половину раз):

G_0 = <X на [y_0, 1] >
$G_0 = P\alpha y_1/2$
$G_0 = y_1(1- \alpha)/2$

Чтобы найти цену игры, нам нужно умножить полученные значения G_n на длины соответствующих интервалов:

$$G = y_1G_2 + (y_0 - y_1)G_1 + (1 - y_0)G_0$$
$$G = y_1(-\alpha y_1) + (1 - y_1 - \alpha y_1)(1 - \alpha)y_1 + \alpha y_1^2(1 - \alpha)/2$$

$$G = (1 - \alpha)y_1 - (2 - \alpha)(1 + \alpha)y_1^2/2 \qquad \textbf{(18.1)}$$

Мы можем упростить полученное выражение, используя известное значение y_1 (из формулы выше):

$$G = y_1(1 - \alpha)/2$$

В [0,1] игре #9 (пример 17.1) мы рассматривали стратегии игроков на полной улице. И снова для нахождения цены игры мы можем применить тот же алгоритм. В области [0, y_1] оказывается, что чек и бет игрока X обладают одинаковым ожиданием против оптимальной стратегии оппонента:

Рука игрока Y	<X, чек>	<X, бет>
$[0, x_1]$	+1	+1
$[x_1, y_1]$	-1	-1
$[y_1, y_1^*]$	0	-1
$[y_1^*, y_0]$	0	0
$[y_0, 1]$	- 1	0

Решение для игрока Y выглядело следующим образом:

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$
$$y_0 = (1 + \alpha_2)/(1 + \alpha)$$
$$y_1^* = 1 - \alpha$$

Как вы можете заметить, игрок Y выигрывает одну ставку с руками из области $[y_1, y_1^*]$ после чека игрока X (по сравнению со ставкой), но проигрывает в области $[y_0, 1]$. Мы можем доказать, что эти области идентичны по своему размеру следующим образом:

$$y_1^* - y_1 = (1 - \alpha) - (1 - \alpha)/(1 + \alpha) = (\alpha - \alpha_2)/(1 + \alpha) = \alpha y_1 = 1 - y_0$$

Таким образом, с руками из диапазона $[0, y_1]$ игрок X безразличен к чеку и бету против оптимальной стратегии оппонента. Это значит, что мы можем использовать наши выводы из предыдущего примера. Цена этой игры будет идентична таковой для игры #2 (пример 11.3), единственное отличие заключается в пороге y_1.

Используем уравнение 18.1:

$$G = (1 - \alpha)y_1 - (2 - \alpha)(1 + \alpha)y_1^2/2 \qquad \textbf{(18.1)}$$

Но теперь мы подставим в него другое значение y_1:

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$

$$G = (1 - \alpha)^2/(1 + \alpha) - (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)^2/2(1 + \alpha) \qquad \textbf{(18.1)}$$
$$G = (1 - \alpha)^2(2 - 2 + \alpha)/2(1 + \alpha)$$
$$G = a(1 - \alpha)^2/2(1 + \alpha)$$

Игра из примера 17.2 разрешала делать рейз только игроку Y. Для определения ее цены мы можем использовать следующие G из игры с одной ставкой:

$$G_1 = \langle X \text{ на } [y_1,y_0] \rangle$$
$$G_1= P\alpha y_1$$
$$G_1 = (1 - \alpha)y_1$$

G_0 = <X на $[y_0, 1]$ >
$G_0 = P\alpha y_1/2$
$G_0 = y_1(1 - \alpha)/2$

Что касается G_2, где рука игрока X оказывается в диапазоне $[y_1, y_2]$, мы знаем, что если он будет делать бет, то игрок Y будет рейзить достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к коллу. Вэлью рейзы игрока Y всегда будут старше рук из рассматриваемого диапазона, так что игрок X может лишь надеяться побить блеф. Мы можем сравнить ожидание игрока X от чек/колла с ожиданием от бет/колла для всех рук в этой области:

Рука игрока Y	**<X, чек/колл>**	**<X, бет/колл>**
$[0, y_2]$	+1	+2
$[y_2, y_1]$	0	0
$[y_1, y_1^*]$	0	-1
$[y_1^*, y_2\#]$	0	-2
$[y_2\#, y_0]$	0	0
$[y_0, 1]$	-1	0

Опять же, мы можем показать, что игрок X безразличен к выбору одной из этих линий. Как вы можете помнить, одно из уравнений безразличия, составленных нами для этой игры, имело вид:

$$y_1^* - y_1 = (P + 1)\ (y_2\# - y_1^*) + (1 - y_0)$$

В случае бет/колла игрок X выигрывает:

$$2\ (y_2\# - y_1^*) + y_1^* - y_1 - 2y_2$$

Используем указанное выше значение $y_1^* - y_1$, получим:

$$(P + 3)\ (y_2\# - y_1^*) + 1 - y_0 - 2y_2 = -y_2 + \alpha y_1$$

В случае чек/колла, игрок X получает:

$$-(y_2 - 0) + (1 - y_0) = -y_2 + \alpha y_1$$

Значит на интервале $[y_2, y_1]$ игроку X будет все равно, что делать: чек/колл, бет/фолд или бет/колл. Небольшая заметка для тех из вас, кто собирается поработать над решением более сложных [0,1] игр, такое ***тройное безразличие*** зачастую может сократить количество уравнений, а также существенно их упростить.

Проще всего нам будет искать ожидание игрока Y против рук игрока X из заданного диапазона, когда последний делает чек и колл. В таком случае:

$$G_2 = \langle X \text{ на } [y_2, y_1] \rangle = y_2 - \alpha y_1$$

С руками сильнее, чем y_2 игроку X стоит играть через бет/колл. Тогда он получает нейтральное ожидание, если оппонент будет рейзить на вэлью, а также выигрывает одну или две ставки, когда игрок Y уравнивает или делает блеф рейз. Значит, ожидание игрока Y составит:

$$G_3 = \langle X \text{ на } [0, y_2] \rangle = (y_1{}^* - y_2) - 2(y_2\# - y_1{}^*)$$
$$G_3 = y_2 - y_2\# - (y_2\# - y_1)$$
$$G_3 = y_2 - (1 - a) - \alpha_2 y_2$$
$$G_3 = (1 - \alpha_2)y_2 - 1 + \alpha$$

Складывая взвешенные значения G получим:

$$\langle Y \rangle = y_2G_3 + (y_1 - y_2)G_2 + (y_0 - y_1)G_1 + (1 - y_0)G_0$$
$$\langle Y \rangle = y_2G_3 + (y_1 - y_2)G_2 + (y_0 - y1)G_1 + (1 - y_0)G_0$$
$$\langle Y \rangle = y_2(G_3 - G_2) + y_1G_2 + (y_0 - y1)G_1 + (1 - y_0)G_0$$
$$\langle Y \rangle = -(1 - \alpha)y_2 - \alpha 2y_2{}^2 + (1 + \alpha)y_1y_2 + (1 - \alpha)y_1 - (1 + \alpha)(2 - \alpha)y_1{}^2/2$$

Решение для [0,1] игры #11 (пример 17.3, разрешен чек/рейз, в банке осталось две ставки) будет совпадать с решением для игры без фолдов. Можно доказать, что игрок X безразличен к чек/рейзу и бет/коллу в области [0, y_2], тогда цена игры из примера 17.3 будет считаться по той же формуле, что и в игре #10 (но с другими значениями y_1 и y_2). В результате мы получим еще меньшее ожидание для игрока Y.

Пожалуй, здесь нам стоит прерваться, поскольку процесс определения цены игр уже должен казаться вам вполне рутинным делом, а методы, которые мы описали выше, помогут вам найти ожидание для любой другой [0,1] игры.

Уроки [0,1] игр

Теперь давайте перейдем от сухих цифр к осмыслению полученных результатов. График ниже отражает некоторые зависимости между рассмотренными выше играми:

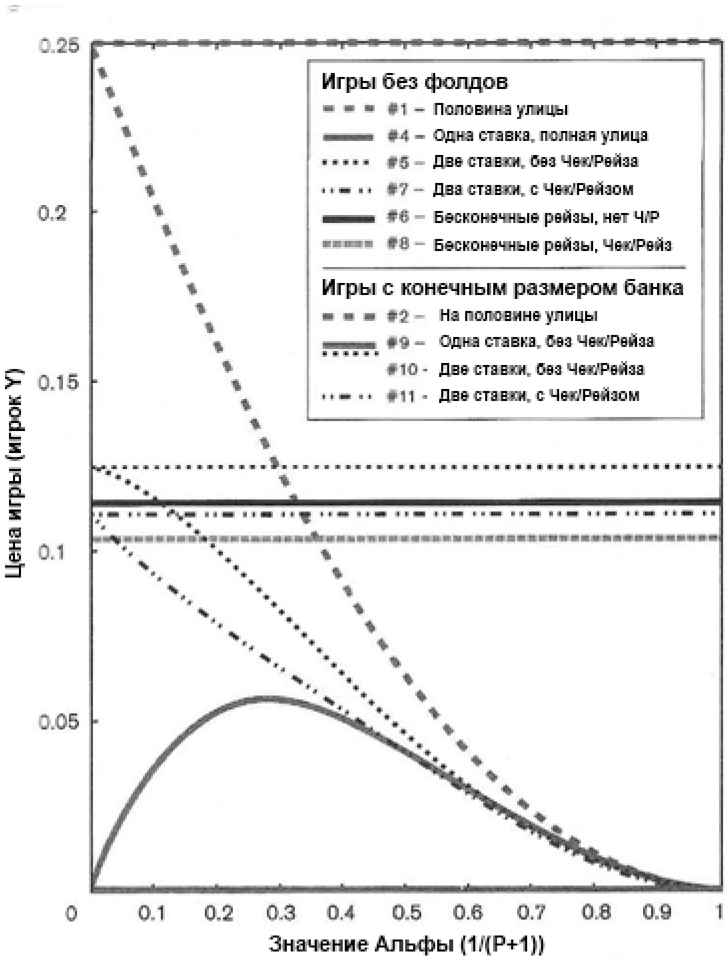


Рисунок18.6. Цена игры для различных [0,1] игр

Как вы могли заметить, некоторые игры оказываются лишь частными случаями своих более сложных аналогов. Так, например, игра #1 – ни что иное как производная игры #2. Действительно, если в последней мы сделаем банк бесконечно большим, то получим условия, стратегию, а также цену (равную нулю) для игры #1. Подобная зависимость наблюдается между всеми играми без фолдов и советующими им аналогам с конечным размером банка.

Кроме того, мы можем вывести некоторые новые игры просто добавляя стратегические альтернативы к старым. Например, игра #7 идентична игре #5, однако в ней игрок X получает возможность делать чек/рейз. И если мы сравним ожидания игроков в каждом из этих случаев, то еще раз убедимся в аксиоме, рассмотренной нами в самом начале этого раздела книги:

Стратегические альтернативы обладают неотрицательной ценностью.

Возьмем, к примеру, игры на половине улицы #1 и #2. В последней мы разрешили игрок X делать фолд на ставку оппонента, тем самым дав ему новый стратегический выбор. Это сразу же нашло отражение в цене игры (то есть в ожидании игрока Y) – она уменьшилась. То же самое мы могли наблюдать и для следующих пар:

Игра #1 и игра #4, где игрок X получил возможность делать ставку.
Игра #4 и игра #5, где игрок Y получил возможность делать рейз.
Игра #5 и игра #6, где игрок X получил возможность делать ре-рейз.
Игра #5 и игра #7, где игрок X получил возможность делать чек/рейз.

Во всех этих случаях игрок, который получил новую стратегическую возможность, увеличивал свой ожидаемый выигрыш.

Вторая интересная зависимость проявляется в коэффициенте r в [0,1] играх. В реальном покере его значение будет изменяться под влиянием блокеров, игры на нескольких улицах и т.п. Однако идея о том, что вы должны делать на ривере рейз примерно с 41% от диапазона ставки оппонента, еще не раз пригодится вам за столами.

Рассмотрим следующую игру. Пусть ваш друг предложил сыграть в разновидность Холдема, где каждый игрок получает по две карты, затем сдаются все три улицы, и на последней из них можно делать ставки. Игрок Y может либо поставить, либо дойти до шоудауна, а игрок X, в свою очередь, может сделать чек/рейз, причем количество рейзов в последнем случае ничем не ограничено. Тогда оптимальная стратегия для такой игры будет выглядеть примерно следующим образом: один игрок поставит с r своих рук, его оппонент сделает рейз с r^2 рук, на что получит ре-рейз с r^3 и так далее. Предположим, что на столе лежат J♥ 9♣ 8♠ 3♦ 2♣. У каждого из участников раздачи может оказаться одна из 1 081 рук.

Рука	**Комбинации**	**Сумма**
QT	16	16
T7	16	32
JJ, 99, 88, 33, 22	30	62
J9, J8	18	80
J3 или две пары хуже	72	152
AJ, KJ, QJ	36	188
JT, J7, J4	60	248
A9-Q9, T9, 97-94	96	344
A9-Q9, T9, 97-94	96	440
Остальные руки	641	1081

$(1081)r \approx 448$
$(1081)r^2 \approx 185$
$(1081)r^3 \approx 77$
$(1081)r^4 \approx 32$
$(1081)r^5 \approx 13$

Однако чтобы найти настоящую оптимальную стратегию для этой игры, нам потребовалось бы учесть все блокеры, неравномерно распределенные руки и т.п. И конечно же, мы никогда не откажемся от рейзов с натсами.

С другой стороны, найденные нами приблизительные пороги говорят о следующем: первую ставку мы можем делать с любой третьей парой и лучше, вторую – с QJ и лучше, третью – с лучшими двумя парами, четвертую – со вторым натсом, пятую – только с натсом.

Можем ли мы использовать эти результаты в покере? Не совсем, поскольку действия на предыдущих улицах и вытекающие из них диапазоны меняют распределение рук на ривере. Но правило 41% (если ваш оппонент не может сделать фолд – например, банк уже слишком большой) является вполне приемлемым ориентиром. В играх, где оппоненты имеют возможность скидывать свои карты, нам придется скорректировать эту цифру до 35% или около того (поскольку мы еще получаем рейз от натсов, но фолд от слабейших комбинаций).

Стоит отметить, что этот пример не только показывает как можно применять коэффициент *r* за покерным столом, но и затрагивает, возможно, самый главный урок в [0,1] играх. Все это время мы разделяли диапазоны участников игры на различные зоны чистых стратегий, где на порогах мы наблюдали безразличие к выбору конкретного действия.

В наших расчетах цены игры мы полагали, что стратегия игрока Y не изменится. Причем как оказалось, в большинстве вэлью областей игрок X был безразличен к выбору линии розыгрыша. Иными словами, даже если игрок Y следует оптимальной стратегии, его оппонент может играть по стратегии, которая несколько отличается от оптимальной (при этом ничего не теряя). Мы называем такие стратегии ***гибкими***.

В то же время, если игрок X следует оптимальной стратегии, то игрок Y не имеет права делать ошибки – даже если он решит не ставить с руками чуть лучше, чем y_1, он сразу потеряет в ожидании. Такие стратегии мы будем называть ***строгими***. Как правило, стратегии игрока X в [0,1] играх будут гибкими, поскольку даже если он забудет поставить с руками чуть лучше, чем его порог для ставки, игрок Y зачастую сделает бет сам (причем с широким диапазоном). Очевидно, что если игрок Y сделает такую же ошибку, то за него никто деньги в банк внести не сможет.

Если вы оказались на месте игрока, чья стратегия обязана быть строгой (что часто случается для всех участников раздачи в реальном покере), то чтобы играть оптимально вам придется очень серьезно подойти к выбору диапазонов для каждой линии. Например, на ривере стоит определиться с границами каждой из областей, подумать о том, что вы собираетесь делать в ответ на рейз, а также сколько ставок вы хотите сделать банк со своими сильными руками.

Кроме того, строгие стратегии предполагают, что зачастую мы не будем играть по смешанным стратегиям с отдельными руками – такое будет случаться только на порогах, разделяющих области чистой стратегии. Однако, как правило, мы будем играть близкие по силе руки в схожей манере.

Также стоит отметить, что в стратегиях для [0,1] игр с конечным размером банка некоторые пороги существуют исключительно для балансировки диапазона. Например, каждому вэлью бету должно соответствовать определенное количество блефов, а также рук, с которыми мы сделаем колл или фолд в ответ на рейз. Такая логика не раз придет вам на помощь за покерным столом. Начните с определения своего диапазона вэлью бетов. Затем подумайте, каким должен быть диапазон блефа в этой ситуации. Как часто вам следует блефовать? Насколько оптимально соотношение ваших блефов и вэлью бетов? А если вы делаете рейз, вы когда-либо блефуете? С какими руками? Подобная цепочка рассуждений позволит вам сформировать сбалансированную стратегию, которую очень сложно эксплуатировать.

В заключение этой главы мы рассмотрим последнюю [0,1] игру в книге, которая открывает интересную особенность Хай-Лоу игр.

Пример 18.1 - [0,1] *x* [0,1] игра

В этой вариации [0,1] игр каждый участник получает два случайных числа (абсолютно не связанных между собой) из равномерно распределенного диапазона от 0 до 1. Первое число означает его «Хай» руку, второе – «Лоу». Правила этой игры во многом повторяют таковые для обычных [0,1] игр: сильнейшими считаются руки, которые ближе всего к нулю, причем лучшая «Хай» рука выиграет только половину банка, а лучшая «Лоу» - другую половину.

Руку каждого из игроков мы будем обозначать через *(x, y)*, где *x* и y находятся на интервале от 0 до 1.

В этой игре ни один из участников не может скинуть свои «карты», чек/рейз делать нельзя, однако игрок X может делать бет, а его оппонент в праве ответить рейзом. И поскольку это игра без фолдов, размер банка не имеет никакого значения.

Интересно, что большую часть ставок в этой игре будут составлять ***полублефы*** – в этой главе мы еще ни разу не говорили о них. Такие ставки делаются в надежде выиграть половину банка в случае колла, и являются очень популярными в Хай-Лоу играх (хотя также встречаются и в Холдеме, например, бет с тузом старшим на дважды спаренной доске – здесь в случае колла от другого туза мы выиграем ровно половину банка).

Одним из способов анализа такой игры является графическое изображение всех возможных пар x и y. Причем вместо единичных порогов мы будем рассматривать линии-границы, заключающие в себе диапазон рук для некоего действия. Введем следующую параметризацию: пусть существуют три кривых, x_1, y_1; и y_2 (по аналогии с [0,1] игрой #5), мы будем говорить, что рука находится «под» кривой, если она ближе к (0,0) и «над» кривой – если ближе к (1,1). Кривые находятся в следующем соотношении:

$$(0, 0) < y_1 < x_1 < y_2 < (1, 1)$$

Каждой из этих кривых будет соответствовать свое уравнение безразличия, однако вывести их будет несколько сложнее. Так, мы начнем с определения стратегии игрока X, затем найдем на ее основе стратегию игрока Y, и в конце попробуем доказать (путем изменения отдельных частей стратегии), что стратегия для игрока X действительно является оптимальной.

Предположим, что кривая x_1 задается уравнением $y = 1 - x$. Здесь мы используем аналогию с [0,1] игрой без фолдов, где порог x_1 составлял $^1/_2$.

Примечание от переводчика: Линия, заданная этим уравнением делит всю область определения игры (то есть область возможных рук) пополам.

Теперь давайте рассмотрим границу y_2. Игрок Y должен быть безразличен между коллом (с руками над y_2) и рейзом (под y_2). Следующий шаг – определение областей, где один из игроков имеет положительное ожидание. Очевидно, что во многих случаях банк будет просто поделен, и ожидание каждого из участников будет равно нулю. Для любой точки (x, y) на кривой y_2:

Когда рука игрока X находится в области, заданной точками $\{(0, 0), (0, y), (x, 0), (x, y)\}$, игрок Y теряет одну ставку делая колл, но две, если сделает рейз. Это единственная область, где игрок X выигрывает у своего оппонента. В свою очередь, игрок Y выиграет банк у оппонента в области, ограниченной следующими точками: $\{(x, 1 - x), (1 - y, y), (x, y)\}$.

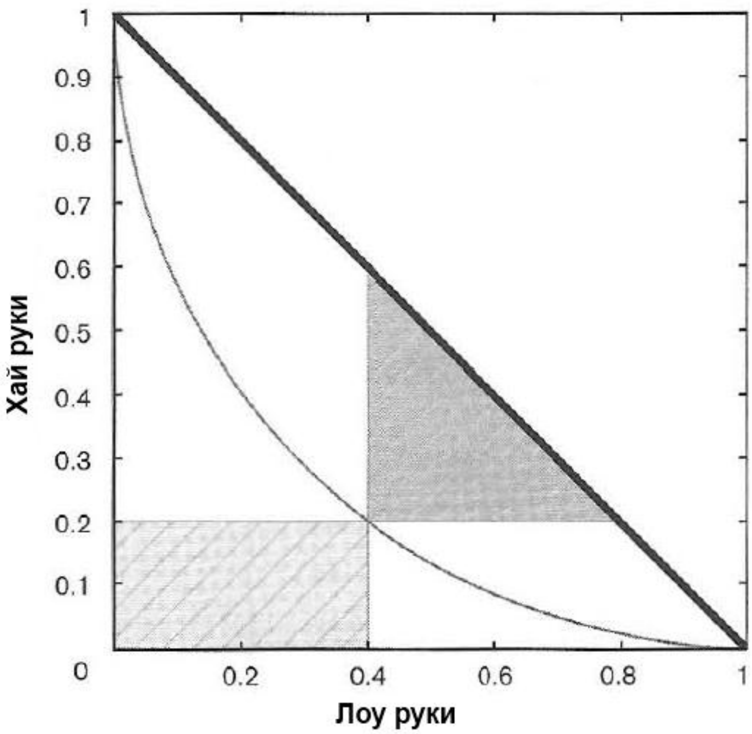


Рисунок 18.7. Графическое представление стратегий для [0,1] x [0,1] игры

Уравниваем площади этих двух областей, получим:

Примечание от переводчика: Слева находится площадь прямоугольника, справа – площадь прямоугольного треугольника.

$xy = {}^1\!/_2\ (1 - y - x)\ (1 - x - y)$
$2xy = 1 - y - x - y + xy + y^2 - x - x^2 + xy$
$1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
$1 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

Искушенные в алгебре читатели естественно заметят, что мы получили формулу для круга с радиусом 1 и центром в (1, 1). Таким образом, кривя y_2 равна четверти этого круга.

Вернемся к y_1 и рассмотрим безразличие игрока Y между чеком и бетом. Он выиграет одну ставку, если сделает бет против руки игрока X из области, ограниченной {(1, 1), (1, y), (x, 1), (x, y)} и проиграет одну ставку, если рука его оппонент попадет в треугольник {(x, y), (x, 1 - x), (y, 1 - y)}.

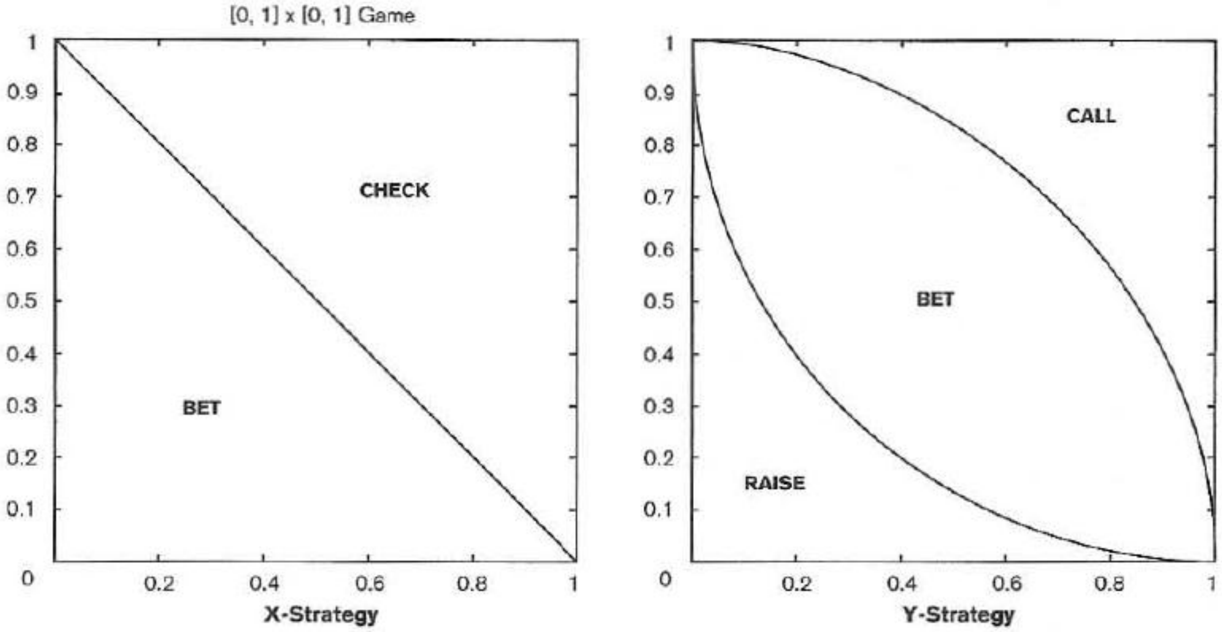
Снова приравниваем площади двух областей:

$(1 - x)(1 - y) = {}^1\!/_2\ (y - (1 - x))(x- (1 -y))$
$1 - x - y + xy = {}^1\!/_2(y- 1 + x)^2$
$1- x - y + xy = {}^1\!/_2\ (y^2 - y + xy - y + 1 - x + xy - x+ x^2)$

$$2 - 2_x - 2_y + 2_{xy} = y^2 - 2y + 2xy - 2x + x^2 + 1$$

$$1 = y^2 + x^2$$

Имеем уравнение для круга с радиусом 1 и центром в (0,0). График стратегий обоих игроков напоминает мяч для регби, с центром на линии $y = 1 - x$.



Самое время обратиться к кривой x_1 и доказать, что она действительно задается уравнением $y = 1 - x$. На всем протяжении этой кривой игрок X должен быть безразличным к чеку и бету. Причем он потеряет на одну ставку меньше, если сделает чек (а не бет) когда у его оппонента оказывается рука ниже y_2, ведь в таком случае он не получит рейз. С другой стороны, если он не поставит, то потеряет вэлью против рук выше y_1. А для всех рук в области между y_1 и y_2 ожидаемый выигрыш будет равен нулю, поскольку банк будет поделен между игроками поровну.

Как мы уже знаем, размер областей бета и чека для игрока X должен быть одинаковым, а линия, идущая из точки (0, 1) в (1, 0) как раз делит область определения игры пополам. Значит, порог x_1 действительно описывается уравнением $y = 1 - x$.

Итак, если мы имеем дело с Хай-Лоу игрой с двумя оставшимися ставками, без фолдов, без блокеров, без чек/рейза, то игрок Y должен ставить с $\pi/4$ своих рук!

Условия этой игры действительно могут показаться несколько надуманными. С другой стороны, они и не претендует на звание точной модели Хай-Лоу игр. Однако практическое применение у полученной модели все же имеется – в некоторых играх, например в Хай-Лоу Стаде, мы иногда оказываемся в положении, где фолд делать нельзя, поскольку на седьмой улице велика вероятность того, что у оппонента окажется только одна хорошая рука (Хай или Лоу). И в этом случае мы должны ставить значительно чаще, чем многие привыкли думать.

Нужно запомнить

……………………………………………………………………………………………..

- Сравнение математического ожидания от различных игр позволяет лучше оценить значимость различных идей и линий.

……………………………………………………………………………………………..

- Появление новой стратегической возможности у одного из игроков увеличивает его математическое ожидание.

……………………………………………………………………………………………..

- Когда мы пытаемся оценить ожидание от игры, зачастую мы можем считать, что стратегия одного из игроков останется неизменной, а затем выбрать в стратегии его оппонента такие линии, которые бы упростили наши вычисления.

……………………………………………………………………………………………..

- Некоторые стратегии называются строгими, поскольку для них даже незначительные отклонения от оптимальных линий оборачиваются существенными потерями в ожидаемом выигрыше. Существуют также и гибкие стратегии – они могут отклоняться от оптимальных линий без ущерба для своего математического ожидания.

……………………………………………………………………………………………..

Глава 19

На пути к покеру: Статичные игры на нескольких улицах

В предыдущих главах мы рассмотрели больше количество игр на половине и на полной улице. Одно из главных достоинств таких примеров заключается в том, что они относительно просты для решения, а значит, могут помочь нам в понимании последствий изменения определенных аспектов игры. Однако настоящей покер редко ограничивается половиной или даже одной полной улицей. Как мы покажем в этой и следующих главах, добавление дополнительных улиц в корне меняет стратегии игроков.

Мы начинаем с анализа ***статичных*** игр. В них существует несколько улиц торговли, однако сила рук обоих участников остается неизменной. Эти игры позволят нам показать, как работают блефы на нескольких улицах, без излишнего усложнения рассматриваемых задач (например, дро существенно затрудняют анализ подобных ситуаций). Как только мы разберемся с парой простых примеров, мы перейдем к решению более сложных и реалистичных игр, в которых присутствуют руки-дро.

Самой элементарной статичной игрой на двух улицах является игра против ясновидящего – подход к ее решению чем-то напоминает таковой для игр на половине и полной улице.

Пример 19.1 – Статичная игра с ясновидящим на двух улицах

- Две полные улицы.
- Сила рук остается неизменной
- Размер банка – P единиц
- Размер ставки – одна единица
- Игрок Y ясновидящий

Вспомним, что в игре с ясновидящим на одной улице игрок X никогда не делал бет, потому что такие ставки всегда имели отрицательное математическое ожидание. Действительно, раз игрок Y был ясновидящим (и видел все карты), он мог эксплуатировать любую ставку своего оппонента.

То же самое повторяется и в этой игре. Игрок X будет вынужден либо делать чек и колл, либо чек и фолд. Здесь это происходит только потому, что наша игра статична, то есть, игрок Y знает, какая рука у него окажется в конце раздачи. Однако если бы здесь присутствовали дро, и игрок Y не знал, чем все закончится, то у его оппонента появилась бы возможность делать ставки на вэлью.

В игре с ясновидящим на одной улице мы вычислили, что игрок Y должен ставить со всеми натсам и блефовать с α своих слабых рук. В свою очередь, игроку X следовало скидывать α рук, способных побить блеф и уравнивать с остальными.

В игре на двух улицах появляется еще одна улица для ставки. Значит, оба игрока получают дополнительные стратегические возможности. Так, игрок Y теперь может:

- Сделать чек на двух улицах (стратегия Y_0)
- Сделать чек на первой улице и поставить на второй (стратегия Y_1)
- Поставить на первой улице, но сделать чек на второй (равносильно стратегии Y_1)
- Поставить на двух улицах (стратегия Y_2)

Очевидно, что игрок Y предпочтет поставить на обеих улицах с натсами, поскольку так он сможет максимизировать свое ожидание. Диапазон для стратегий Y_0 и Y_1 будет состоять в основном из блефов, плюс какая-то часть рук, которые желательно разыгрывать по стратегии Y_2. Также игроку Y стоит предпочитать второй вариант Y_1, по которому он делает бет, а затем чек. Вполне понятно, что его чек на первой улице часто скажет игроку X о том, что у его оппонента натса нет.

Игрок X должен сделать мертвые руки игрока Y безразличными между этими тремя линиями. Для этого он может использовать следующие стратегии:

- Фолд на первой улице (стратегия X_0)
- Колл на первой улице, но фолд на второй (стратегия X_1)
- Колл на двух улицах (стратегия X_2)

Получаем следующую платежную матрицу (ожидание игрока Y):

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	$+P$	-1	-1
Y_2 **(блеф)**	$+P$	$+ (P + 1)$	-2
Y_2 **(вэлью)**	0	+1	+2

В стратегии Y_2, мы будем называть диапазон натсов y_v, а диапазон блефов - y_b. Также, частота использования стратегий для игрока X будет обозначаться через переменные x_0, x_1 и x_2, а для игрока Y – через y_0, y_1 и y_2.

В результате получаем следующее безразличие между Y_1 и Y_0.

$$0 = Px_0 - x_1 - x_2$$

Мы знаем, что $x_1 + x_2 = 1 - x_0$ (вполне очевидно, что частота использования всех стратегий не может быть больше 100%). Тогда:

$$0 = 1 - x_0 - Px_0$$
$$x_0 = 1/(1 + P) = \alpha$$

На первой улице игрок X должен прибегнуть к той же самой стратегии, что и в игре на половине улицы – фолд с α рук, колл с остальными.

Безразличие между Y_1 и Y_2 (блеф):

$$\alpha P - x_1 - x_2 \alpha = \alpha P + (P + 1)x_1 - 2x_2$$
$$(P + 2)x_1 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1 - \alpha, \text{ поэтому}$$

$$1 - \alpha - x_1 = (P + 2)x_1$$
$$x_1 = \alpha_2 (1- \alpha)$$

На второй улице игрок X также будет играть в схожем ключе. После того как он выкинет α своих рук на первой улице, весь его диапазон составит (1 – α). Однако размер банка увеличился на две единицы, поэтому на второй улице он должен делать фолд с α_2 оставших рук. На самом деле, это очень важная идея:

Неясновидящий игрок может рассматривать каждую улицу в отдельности, как если бы игра велась не на нескольких, а на одной улице.

Теперь, рассмотрим стратегии для игрока Y. Он должен сделать оппонента безразличным к выбору между тремя стратегиями: x_0, x_1 и x_2. Между X_0 и X_1 имеем следующее уравнение безразличия:

$$Py_1 + Py_b y_2 = -y_1 + (P + 1)\, y_b y_2 + y_v y_2$$
$$(P + 1)\, y_1 = y_v y_2 + y_b y_2$$
$$y_1 = \alpha y_2$$

Здесь мы сталкиваемся со вторым важным выводом в этой игре:

Руки, с которыми игрок Y блефует на первой улице, а потом сдается на второй, находятся в соотношении α с руками, с которыми он ставит (на вэлью или блеф) на второй улице.

Далее, безразличие между X_1 и X_2:

$$-y_1 + (P + 1)\, y_b y_2 + y_v y_2 = -y_1 - 2y_b y_2 + 2\, y_v y_2$$
$$y_v y_2 = (P + 3) y_b y_2$$
$$y_b = \alpha_2 y_v$$

Таким образом, на второй улице у игрока Y ставки на вэлью и блефы находятся в стандартном соотношении (здесь мы уже говорим только об оставшихся руках). И снова мы заменяем коэффициент на α_2, из-за возросшего размера банка.

Давайте еще раз повторим вышесказанное, это важно. На последней улице у игрока Y окажутся диапазоны натсов и блефов, составленные в соответствии с текущим размером банка. Однако эти диапазоны он определяет еще на первой улице, причем они находятся в зависимости от частоты его ставки в последнем раунде торговли. Это приводит к тому, что игрок Y вынужден блефовать чаще, чем в играх на одной улице.

Пусть банк составляет 2 единицы на первой улице, при этом диапазон натсов игрока Y ограничен. Тогда на второй улице в банке окажется 4 единицы – здесь игрок Y должен будет ставить с натсами, а также блефами (в количестве $^1/_5$ от натсов). Как ему получить такой диапазон? Он должен представить, что весь его диапазон для ставки на второй улице – это «вэлью руки» на первой улице, с которыми он всегда сделает бет.

Поскольку банк на первой улице составляет 2 единицы, он должен будет ставить со всеми «вэлью руками», а также блефовать с третью этого диапазона. Как мы только что определили, «вэлью диапазон» игрока Y на первой улице будет равен $^6/_5$ (все натсы, плюс $^1/_5$ блефов), значит, он должен будет блефовать с $^2/_5$ настоящих натсов, но сдаваться с ними на следующей улице. Таким образом, общее количество мертвых рук, с которыми игрок Y будет ставить на первой улице, составит $^3/_5$ от его натсов.

Примечание от переводчика: Фактически, авторы говорят следующее. На второй улице мы должны блефовать достаточно часто. Однако блефовать мы должны и на первой улице. Как нам структурировать свой диапазон таким образом, чтобы на каждой улице у нас оказывалось достаточное количество блефов, но при этом и нужное количество натсов?

Самый очевидный выход – мы считаем, что весь наш диапазон для ставки на второй улице (и блефы, и натсы) это «вэлью руки» на первой улице. Значит, если мы всегда с ними будем ставить, то на второй улице у нас окажется именно тот диапазон, который нам нужен для оптимальной игры.

Но мы не должны забывать и про блеф на первой улице. Мы уже определились, что точно поставим с «вэлью рукам», так как этот диапазон нам нужен на второй улице. Осталось только определить, как часто нужно ставить с блефами на первой. Коэффициент a подскажет, что блефовать мы должны с третью «вэлью рук» (банк все еще равен двум единицам).

Пусть "z" – наш диапазон настоящих натсов (которые мы ставим на вэлью на второй улице). Тогда диапазон блефа на второй улице составляет пятую часть "z". Сумму этих диапазонов мы назвали «вэлью руками» для первой улицы, она равна $^6/_5$*z. Теперь мы ищем число рук, с которыми должны блефовать на первой улице. Умножаем* $^6/_5$*z на* $^1/_3$ *и получаем* $^2/_5$*z. Это значит, что на первой улице мы должны ставить с* $^2/_5$ *настоящих натсов.*

Итого. Игрок Y будет блефовать с $^2/_5$ *натсов на первой улице, и с* $^1/_5$ *на второй, однако последний диапазон уже включен в «вэлью руки» на первой улице. Значит, в целом он начинает блефовать чаще!*

Вы можете заметить: «Но зачем усложнять себе жизнь? Разве я не могу ставить на флопе чуть чаще, не объединяя диапазоны?» Нет, поскольку все наши блефы и вэлью беты должны находиться в соотношении a, что и показано в уравнениях безразличия.

После того, как он поставит с таким диапазоном на первой улице, он должен сдаться с $^2/_3$ своих мертвых рук на второй (согласно уже известному нам уравнению 1 – *a*). В итоге получаем диапазон блефа на второй улице равный именно $^1/_5$ натсов. Игрок X никак не может эксплуатировать такую стратегию – мы уже показали выше, что он безразличен ко всем своим стратегическим возможностям.

Этот результат может быть обобщен для любого количества улиц и любых размеров ставок.

Теперь давайте представим, что мы играем в следующую игру:

- Игроки ставят анте по 2 единицы каждый
- Оба игрока получают некие руки, причем игрок Y знает руку оппонента
- Сдается полная доска, но видит ее только игрок Y
- Диапазон игрока Y состоит наполовину из натсов, наполовину из блефов
- В игре присутствуют три улицы торговли, на флопе ставки по одной единице, на терне и ривере по две
- На вскрытии выигрывает лучшая рука

В этой игре ожидание от ставки для игрока X будет отрицательным на всех улицах. Более того, решение здесь ничем не отличается от случая с двумя ставками, мы лишь сделаем поправки на дополнительную улицу и новые правила бетсайзинга.

Размер банка к риверу составит 4 + 2 + 4 = 10 единиц, а размер ставки будет равен 2. На ривере игрок Y сделает бет на вэлью со всеми натсами, которые составляют половину от всех его рук, а также на блеф с $^2/_{12}$ от этого диапазона (или $^1/_{12}$ от всех рук). Таким образом, общий диапазон для ставки на ривере составит $^7/_{12}$.

На терне, банк равен 6 единицам, размер ставки - 2. Диапазон «вэлью рук» игрока Y составит $^7/_{12}$ от числа всех его возможных рук, плюс он поставит на блеф с четвертью от «вэлью рук». Иными словами, на терне он должен будет сделать бет с $^{35}/_{48}$ от стартовых комбинаций.

На флопе банк равен 4 единицам, ставки по 1 единице. И снова игрок Y будет иметь диапазон «вэлью рук» размером в $^{35}/_{48}$, плюс пятую часть от этого диапазона он должен будет поставить на блеф. Значит, на флопе он будет ставить с $^{42}/_{48}$ (или $^7/_8$) от своего стартового диапазона.

Решение для этой игры выглядит следующим образом: игрок Y ставит с $^7/_8$ рук на флопе, сдается с $^1/_{12}$ после флопа и с $^7/_{48}$ после терна (то есть с частью блефов). Игрок X же просто падает с α от своих рук на каждой улице. Цену этой игры можно легко определить, представив, что игрок X скидывает уже на флопе (поскольку он безразличен к выбору действия). В одном случае из восьми он заберет банк, что делает ожидание его оппонента равным 1.5 единицам. На самом деле, удивительно, что у игрока X есть хоть какой-то шанс вернуть малую часть своих денег в такой «нечестной» игре.

Как мы уже говорили, этот алгоритм решения распространяется на игры с любыми размерами ставок. В тех из них, где ясновидящий диктует еще и бетсайзинг (например, в безлимитном Холдеме), мы можем воспользоваться принципом максимизации ожидания, рассмотренным в прошлых главах.

Пример 19.2 – Статичная безлимитная игра с ясновидящим на двух улицах

- Две полные улицы.
- Сила рук остается неизменной
- Размер банка – 1 единица
- Размер стэков – N единиц
- Ставки произвольного размера
- Игрок Y ясновидящий

Сначала мы обратимся к игре на двух улицах; однако сам принцип решения может быть применен и к случаям с произвольным количеством улиц.

В предыдущем примере мы видели, что неясновидящий игрок играет на каждой улице так, как если бы это была отдельная игра на одной улице, делая фолд с α своих рук и уравнивая с остальными. В свою очередь, ясновидящий использует коэффициент α, чтобы правильно составить свои диапазоны на нескольких улицах одновременно.

Эти зависимости сохраняются даже когда размеры ставок могут быть заданы ясновидящим игроком. Чтобы найти оптимальную стратегию, нам потребуется лишь выразить ожидание ясновидящего игрока через s_1 и s_2 (бетсайзинг на первой и второй улицах), а затем найти максимум полученной функции. При банке в одну единицу имеем следующую матрицу выплат:

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	+1	$-s_1$	$-s_1$
Y_2 **(блеф)**	+1	$+(1 + s_1)$	$-(s_1 + s_2)$
Y_2 **(вэлью)**	0	$+s_1$	$+(s_1 + s_2)$

Используем ту же модель для уравнений безразличия, что и в прошлой игре:

$$x_0 - s_1x_1 - s_1x_2 = 0$$
$$x_0 = s_1(1 - x_0)$$
$$x_0 = s_1/(1 + s_1)$$

И снова игрок X вынужден скидывать α своих рук. Здесь α = $s/(1 + s)$, ведь размеры ставок не заданы заранее.

$$x_0 + (1 + s_1)x_1 - (s_1 + s_2)x_2 = x_0 - s_1x_1 - s_1x_2$$
$$(1 + 2s_1)x_1 = s_2x_2$$
$$x_2 = x_2\ (1 + 2s_1)/s_2$$
$$x_2 + x_1 = x_1(1 + 2s_1 + s_2)/s_2$$

Чему равно α_2 в этой игре?

После первой улицы размер банка будет равен 1 + 2s_1. Тогда α_2 составит $s_2/(1 + 2s_1 + s_2)$. Подставляя это в уравнение, полученное выше, получаем:

$$x_2 + x_1 = x_1 / \alpha_2$$
$$x_1 = \alpha_2(x_2 + x_1)$$

Мы уже сталкивались с этим ответом выше. Игрок X должен рассматривать каждую улицу в отдельности и руководствоваться лишь соответствующим значением α. Так, на вторую ставку он должен скинуть α_2 от рук, которые уравнивают первую ($x_2 + x_1$).

Безразличия для игрока X также мало чем отличаются от лимитного случая:

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	+1	$-s_1$	$-s_1$
Y_2 **(блеф)**	+1	$+(1 + s_1)$	$-(s_1 + s_2)$
Y_2 **(вэлью)**	0	$+s_1$	$+(s_1 + s_2)$

$$y_1 + y_2y_b = -s_1y_1 + (1 + s_1)\, y_2y_b + s_1y_2y_v$$
$$(1 + s_1)\, y_1 = s_1y_2y_b + s_1y_2y_v$$
$$y_1 = y_2s_1/(1 + s_1)$$
$$y_1 = \alpha y_2$$

Как и раньше, количество рук, с которыми игрок Y блефует один раз равно α от общего диапазона ставки на второй улице.

$$-s_1y_1 + (1 + s_1)y_2y_b + s_1y_2y_v = -s_1y_1 - (s_1 + s_2)y_2y_b + (s_1 + s_2)y_2y_v$$
$$(1 + s_1)y_2y_b + s_1y_2y_v = -(s_1 + s_2)y_2y_b + (s_1 + s_2)y_2y_v$$
$$(1 + 2s_1 + s_2)y_2y_b = s_2y_2y_v$$
$$(1 + 2s_1 + s_2)y_b = s_2y_v$$
$$y_b = \alpha_2y_v$$

Получается, что это решение подходит для любых размеров ставок (при условии, что диапазоны участников не слишком сильны). Чтобы определить оптимальные размеры s_1 и s_2, нам нужно найти максимум для функции ожидаемого выигрыша игрока Y.

Здесь мы можем прибегнуть к интересному упрощению, которое также поможет нам в понимании принципа выбора оптимального бетсайзинга. Предположим, что игрок Y ставит s_1 в банк 1. Если оппонент уравняет, то банк увеличится с 1 до (1 +

$2s_1$). Пусть r_1 – коэффициент, задающий отношение нового банка к старому в случае колла ставки s_1. То же самое касается и r_2, но уже для ставки s_2.

$$r_n = (p_n + 2s_n)/p_n$$

Естественно, рассматриваемое здесь r не имеет ничего общего с коэффициентом рейзов из уравнения 14.1.

Как следует из приведенного выше определения, для любой улицы верно следующее:

$$r = 1 + 2s$$
(если в начале улицы размер банка равен 1)

Вычтем из обоих частей уравнения s, получим:

$$r - s = 1 + 2s - s$$
$$r - s = 1 + s$$
$$r - s = (2 + 2s)/2$$
$$r - s = (1 + r)/2$$

Также верно будет и следующее

$$\alpha = s/(1 + s)$$
$$\alpha = s/(r - s)$$

Примечание от переводчика: Это уравнение получилось следующим образом.

$$r = 1 + 2s$$
$$r = 1 + s + s$$
$$r - s = 1 + s$$

Делаем замену, получаем требуемую модификацию α.

Пусть величина M_n выражает размер диапазона «вэлью рук», будь то ривер (где мы имеем ввиду натсы) или одна из ранних улиц торговли (где имеется ввиду комбинация блефов и натсов). На любой улице количество рук, с которыми мы будем делать бет (на вэлью или блеф) будет равно (B_n):

$$B_n = s_n M_n/(r_n - s_n) + M_n$$
$$B_n = M_n(r_n - s_n + s_n)/(r_n - s_n)$$
$$B_n = M_n r_n/ (r_n - s_n)$$
$$B_n = 2M_n r_n/(1 + r_n)$$

Это очень важное уравнение. Фактически, здесь мы нашли множитель, который можем применять на любой улице, чтобы найти диапазон для блефа.

Так, на второй улице нашей игры весь диапазон для ставки составляет (пусть у игрока Y диапазон натсов равен *y*):

$$B_2 = 2yr_2/(1 + r_2)$$

В то же время диапазон для ставки на первой улице будет выглядеть следующим образом:

$$B_1 = 2B_2r_1/(1 + r_1)$$
$$B_1 = 4yr_1r_2/(1 + r_1)(1 + r_2)$$

Давайте еще раз пройдемся по всем выкладкам и выведем нужным нам ответ.

Мы определили r_n как отношение размера банка после ставки и колла на текущей улице к размеру банка до нее.

Мы составили уравнение, которое позволяет нам выразить общий диапазон для ставки (с блефами и вэлью бетами) на любой улице:

$$B_n = 2M_nr_n/(1 + r_n)$$

Здесь M_n – это количество рук, с которыми будет сделана ставка на следующей улице (если таковые остались), или количество натсовых рук (если мы находимся на последней улице).

Если игрок Y ставит s_1 и s_2 с оптимальной частотой, то игроку X будет безразлично, что делать на любой из улиц: колл или фолд. Однако не стоит рассчитывать на то, что игрок X просто скинет свои руки, и его оппонент заберет банк с блефами. Наоборот, игрок X будет стараться играть по оптимальной стратегии, которая предусматривает и коллы. Значит, игрок Y будет стараться поставить в банк как можно больше денег с натсами (следовательно, и с блефами). Тогда сумма s_1 и s_2 должна быть равна всему стэку игрока Y, то есть N.

Пусть игрок X никогда не скидывает свою руку (поскольку он безразличен к выбору действия, такое упрощение уместно). Поскольку $s_1 + s_2 = N$ в любом случае, игрок Y получит наивысшее ожидание, если максимизирует свой диапазон для ставки.

Общее количество рук, с которыми игрок Y поставит:

$$B_1 = 4yr_1r_2/(1 + r_1)(1 + r_2)$$

Очевидно, что 4y это константа, поэтому нам нужно найти максимум для следующего выражения:

$$r_1r_2/(1 + r_1)(1 + r_2)$$

r_1r_2 также является константой (размеры стэков в раздаче, N, естественно, величина постоянная):

$$r_! = (1 + 2s_1)$$
$$r_2 = (1 + 2s_1 + 2s_2)/(1 + 2s_1)$$
$$r_2 = (1 + 2N)/(1 + 2s_1)$$
$$r_1r_2 = (1 + 2N)$$

То есть, теперь мы ищем максимум для:

$$1/(1 + r_1)(1 + r_2)$$

Мы знаем, что r_1 и r_2 положительны; следовательно, мы можем просто минимизировать знаменатель (тогда мы и получим максимальное значение этой дроби):

$$(1 + r_1)(1 + r_2) = 1 + r_1 + r_2 + r_1r_2$$
$$(1 + r_1)(1 + r_2) = 2 + 2N + r_1 + r_2$$

Не обращаем внимание на константы. Нам осталось найти минимум для ($r_1 + r_2$), при условии, что r_1r_2 является величиной постоянной. Оказывается, что это выражение достигает своего минимум только при $r_1 = r_2$.

На самом деле, этот ответ можно обобщить для произвольного количества улиц. Используя ту же логику, мы можем определить, что ожидание игрока Y в игре с тремя улицами составит:

$$B_1 = 8yr_1r_2r_3/(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)$$

Однако, если B_1 >= 1, тогда игроку Y будет не хватать блефов. В таком случае он должен будет поставить величину приращения банка. А игрок X, в свою очередь, будет вынужден скинуть со ***всеми*** руками.

Снова отбросим все константы, получим выражение $r_1 + r_2 + r_3$, которое нам нужно минимизировать, причем $r_1r_2r_3$ будет являться величиной постоянной. И снова эта сумма окажется минимальной при $r_1 = r_2 = r_3$.

Мы называем такую прогрессию ставок (на каждой улице банк увеличивается на одно и ту же часть) ***геометрическим ростом банка***. Эта идея очень важна для понимания бетсайзинга в безлимитном покере в целом.

Итак, когда мы имеем дело со статичной игрой и один из участников ясновидящий, оптимальная стратегия предполагает одинаковые приращения банка на каждой улице, причем в итоге мы должны поставить весь свой стэк в центр стола.

Ниже мы приведем небольшой пример, в котором хорошо видна разница между только что проанализированной стратегией (против оппонента, следующего оптимальной стратегии) и линией, что может подсказать вам интуиция.

Пример 19.3

- На начало раздачи стэки игроков X и Y составляют $185, анте по $5.
- Игроку Y сдается одна карта из полной колоды.
- Три улицы торговли, ставки без ограничений.
- На вскрытии игрок Y выигрывает только с A или K, проигрывает во всех остальных случаях.

Эта игра эквивалентна игре с ясновидящим, которую мы обсуждали ранее, однако в этом случае мы имеем дело с тремя улицами торговли.

Для начала, мы можем найти шоудаун вэлью, то есть ожидание игрока Y, если оба участника просто дойдут до вскрытия без ставок. Он будет выигрывать в $^2/_{13}$ случаев, значит, его ожидание без учета анте составит $1.54, однако если мы вычтем отсюда вложенные в банк деньги, то получим минус $3.46.

Чтобы сделать эту игру прибыльной, Y должен добавить к своему ожидаемому выигрышу $3.46 делая ставки на трех улицах. Давайте сравним ожидания от двух различных стратегий бетсайзинга:

$\mathcal{Y}_1$: Игрок Y ставит ровно треть своего стэка на каждой улице.
$\mathcal{Y}_2$: Игрок Y ставит согласно принципу геометрического приращения банка

Очевидно, для $\mathcal{Y}_1$ каждая ставка будет составлять $60. В стратегии $\mathcal{Y}_2$ мы можем использовать тот факт, что $10r_1r_2r_3 = 10r^3 = \$370$. Значит, r равняется кубическому корню из 37, или же 3,3322. Кроме того, На каждой улице $p_n + 2s_n = rp_n$

Улица #1:
$\$10 + 2s_1 = \$10r$
$s_1 = \$11.66$

Улица #2:
$\$33.32 + 2s_2 = \$33.32r$
$s_2 = \$38.86$

Улица #3:
$\$111.04 + 2s_3 = \$111.04r$
$s_3 = \$129.48$

Игрок X будет играть по оптимальной стратегии, уравнивая $p_n/(p_n + s_n)$ раз на каждой улице. Его ожидаемый выигрыш в таком случае составит:

Улица	**Ставка Y ($\mathcal{Y}_1$)**	**Частота колла X**	**Ставка Y ($\mathcal{Y}_2$)**	**Частота колла X**
1	$60	14.29%	$11.66	46.2%
2	$60	68.42% -> 9.77%	$38.86	46.2% -> 21.3%
3	$60	80.6% -> 7.88%	$129.48	46.2% -> 9.84%
Всего	**$60**	**7.88%**	**$90**	**4.06%**

Мы знаем, что игрок Y получит нейтральное ожидание со своими блефами. Однако для вэлью бетов его математическое ожидание будет равно:

$<\mathcal{Y}_1> = (14.29\%)(\$60) + (9.77\%)(\$60) + (7.88\%)(\$60) = \$19.16$
$<\mathcal{Y}_2> = (46.2\%)(\$8.34) + (21.3\%)(\$22.26) + (9.84\%)(\$59.40) = \$26.41$

Таким образом, игрок Y в среднем выигрывает на 7 долларов больше от стратегии геометрического приращения банка. И этого вполне достаточно, чтобы игра стала приносить ему прибыль. Здесь стоит заметить, что максимальное экс-шоудаун вэлью для игрока Y не может превышать шоудаун вэлью игрока X – в таком случае последнему бы только оставалось скинуть свою руку и отдать оппоненту $5 анте.

Примечание от переводчика: Полученные результаты для этих двух стратегий мы должны умножить на 2/13, поскольку вкладывать деньги в банк мы будем только с этими вэлью руками. Причем полученное произведение будет нашим экс-шоудаун вэлью (ведь в нем не учитывается анте). Затем нам необходимо сравнить полученный результат с шоудаун вэлью ($-3.46).

Рассмотрим график зависимости r от размера стэка на двух и трех улицах торговли:

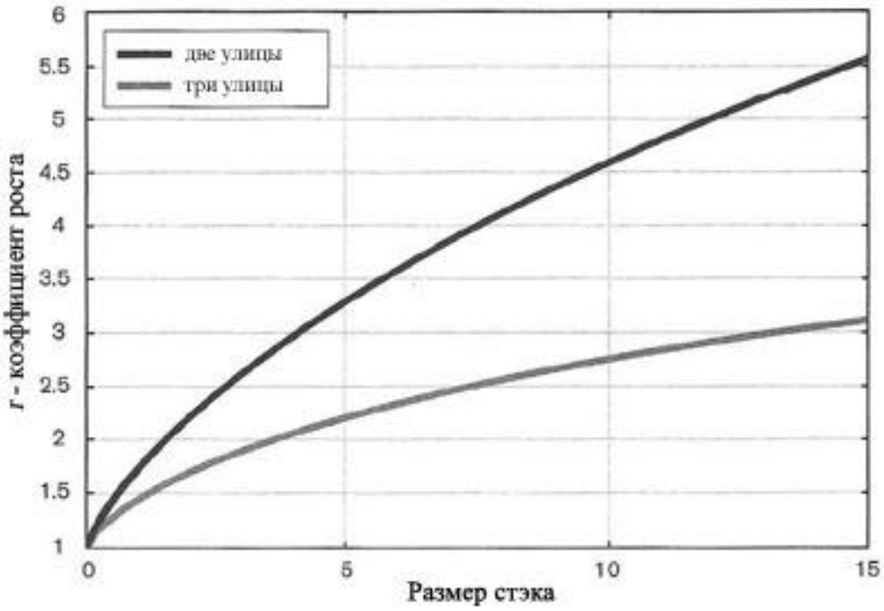


Рисунок 19.1. Геометрический рост банк для двух и трех улиц

При *r* равном 3, *s* достигает значения 1, то есть мы начинаем ставить ровно размер банка. Как вы можете заметить, чтобы такие беты были оптимальными, стэки должны быть как минимум в 13 раз больше размера банка. В то же время при стэках в 3,5 раза больше банка ставки в половину банка достаточны для того, чтобы можно было вложить все деньги по стратегии геометрического приращения.

Аукционные игры (игры на бесконечном числе улиц)

Последние из статичных игр, которые мы изучим в этой главе, имеют мало общего с покером; в сущности, структура их решений достаточно сильно отличается от многих из рассмотренных выше игр.

Однако такие игры помогают лучше понять по крайней мере один важный принцип, и кроме того имеют несколько просто интересных свойств. Эти игры происходят на бесконечном числе улиц и называются ***аукционными***.

Пример 19.4

Мы начинаем с рассмотрения игры с ясновидящим на очень большом количестве улиц.

- М полных улиц
- Сила рук игроков не изменяется от улицы к улице
- Размер банка - 1 единица
- Ставки ограниченного размера (стэки по S единиц)
- Игрок Y ясновидящий

Применяя принцип геометрического приращения банка к ситуации с M улиц, получим следующее:

Итоговый размер банка составит (после того, как игроки вложат в банк свои стэки) $1 + 2S$.

$$P = 1 + 2S$$

Рост банка на каждой улице будет равен корню степени M из P (это геометрический рост банка для M улиц),

$$G = P^{(1/M)}$$

Размер ставки s (для текущего размера банка) на каждой улице будет равен:

$$s = (G - 1)/2$$

Предположим, что мы делаем колл на первой улице, где банк равен 1. Игрок Y поставит с оптимальным вэлью диапазоном y_v , а блефовать он будет с $s/(1 + s)$ от y_v. В итоге он будет ставить с диапазоном $y_v(1 + 2s)/(1 + s)$.

Мы можем переформулировать это следующим образом. Отношение количества рук, с которыми он поставит на $m + 1$ улице к количеству рук, с которыми он поставит на m улице равно:

$$r_b = (1 + 2s)/(1 + s)$$

В некотором смысле эту величину можно назвать мультипликатором блефов. Представьте, что мы анализируем игру на двух улицах со стэками в 1 единицу и таким же банком. Геометрическое приращение в таком случае предполагает, что мы должны разогнать банк с 1 до 3 за две улицы. Значит r в этой игре равно $\sqrt{3}$, а размер ставки на каждой улице составит $(\sqrt{3} - 1)/2$, или примерно 0,366. Далее идут блефы. Пусть игрок Y имеет в своем диапазоне y вэлью бетов, тогда на ривере он будет блефовать с $ys/(1 + s)$ рук. Причем для выбранного бетсайзинга выражение $s/(1 + s)$ примерно равно 0,268. Таким образом, на ривере игрок Y будет ставить с $1{,}268y$ рук, а на терне – с $(1{,}268)^2y$. Подставляем 0,366 вместо s в формулу для r_b, получим, что $r_b = 1{,}268$.

Пусть количество натсов в диапазоне игрока Y на протяжении всей игры выражается неким y. Тогда y_m - количество рук, с которым он ставит на улице $(m + 1)$, а y_M – диапазон вэлью бета, то есть, $y_M = y$. В свою очередь, y_0 мы будем называть диапазон для ставки на первой улице. Получим:

$y_m = y_0(r_b)^m$
$y_M = y_0(r_b)^M = y$
$y_m = y(r_b)^{m-M}$
$y_0 = y(r_b)^{-M}$

Однако здесь мы можем столкнуться с определенными трудностями. Предположим, что $y_0 > 1$. Тогда возникает ситуация, которую мы уже обсуждали ранее – игроку Y просто не хватает блефов в диапазоне. В таком случае оптимальной стратегией для него будет бет, а игрок X будет обязан скидывать все свои руки.

В противном случае игрок X будет уравнивать $1/(1 + s)$ раз. Пусть x_m – это число рук, с которыми он делает колл на улице (m + 1). Тогда:

$r_c = 1/(1 + s)$
$x_m = (r_c)^m$

Примечание от переводчика: Это уравнение фактически значит, что игрок X должен рассматривать каждую улицу в отдельности и уравнивать а раз.

В любом из этих случаев, если игрок Y следует оптимальной стратегии, игрок X оказывается безразличными к коллу или фолду. Поэтому цена рассматриваемой игры составляет $y_0 - y$, что представляет собой интересную зависимость ожидания от количества блефов в диапазоне игрока Y.

Теперь обратимся к игре совершенного иного типа.

Пример 19.5 – Аукционная игра

- Сила рук не изменяется от улицы к улице
- Ставки ограниченного размера (стэки по S единиц)
- Размер банка - 1 единица

Каждый игрок делает ставку, но не говорит о ней своему оппоненту, затем обе ставки вскрываются одновременно.

Мы будем обозначать размеры ставок через s_x и s_y. Очевидно, что каждая из них должна находиться на интервале [0, S]. Обе ставки прибавляются к банку.

Если $s_x > s_y$, то игрок X выигрывает. Если $s_y > s_x$, то выигрывает игрок Y. Если $s_x = s_y$, то происходит вскрытие (обычно такое будет происходить, когда обе ставки оказываются равны стэкам).

Действительно, эта игра мало чем напоминает покер. Однако давайте попробуем на время абстрагироваться от этого факта. Представьте, что мы имеем дело с некой покерной игрой со статичными руками на M улицах по описанным выше правилам.

Для каждой руки, которая у нас может оказаться, мы подберем свое значение s_x, которое будет составлять некую дюлю от нашего стэка S.

На каждой улице мы будем ставить одинаковую часть нашего оставшегося стэка $\varepsilon = S/M$, пока мы не достигнем определенного порогового значения s_x, выше которого мы подниматься не готовы. После этой точки мы просто сделаем чек и сдадимся. ε - это греческая буква эпсилон, которая была введена ранее и представляет некую очень малую величину. Как мы увидим в этой игре, с ростом числа улиц ε будет стремиться к 0. Если наш оппонент сделает рейз любого размера, то мы уравняем только в том случае, если он окажется меньше порогового значения, и на следующей улице продолжим ставить ε с учетом оставшегося стэка и улиц торговли. Если же рейз окажется выше нашего порога, мы сделаем фолд.

> *Примечание от переводчика: Мы будем ставить ε на каждом шагу аукциона (то есть будем считать размер каждой ставки исходя из размера начального стэка) поскольку мы не хотим слишком быстро дойти до нашего порога, и не хотим показывать оппоненту, что замедляемся около пороговой точки (это бы происходило если бы мы использовали в формуле вместо S наш порог) – в таком случае он может сделать рейз и забрать у нас банк.*

Теперь предположим, что мы играем против идеального оппонента. Каково его ожидание от эксплуатации нашей стратегии? Чтобы определить, чему равен наш порог, он должен будет уравнивать, пока мы не сделаем чек. То есть он не может эксплуатировать нас в столь элементарном ключе. В сущности, он получит прибыль только в том случае, если наша стратегия заставит нас поставить немного больше, чем s_x. Предположим, что количество улиц равняется 100, а s_x = 0,601. Для первых 60 улиц наша ставка будет равна 0,01. На 61 улице мы все еще не достигли заданного порога, однако мы не можем начать ставить меньше, не сделав нашу стратегию открытой для эксплуатации (оппонент сразу поймет, что это и есть наш порог). Поэтому, мы снова ставим 0,01, доводя нашу общую ставку до 0,61. Это значение на 0,009 больше, чем то, которым мы собирались рисковать; и практически против всех рук, с которыми оппонент уравнивал до этого момента, мы теряем эти дополнительные 0,009.

Давайте посмотрим, каким ожиданием для идеального оппонента обладает рейз. Пусть мы делаем ставку на какой-то определенной улице, доводя общий размер поставленных денег до x. Так как мы только что поставили, он должен знать, что значение порога s_x должно быть не меньше, чем $x - \varepsilon$. Предположим, что он делает рейз до y единиц. Тогда возможны три сценария

- $s_x < y$. В этом случае мы делаем фолд. Однако оппонент мог бы выиграть больше (как минимум $s_x - x$) просто уравнивая наши ставки, пока мы не сдадимся.
- $s_x > y$. В этом случае мы сделаем колл. Однако после этого наш размер ставки для каждой улицы уменьшится – вместо $(S - x)/M_{ост}$ мы будем делать ставку меньшего размера, $(S - y)/M_{ост}$. Учитывая, что мы уже показали, как оппонент может заработать на нашей стратегии сумму до ε, он, очевидно, не захочет уменьшать эту величину.
- $s_x = y$. В этом случае мы уравняем, но затем всегда сделаем чек и сдадимся. А идеальный оппонент не выиграет ничего.

Получается, что единственный выбор для идеального оппонента – делать колл, пока мы не скажем чек.
На решение этой игры можно посмотреть и с точки зрения теории игр. Пусть существует некая пара стратегий (X, Y), причем мы знаем ожидание для идеального оппонента против X и против Y. Однако цена игры будет находиться между этими двумя значениями, поскольку оптимальная стратегия игрока X будет обладать меньшим ожиданием, чем стратегия идеального оппонента, то же самое верно и для игрока Y. Таким образом, цена игры для идеального оппонента в лучшем случае составит G – ε (где G –цена игры при использовании оптимальной стратегии).

И поскольку мы знаем, что если количество улиц в игре, M, стремится к бесконечности, то ε будет стремиться к 0, так как M – знаменатель выражения $\varepsilon = S/M$. Получается, что цена любой игры сводится к цене аукционной игры с соответствующими параметрами. А играя в аукционную игру на произвольном числе улиц максимум, что мы потеряем – это ε.

Примечание от переводчика: Параграф выше значит, что если количество улиц в игре уходит в бесконечность, то позиция перестает иметь всякое значение, также как и эксплуатация.

Пример 19.6

Далее мы рассмотрим аукционную игру с ясновидящим.

- Игрок Y ясновидящий.
- Правила аукционной игры со стэками S единиц и начальным банком равным 1 единице.

Пусть у игрока Y есть *y* натсов. Тогда мы будем рассматривать всего три типа рук: руки игрока X, которые ничем не отличаются друг от друга, натсы игрока Y и воздух игрока Y. Вполне понятно, что игрок Y будет всегда выбирать $s_y = S$ с натсами, ведь он захочет поставить в банк как можно больше денег с очень сильной рукой. Пусть *x(s)* - часть рук, с которой игрок X будет ставить как минимум *s*, а *y(s)* - часть рук, с которой Y будет ставить как минимум *s*.

Стратегия игрока Y будет заключаться в том, чтобы ставить S с натсовыми руками и выбирать s_y для блефов таким образом, что он будет постепенно с ними пока у него не останется $y(S) = y$. Чтобы сделать игрока Y безразличным между ставками *s* и (*s* + *Δs*) с мертвой рукой, мы можем сделать следующее. (*Δs* или «дельта *s*» обычно используется для обозначения незначительных приращений величины *s*):

$-\Delta x = x(s + \Delta s) - x(s)$

(*x*, то есть доля рук, готовых внести в банк деньги, будет уменьшаться с увеличением *s*).

Примечание от переводчика: Авторы используют не совсем понятные формулы, ответа от них дождаться не удалось. Вполне вероятно, что это формулы из примера 19.4.

$-x\Delta s + \Delta x\Delta s + (1 + 2s)(-\Delta x) = 0$

$(1 + 2s + \Delta s) -\Delta x = x\Delta s$

$-\Delta x/x = \Delta s/(1 + 2s - \Delta s)$

При $\Delta s \to 0$ получим:

$-\Delta x/x = \Delta s/(1 + 2s - \Delta s)$

$-\Delta x/x \approx \Delta s/(1 + 2s)$

$-dx/x = ds/(1 + 2s)$

Примечание от переводчика: Здесь подразумевается, что мы получили форму производной (поскольку производная – это также приращение функции).

Проинтегрировав обе части, мы получаем:

$-\ln(x) + C = \ln(1 + 2s)/2$

$\ln(Cx^2) = \ln(1 + 2s)$

$x(s) = k / \sqrt{1+2s}$

Очевидно, $x(0) = 1$, так как все руки должны поставить хотя бы 0. Следовательно, $k = 1$, и тогда:

$x(s) = 1 / \sqrt{1+2s}$

Тем же образом игрок Y должен сделать оппонента безразличным между *s* и *s* + *Δs*:

$$(-\Delta y)(1 + 2s + \Delta s) + y(\Delta s) = 0$$
$$-\Delta y/y = \Delta s/(1 + 2s + \Delta s)$$

При $\Delta s \to 0$:

$$-dy/y = ds/(1 + 2s)$$
$$y(s) = k/ \sqrt{1+2s}$$

Мы знаем, что $y(S)= y_0$, поэтому:

$$y = k / \sqrt{1+2S}$$

Таким образом, $y(s) = y \sqrt{\frac{1+2S}{1+2s}}$, а $x(s) = 1 / \sqrt{1+2s}$.

Однако в этом случае, опять же, y_0 может быть больше 1. Значит, решение игры выглядит следующим образом:

$y(s) = y\sqrt{\frac{1+2S}{1+2s}}$ (или 1, мы ищем наименьшее значение)

$x(s) = 1/ \sqrt{1+2s}$ (или 0, если $y(\sqrt{1+2s}) > 1$)

Иными словами, каждое из этих выражений означает то количество рук, с которым игроки X или Y (соответственно) будут ставить по меньшей мере *s* на аукционе (при стэках *S*).

Например, если стэки составляют 10 единиц и игрок Y имеет в своем диапазоне 50% натсов, то он будет ставить как минимум с:

$$y(1) = (0,5) \sqrt{(1+2*10)/(1+2*1)}$$
$$y(1) = (0,5) \sqrt{7}$$
$$y(1) \approx 1,323$$

Так как это значение больше 1, то ему следует делать бет со всеми диапазном.

Он будет ставить как минимум 5 с руками:

$y(5) = (0{,}5)\ \sqrt{(1+2*10)/(1+2*5)}$

$y(5) = (0{,}5)\ \sqrt{\frac{21}{11}}$

$y(5) \approx 0{,}691$

Получается, что игрок Y будет ставить со всеми натсами и еще с 0,191 от общего числа рук в качестве блефов.

> *Примечание от переводчика: Очевидно, что если y(s) больше единицы, то это невозможный случай, ведь диапазон игрока Y не может составлять 132%. Значит, мы просто говорим о том, что будет ставить со всеми руками. Но если доля рук, с которыми он поставит некое количество денег s меньше единицы, тогда чтобы найти нужную долю блефов, нам из полученного значения придется вычесть долю натсов.*

Также легко показать, что при $M \to \infty$ мы только что получили решения для игры против ясновидящего на M улицах. Мы специально не будем рассматривать случаи, когда у игрока Y в диапазоне не хватает блефов и поговорим о более привычной ситуации, когда оба игрока следуют смешанным стратегиям на первой улице.

Чтобы избежать путаницы по отношению к переменной *s*, пусть

$s_n = (G - 1)/2,$

Это выражение задает частоту ставки на одной улице (пример 19.4)

Мы можем использовать следующие упрощения:

$s_n = (G - 1)/2 \approx \ln(G)/2 = (\ln P) / 2M$

Из решения покерной игры с ясновидящим (пример 19.1), мы знаем, что $x_m = r_c^m$.

$x_m = r_c^m$

$x_m = (1 + s_1)^{-m}$

$x_m \approx e^{-ms1}$

$x_m \approx exp(-\frac{m}{2M} \ln P)$

$x_m \approx P^{-m/2M}$

Также мы знаем, что размер банка после этой улицы будет равен:

$$1 + 2s_1 = G_m$$
$$1 + 2s_1 = P^{m/M}$$

Произведем замены и получим:

$$x_m = (1 + 2s_1)^{-½}$$

$$x_m = x(s)$$

То же самое справедливо и для $y(s)$.

Нужно запомнить

……………………………………………………………………………………………………..

- Игру против ясновидящего можно продлить на несколько улиц. В таком случае ключевым элементом решения будут «вложенные» друг в друга диапазоны, при которых ясновидящий должен чаще блефовать, но затем сдаваться с частью блефов на следующих улицах.

……………………………………………………………………………………………………..

- Для безлимитной игры с ясновидящим на нескольких улицах оптимальным бетсайзингом является геометрическое приращение банка.

……………………………………………………………………………………………………..

- С увеличением количества улиц позиционное преимущество сводится к нулю – аукционная игра полностью симметрична.

……………………………………………………………………………………………………..

- Как показывает аукционная игра, в играх со статичными руками имеет смысл делать небольшие ставки на каждой улице. Однако этот принцип может нее соблюдаться в играх с дро.

……………………………………………………………………………………………………..

- Неясновидящий игрок должен рассматривать игру на нескольких улицах как последовательность игр на одной улице.

……………………………………………………………………………………………………..

- Количество рук, с которыми игрок Y блефует на текущей улице, но затем сдается, находится в соотношении *a* с общим диапазоном, который он поставит на второй улице.

……………………………………………………………………………………………………..

Глава 20
Тянем дро: Игры с дро на нескольких улицах

В прошлой главе мы изучали игры на нескольких улицах против ясновидящего, где ценность рук не изменялась на протяжении всей раздачи. Мы показали, что игрок, который не является ясновидящим, должен принимать решения как если бы игра проходила на одной улице. В свою очередь, ясновидящий игрок комбинировал свои диапазоны и стремился построить свою стратегию таким образом, чтобы на ривере у него было оптимальное соотношение блефов и натсов.

В этой главе мы сделаем рассматриваемые игры несколько более сложными, добавив в них дро. Это значит, что теперь в диапазонах игроков окажутся руки, которые могут улучшиться на одной из следующих улиц торговли.

Также мы будем использовать термины ***открытое дро*** (очевидное дро, которое закрылось на одной из улиц; например – третья карта к флэшу на ривере), а также ***скрытое дро*** (неочевидные дро; также применяется для ситуаций, где только один из игроков знает, закрылось ли дро, как, например, в Стаде).

Мы начнем с анализа еще одной игры против ясновидящего, в которой, как ни странно, нет никаких дро. Тем не менее, она послужит неплохой отправной точкой для последующего анализа.

Пример 20.1 – Игра против ясновидящиего (открытые дро)

- Лимитный Холдем, в банке 6 больших ставок
- Игрок X показывает свою пару тузов
- Диапазон игрока Y состоит из 7/8 одномастных червовых рук, а также 1/8 воздуха
- Доска имеет вид: Q♥ 7♦ K♥ 4♣ 8♥

Решение для первой игры с ясновидящим, которую мы рассмотрели в этой книге (приер 11.1) подскажет, что игрок Y должен ставить на вэлью со всеми флэшами, а также блефовать с достаточным количеством мертвых рук, чтобы игрок X оказался безразличен к коллу. Используя уже знакомые нам соотношения блефов и вэлью бетов, мы можем вывести следующую оптимальную стратегию:

Игрок X делает чек, игрок Y ставит все флэши ($^7/_8$) и α мертвых рук ($^1/_8$ от своего диапазона). Игрок X должен скидывать α от всех своих рук ($^1/_7$) и уравнивать с оставшимися $^6/_7$.

Пример 20.2

- Лимитный Холдем, вышел терн, в банке 4 больших ставки
- Игрок X показывает свою пару тузов
- Диапазон игрока Y состоит на $1/_{10}$ из одномастных червовых рук, а также из $9/_{10}$ воздуха
- Доска имеет вид: Q♥ 7♦ K♥ 4♣

Для упрощения расчетов давайте считать, что флэш закроется на ривере ровно 20% раз. Мы также не будем обращать внимания на тот факт, что нужная карта будет приходит реже, поскольку у игрока Y на руках иногда окажется пара червовых карт.

Какие действия игроки будут предпринимать на терне? Во второй части книги мы уже анализировали похожие игры. Вполне очевидно, что игрок X будет делать ставку во всех случаях без исключения. А так как у игрока Y сейчас нет рук, которые бы были впереди тузов, он будет делать колл только при наличии подходящих шансов банка. Однако он также уравняет и с некоторой частью своих блефов, надеясь забрать банк на ривере, если выйдет третья карта к флэшу. Мы можем найти этот диапазон исходя из итогового размера банка. После бета и колла на терне в центре стола окажутся 6 больших ставок. Игрок Y захочет блефовать на третьей карте к флэшу $\alpha = 1/(P+1) = 1/_{7}$ от своего вэлью диапазона, или с $1/_{70}$ от всех своих возможных рук.

> *Примечание от переводчика: Здесь используется коэффициент α, а не α_2, поскольку авторы рассматривают ситуацию на одной конкретной улице (ривер), а не череду ставок на нескольких улицах (как это было в предыдущей главе).*

Теперь представьте, что на ривере вышла 8♥. Мы получаем ту же ситуацию, что и в примере 20.1 – в банке 6 больших ставок, диапазон игрока Y содержит в себе как флэши, так и блефы, текстура доски ничем не отличается.

Игрок Y будет ставить со всеми флэшами, а также блефами, которые должны составлять $1/_{7}$ от количества флэшей. Вполне понятно, что больше мертвых рук на ривере у него не окажется (он делал колл на терне в расчете на блеф именно с этим диапазоном).

Перед тем как мы продолжим обсуждать решение для этой игры, давайте остановимся и подумаем, как часто игроку X следует уравнивать. В игре на одной улице частота колла была $6/_{7}$. Однако в этом случае, как вам уже подсказывает интуиция, ответ будет несколько иным.

Пусть игрок X решает всегда скидывать свою руку – как мы уже оговорили выше, его оппонент будет играть на ривере оптимально и сделает игрока X безразличным к коллу или фолду.С другой стороны, мы знаем, что если бы игрок X решил никогда не делать колл, то игроку Y не составило бы труда его эксплуатировать. В таком случае, поскольку на ривере у игрока Y оказывается весьма ограниченный набор рук, который он подбирал для оптимальной игры только на этой улице, ему нужно будет изменить свой диапазон для колла на терне и включить в него больше блефов.

Но здесь есть пара подводных камней. Чтобы чаще блефовать на ривере, игроку Y придется делать на терне колл с мертвой рукой, а третья карта к флэшу выйдет только в одном случае из пяти. Иными словами, $^4/_5$ раз он не сможет реализовать свой замысел, так как тузам его оппонента ничего не будет угрожать. Так что все это время игрок Y будет терять ставку, сделанную на терне. Он может себе это позволить себе только если игрок X действительно никогда не делает колл на ривере – тогда $^4/_5$ раз он потеряет одну ставку, но выиграет пять, когда на ривере выйдет флэш; общее ожидание составит плюс $^1/_5$ ставки.

Значит, игроку X нужно найти альтернативную стратегию. На самом деле, он должен стараться сделать своего оппонента безразличным не к блефу на ривере с мертвой рукой, а к линии «Колл на терне с блефом, бет на третьей карте к флэшу на ривере».

Пусть *x* – частота колла игрока X на ривере. Если мертвые руки его оппонента падают уже на терне, их ожидаемый выигрыш составит 0. Чтобы они оказались безразличны к альтернативной линии, ее ожидание также должно равняться нулю. Мертвые руки теряют 2 ставки, когда на ривере приходит флэш, но тузы игрока X все равно делают колл; выигрывают 5 в случае успешного блефа; а также проигрывают 1 ставку, если на ривере не вышла третья карта к флэшу.

$$\langle\text{Мертвые руки, фолд}\rangle = 0$$

$$\langle\text{Мертвые руки, колл}\rangle = p(\text{колл})\, p(\text{флэш на ривере})\,(-2) + p(\text{флэш на ривере})\, p(\text{фолд})\,(5) + p(\text{бланк на ривере})\,(-1)$$

$$\langle\text{Мертвые руки, колл}\rangle = x(^1/_5)\,(-2) + (^1/_5)\,(1 - x)\,(5) + {^4/_5}\,(-1)$$

$$\langle\text{Мертвые руки, колл}\rangle = x(-^7/_5) + {^1/_5}$$

$$x(-^7/_5) + {^1/_5} = 0$$

$$x = {^1/_7}$$

Здесь можно сделать несколько выводов об игре на двух улицах.

Первый:

Чтобы блеф выглядел правдоподобно, его должен подкреплять диапазон сильных рук.

При поиске оптимальной стратегии на ривере мы никогда не должны забывать о стоимости розыгрыша соответствующего диапазона. Так, готовые руки могут реже уравнивать на ривере при закрывшемся дро, поскольку они уже заставили его заплатить на терне. Фактически, готовые руки извлекли нужное им вэлью на предыдущей улице, так что оппонент с дро никак не может эксплуатировать такую стратегию, поскольку оно не будет закрываться на ривере достаточно часто.

Этот принцип находит свое применение и в реальном покере. Например, на самом деле нет ничего хуже, чем оказаться в ситуации с открытым дро на руках. Как мы показали чуть выше, игрок X должен был уравнивать всего с $^1/_7$ частью своего диапазона на ривере (вместо $^6/_7$, значит, флэш получает гораздо меньше вэлью!), причем игрок Y ничего от этого не выиграл.

Значительный перевес в эквити на терне позволяет игроку X чаще сдаваться на закрывшемся флэше, ведь его оппонент уже заплатил большое количество денег за возможность блефовать на ривере.

Более того, как вы могли заметить, тот факт, что игрок Y является ясновидящим, почти никак ему не помогает – это происходит в первую очередь из-за слабости его диапазона. Однако, как правило, оптимальные стратегии не поставят вас в подобное положение (с очевидным дро). Покерный теоретик Пол Пудит какое-то время назад даже вывел «Фундаментальную Теорему Дро». Она гласит следующее: если мы ожидаем экшен на следующих улицах в раздаче, каждая наша линия розыгрыша должна содержать в себе натсы для любых карт, которые могут выйти на стол.

> *Примечание от переводчика: Эту теорему следует понимать так. Если мы думаем, что мы можем получить вэлью на следуюших улицах торговли (например, блефуя, либо ставя с натсами), то какую бы линию розыгрыша мы не выбрали, каждая из них должна иметь свой набор натсов для любой вышедшей карты.*
>
> *Например, если мы играем на терне через чек/колл, когда на доске есть флэш-дро, то у нас должны быть как сеты (натсы на картах, которые не закрывают флэш), а так и флэш-дро (натсы на картах, которые закрывают флэш).*

Второй вывод касается применения теории игр в покере:

Игры на нескольких улицах нельзя представить в виде связанных между собой игр на одной улице; решение для таких игр зачастую предполагает в корне иную стратегию.

В первом примере из этой главы мы рассматривали стратегию игры на ривере безотносительно терна. Однако решение для игры на двух улицах, как оказалось, существенно отличалось, хоть ситуация на ривере (после ставок на терне) никак не изменилась.

Это и есть наиболее важное различие между математическим анализом шахмат и покера - в шахматах цепочка действий, по которой мы оказались в той или иной ситуации никогда не важна. В то же время в покере каждое действие имеет определенный вес и влияет на стратегию для следующих улиц торговли.

И эта особенность покера представляет собой главное препятствие при вычислении оптимальных стратегий – ни одна раздача не происходит в вакууме. Действия игроков на предшествующих улицах всегда должны быть приняты в расчет, мы всегда имеем дело с сложными и многоуровневыми диапазонами. Более того, мы не можем назвать найденное решение оптимальным, если оно не было получено для полной версии игры, учитывающей все возможные факторы.

И это препятствие сегодня выглядит непреодолимым в первую очередь из-за недостатка вычислительных мощностей современных компьютеров, а также многопользовательской природы покера. Тем не менее, в этой и следующей главе мы продолжим изучать вспомогательные игры на нескольких улицах в поисках идей и результатов, которые позволили бы нам принимать более грамотные решения за столом.

Пример 20.3 – Игра против ясновидящего (смешанные дро)

Представьте, что вместо обычного набора рук, состоящего из дро и блефов, у игрока Y оказывается диапазон, в котором x% долю занимают флэш-дро (главное дро), y% - слабые скрытые дро (например, нижние пары, которые могут усилиться до сета), а z% - мертвые руки. Для упрощения расчетов будем считать, что флэш-дро закроется в 20% случаев, а слабые дро – в 4% (события независимые).

Слабым дро недостает прямых шансов банка для колла на терне даже с учетом потенциального выигрыша на ривере. Однако поскольку игрок Y в любом случае будет уравнивать с частью своих слабейших рук, чтобы иметь сбалансированный диапазон на ривере, он вполне может предпочесть колл с андерпарами вместо колла с мертвыми руками.

Итак, игрок X делает ставку, игрок Y ее принимает с диапазоном, состоящим из трех частей. Причем даже если флэш не закроется на ривере, 4% раз он попадет в сет на бланковой карте. Тогда он поставит свои сеты на вэлью и сбалансирует их с определенным количеством блефов (в их числе промазавшие дро, слабые пары, которые не попали в сет на ривере, а также все мертвые руки с флопа).

В примере 20.2 было очевидно, какие руки игрок X должен был сделать безразличными к блефу. Однако здесь ему нужно выбирать: сделать оппонента безразличным к коллу со слабыми закрытыми дро или с мертвыми руками. Конкретное решение зависит от доли этих рук в диапазоне игрока Y.

Если x = 10%, а z = 90%, то мы получим ту же самую игру, которую решили в предыдущем примере.

Теперь представьте, что x = 10%, а y = 90% (иными словами, мертвых рук у игрока Y нет). Тогда игрок X должен сделать своего оппонента безразличным к блефу со слабыми дро. Для этого ему стоит уравнивать на ривере настолько часто, чтобы игроку Y не было разницы, что делать. Пусть x_f - частота колла игрока X на ривере с тремя картами к флэшу, а x_n - частота колла на любой другой карте.

Давайте рассмотрим одно из закрытых дро игрока Y. С ним он может сыграть по одной из нескольких линий. Мы представим их в виде матрицы, поскольку она делает процесс решения более удобным. Обозначения, которые мы будем использовать для стратегий игрока Y выглядят так:

[<Действие на терне>/<Действие на ривере, если вышел флэш>/<Действие на ривере, если вышел бланк >]

Например, [F//] значит фолд на терне, в то время как [C/B/K] – колл флопа, блеф на три-флэш ривере и чек на любой другой карте. При этом если игрок Y попадет в сет, то всегда поставит на вэлью – в таком случае его выигрыш составит 5 ставок из банка плюс некоторые потенциальные ставки, которые зависят от решения игрока X (x_f раз он уравняет на третьей карте к флэшу и x_n раз на бланке). Также будем считать, что $^1/_4$ раз сет игроку Y даст третья карта к флэшу.

$$V_{set} = (^3/_4)\ (5 + x_n) + (^1/_4)\ (5 + x_f)$$

Примечание от переводчика: Это уравнение показывает математическое ожидание от ставки на ривере с сетом. Причем очевидно, что на трех картах к флэшу и на бланке тенденции к коллу у игрока X будут разными (как было отмечено выше).

Эти уравнения получаются следующим образом. Во-первых, мы считаем, если мы забираем банк после фолда оппонента, то выигрываем 5 ставок: 4 ставки из банка плюс ставка оппонента на терне. В общей сложности на ривере банк составляет 6 ставок, однако мы *рассматриваем одну ставку в качестве вложений на терне, когда оцениваем линию целиком. В случае колла мы выиграем 6 ставок (4 + 1 +1).*

На третьей карте к флэшу оппонент уравняет (x_f) раз, а скинет – (1 - x_f) раз. Имеем уравнение:

x_f *(5 + 1) + (1 -* x_f*) (5)*
$6x_f + 5 - 5x_f$
$5 + x_f$

Таким же образом находим уравнение и для x_n.

Линия игрока Y	**Ожидание игрока Y**	**Ожидание при $x_n = 1$ и $x_f = 1$**
[F//]	$-(^1/_{25})(4) = -0.16$	
[C/B/B]	$(^1/_{25})V_{set} + (^{19}/_{100})(-2x_f+5(1-x_f))$ $+(^{77}/_{100})(-2x_n+5(1-x_n))$	
[C/B/K]	$(^1/_{25})V_{set} + (^{19}/_{100})(-2x_f+5(1-x_f)) - {}^{77}/_{100}$	
[C/K/B]	$(^1/_{25})V_{set} - {}^{19}/_{100} + (^{77}/_{100})(-2x_n+5(1-x_n))$	
[C/K/K]	$(^1/_{25})V_{set} - {}^{19}/_{100} - {}^{77}/_{100}$	$^{72}/_{100}$

Коэффициенты $^1/_{25}$, $^{19}/_{100}$, и $^{77}/_{100}$ показывают вероятность попадания в сет (с третьей картой к флэшу или нет), вероятность попадания во флэш (но не в сет), а также вероятность полного бланка на ривере.

Из матрицы становится очевидно, что колл и чек на ривере на любой карте всегда будет доминируемой стратегией. Пусть x_n и x_f равны единице (это лучший сценарий для сета). Тогда <[C/K/K]> = $^1/_{25}$ (6) - $^{96}/_{100}$ = - $^{72}/_{100}$, что существенно хуже, чем ожидание от фолда на терне

Мы также знаем, что диапазон для блефа на третьей карте к флэшу будет шире, чем диапазон для блефа на любой другой карте (поскольку в первом случае наши блефы лучше подкреплены сильными руками). Значит, должен существовать некий диапазон [C/B/K] помимо [C/B/B].

Причем поскольку на ривере у нас всегда окажутся блефы обоих типов, ставка с ними на ривере без флэша должна подчиняться смешанной стратегии.

Тогда имеем:

$$<[C/B/B]> = <[C/B/K]>$$
$$\frac{77}{100}(-2x_n + 5(1 - x_n) = -\frac{77}{100}$$
$$5 - 7x_n = -1$$
$$x_n = \frac{6}{7}$$

Мы также знаем, что игрок Y обязан блефовать на ривере хоть какой-то процент раз, так как у него не всегда оказываются натсы:

$$\frac{4}{100}V_{set} + \frac{19}{100}(-2x_f + 5(1-x_f)) - \frac{77}{100} = \frac{16}{100}$$
$$\frac{1}{25}((\frac{3}{4})(5+\frac{6}{7})+(\frac{1}{4})(5+x_f))+\frac{19}{100}(5-7x_f) = \frac{61}{100}$$
$$x_f = \frac{3}{7}$$

Это очень интересный результат. Добавление в диапазон игрока Y скрытых дро, которые гораздо слабее флэш-дро, заставляет его оппонента делать колл в три раза чаще. Дело в том, что когда на доске возможно лишь некое скрытое дро (не вышла третья карта к флэшу), игрок X обязан уравнивать $\frac{6}{7}$ раз, чтобы его оппонент был безразличен к блефу. В то же время, если на ривере закрылось очевидное дро, то он может перейти к стратегии колла лишь в трех случаях из семи.

Что касается стратегии игрока Y, он должен разыгрывать достаточное количество слабых дро, чтобы иметь нужное количество блефов на ривере с третьей картой к флэшу. Если он продолжает на терне с y скрытых дро, на ривере у него окажется готовая рука $\frac{1}{9}y + \frac{1}{10}$ раз, в то время как коэффициент α должен быть равен $\frac{1}{7}$. Тогда:

$$(\frac{1}{7})(\frac{1}{9}y + \frac{1}{10}) = \frac{8}{9}y$$
$$\frac{8}{9}y = \frac{1}{63} + \frac{1}{70}$$
$$y = \frac{9}{550}$$

(эта цифра немного больше, чем $\frac{1}{70}$ диапазона, с которой игрок Y должен был продолжать в предыдущей игре)

Теперь давайте обратимся к более общему случаю, где у игрока Y оказываются все три типа рук. Игроку X уже придется выбирать, какую часть диапазона оппонента он хочет сделать безразличной к выбору действия. Как мы уже отмечали выше, игрок Y первым делом внесет в свой диапазон для блефа руки с номинальным эквити (скрытые дро), и только если их не хватит, начнет добавлять в него воздух (с которым он будет блефовать на третьей карте к флэшу).

В некотором смысле рассматриваемая нами ситуация похожа на [0,1] игры. Так, весь диапазон игрока Y разделен на несколько областей: флэш-дро, слабые скрытые дро, воздух. С каждой из них он должен играть по определенной стратегии, чтобы сбалансировать свою стратегию и не дать оппоненту эксплуатировать себя. При этом в определенной точке мы будем наблюдать порог, на котором станет возможной смешанная стратегия – с этой рукой он будет безразличным к выбору действия.

Иногда этим порогом окажется слабое дро (как мы убедились в примере, где не было воздуха), иногда – мертвая рука (как в случае без слабых дро). Однако если в диапазоне игрока Y немного слабых дро, то игрок X никак не сможет сделать своего оппонента безразличным к коллу и блефу на ривере с этими руками – для игрока Y эта линия всегда будет обладать большим ожиданием, чем ее альтернативы.

Присутствие в диапазоне игрока Y флэш-дро позволяет скрытым дро (естественно, лишь какой-то их части) уравнивать ставку на терне, так как в случае, если на ривере выйдет третья карта к флэшу, они получат возможность блефовать, и это обеспечит им положительное ожидание (хотя на терне у этих рук и не было прямых шансов банка для колла).

Интересно, что игрок X не может добиться безразличия игрока Y к коллу с флэш-дро, ведь в лимитном покере он никогда не поставит в банк достаточное количество денег, чтобы колл для такого дро оказался убыточным.

Пусть $x = 30\%$, $y = 1\%$, а $z = 69\%$. Тогда игрок X будет стараться сделать оппонента безразличным к коллу и блефу с мертвой рукой, однако в таком случае игрока Y ответит коллом со всеми слабыми дро. В то же время, при $x = 30\%$, $y = 50\%$, и $z = 20\%$, игрок X должен стремиться сравнять ожидание для игрока Y от колла и блефа со скрытыми дро.

Кстати, эта игра в какой-то мере является ответом на вопрос, который мы часто слышим от читателей: «Какие дро мы должны стараться сделать безразличным к линии колла и блефа на следующей улице?». Самые сильные!

Теперь перейдем к более сложной игре против ясновидящего на двух улицах, где открытая рука оказывается в одном банке с неизвестным диапазоном.

Пример 20.4

- Холдем, игра начинается с терна (полторы улицы)
- Карты игрока X лежат рубашкой вниз
- Игрок Y получает некую руку *y*, выбранную случайным образом из его диапазона возможных рук Y
- Размер банка – P единиц

Итак, игроку Y известна рука оппонента, он также знает, какие карты могут выйти на ривере. Ради упрощения расчетов мы будем полагать, что если у обоих участников окажутся руки одинаковой силы, игрок Y всегда выиграет.

Давайте рассмотрим следующую ситуацию:

- Рука игрока X: A♠ Q♣
- Доска: A♥ J♠ 8♦ 7♣
- Диапазон игрока Y: {99+, AQ+}

Можем составить матрицу рук и соответствующих им вероятностей победы на шоудауне (при условии, никто не будет делать ставок):

Рука	Вероятность	Вероятность победы
AA	$^1/_{39}$	1
KK	$^6/_{39}$	$^2/_{44}$
QQ	$^3/_{39}$	$^2/_{44}$
JJ	$^3/_{39}$	1
TT	$^6/_{39}$	$^6/_{44}$
99	$^6/_{39}$	$^6/_{44}$
AK	$^8/_{39}$	$^{41}/_{44}$
AQ	$^6/_{39}$	$^{41}/_{44}$
Сумма	1	

Далее, мы можем сгруппировать этот диапазон по вероятности победы на вскрытии (не обращая внимания на типы рук) – получим распределение $\overline{Y}$:

$$\{(1,\ ^4/_{39}),\ (^{41}/_{44},\ ^{14}/_{39}),\ (^6/_{44},\ ^{12}/_{39}),\ (^2/_{44},\ ^9/_{39})\}$$

Здесь и далее мы будем считать, что новое распределение эквивалентно Y. Почему? Дело в том, что хоть руки, которые имеют одинаковую вероятность выигрыша на вскрытии, и составлены из разных карт, по большому счету они взаимозаменяемы. Действительно, поскольку игрок Y знает о руке оппонента, ему нет разницы, с чем выигрывать. Кроме того он никогда не проплатит лишнюю ставку, сделанную игроком X на вэлью.

В этом примере мы снова имеем дело со стратегией на двух улицах, однако игра на ривере будет сравнительно простой для обоих участников. Игрок с готовой рукой сделает чек (если он действует первым), на что его оппонент (с известным распределением) поставит на вэлью со всеми натсами, а также с частью блефов, которая задается знакомым нам уравнением $1/(P + 1)$. Далее игрок X уравняет с $P/(P+ 1)$ раз со своей открытой рукой.

В таком случае, блефы игрока Y будут обладать нулевым ожиданием, а натсы – выигрывать ему одну ставку. Причем те деньги, которые он будет выигрывать на ривере, можно считать «потенциальными выигрышами» от колла на терне. Но поскольку стратегия на ривере для обоих участников раздачи будет элементарной (если они играют оптимально), мы можем включить это ожидание в наши расчеты по стратегии терне. Тогда ожидаемый выигрыш скрытой руки (P^t) будет равен размеру банка на ривере плюс $P/(P + 1)$ ставок на ривере.

$P^t = P+P/(P+1)$

Игроку X придется проплачивать $P/(P+ 1)$ от своих рук, поскольку игра ведется на полутора улицах.

Давайте представим, что после терна в банке оказываются пять единиц. Теперь игрок Y поставит на ривере со своими натсами, и получит колл в $^5/_6$ случаев. Таким образом, ожидаемый выигрыш скрытой руки составит $^{35}/_6$.

Вернемся к новому распределению рук $\overline{Y}$. Давайте выстроим все части этого диапазона в соответствие с их вероятностью выигрыша, от лучшей к худшей:

$^4/_{39}$ рук имеют эквити 1.
$^{14}/_{39}$ рук имеют эквити $^{41}/_{44}$
$^{12}/_{39}$ рук имеют эквити $^6/_{44}$
$^9/_{39}$ рук имеют эквити $^2/_{44}$

Составим функцию, которая бы возвращала нам вероятность победы для заданной руки в зависимости от ее положения в диапазоне.

y(t) = вероятность победы лучшей руки в диапазоне $\overline{Y}$ после того, как мы уберем t лучших рук из диапазона $\overline{Y}$ (0 <= t < = 1).

y(0) = вероятность выигрыша лучшей руки в $\overline{Y}$.
y(1) = вероятность выигрыша худшей руки в Y'.

Примечание от переводчика: Это действительно плохое определение задаваемой функции. Можно было объяснить гораздо проще (что, собственно, и сделано в примере ниже). Если t = ¼, то мы просто смотрим на часть диапазона, которая отстоит от 0 (лучшей руки) на ¼ и определяем, какова вероятность победы для класса рук, в который мы только что попали.

В нашем распределении функция y(t) выглядит следующим образом:

y(0) = 1
y($^1/_4$) = $^{41}/_{44}$
y($^1/_2$) = $^6/_{44}$ (медианная рука)
y(1) = $^2/_{44}$

Примечание от переводчика: y(0) – вероятность победы лучшей руки, y(1) – худшей. y($^1/_4$) – отсчитываем от 0 ровно четверть комбинаций (то есть четверть от 39), это примерно 9.75 комбинаций, то есть мы попадаем в область $^{14}/_{39}$, в ней вероятность победы равна $^{41}/_{44}$. Точно также считается и y($^1/_2$).

Еще одна функция, которая нам пригодится при анализе этой игры – среднее эквити (то есть средняя вероятность победы) лучших t рук в рассматриваемом диапазоне. Ее мы будем называть $y^\theta(t)$. Фактически, мы определяем математическое ожидание для выбранной части распределения. Так, например, $y^\theta(^1/_2)$ означает среднее значение *y(t)* для лучших 50% рук. Вот так выглядит $y^\theta(t)$ для заданного распределения:

$y^\theta(0) = 1$
$y^\theta(^1/_4) = (^{16}/_{156})(1)+(^{23}/_{156})(^{41}/_{44}) \approx 0.23995 / 0.25 \approx 0.95980$
$y^\theta(^1/_2) = (^8/_{78})(1) + (^{28}/_{78})(^{41}/_{44})+(^3/_{78})(^6/_{44}) \approx 0.44231 / 0.5 \approx 0.88462$
$y^\theta(1) \approx 0.48951$

Функцию $y^\theta(t)$ можно выразить и по-другому:

$$y^\theta(t) = \left(\int_0^t y(t)dt\right)/t$$

К слову, $y^\theta(1)$ – это очень важное значение, поскольку показывает среднее эквити для всех рук в исходном распределении Y (ведь мы уже отмечали, что распределения Y и $\overline{\mathrm{Y}}$ в целом тождественны). Представьте, что $y^\theta(1) = 1$, тогда игрок Y будет ставить на терне, а его оппонент – всегда скидывать, ведь его эквити в банке равно нулю! И наоборот, когда $y^\theta(1) = 0$, игрок Y никогда не сможет выбрать банк.

Пример 20.5 – Игра против ясновидящего на полутора улицах

- Холдем, игра начинается с терна (полторы улицы, на терне игрок X всегда делает чек)
- Карты игрока X лежат рубашкой вниз
- Игрок Y получает некую руку *y*, выбранную случайным образом из его диапазона возможных рук Y
- Размер банка – P единиц
- Рейзы делать нельзя *

* Есть только одна очень специфичная ситуация, где игрок X захочет сделать чек/рейз, когда отношение между диапазоном игрока Y, скорректированным банком на терне и ривере попадает в очень узкий интервал значений. Поэтому чтобы сделать наши расчеты чуть проще, мы исключаем рейзы из стратегий обоих игроков.

Чтобы решить эту игру, сначала нам нужно представить себе как могут выглядеть оптимальные стратегии. Если диапазон игрока Y очень сильный (так что у игрока X остается совсем мало эквити), то он просто сделает бет и заберет банк. С другой стороны, если его диапазон содержит в себе смесь слабых и сильных рук, игрок Y сделает бет с лучшими их них, а с остальными - чек. И в случае, когда диапазон игрока Y совсем слабый, он предпочтет чек на терне, чтобы посмотреть бесплатный ривер.

Теперь давайте попробуем найти некоторые пороги. Как обычно, все значения математического ожидания будут рассматриваться с позиции игрока Y.

Пусть игрок Y ставит со всем своим диапазоном на терне. В случае колла от оппонента, банк на ривере составит $P + 2$, а его лучшие руки будут «стоить» $(P + 2)^t$. Эта линия обойдется игроку Y в одну ставку. Ставки на ривере уже включены в P^t. Если игрок Y поставит и получит фолд от оппонента, то он выиграет P единиц.

Когда левая часть неравенства ниже (ожидание игрока Y от розыгрыша 100% рук на терне) будет больше ожидания в случае фолда от игрока X, игроку X всегда следует скидывать и таким образом минимизировать ожидание своего оппонента.

$$y^{\theta}(1)(P+2)^t - 1 \geq P$$
$$y^{\theta}(1) \geq (P+1)/(P+2)^t$$
$$y^{\theta}(1) \geq (P+1)(P+3) / (P+2)(P+4)$$

Примечание от переводчика: Здесь авторы рассматривают самый плохой сценарий для игрока X, его проще всего просчитать. Если окажется, что этот сценарий выполняется, рассмотрение игры можно *заканчивать – мы нашли оптимальную стратегию. То есть здесь решение идет от обратного.*

Также, как вы можете помнить, $y^{\theta}(1)$ – это среднее эквити для всего диапазона игрока Y, с которым он и ставит на терне.

Значит, если среднее эквити диапазона игрока Y больше, чем $(P+1) / (P+2)^t$ он может делать бет и выигрывать банк. Это и будет для него оптимальной стратегией, причем у игрока X никогда не будет колла на терне. Назовем это Случай #1.

Случай #1
Условие: $y^{\theta}(1) \geq (P+1)/(P+2)^t$
Ход раздачи: игрок Y ставит, игрок X скидывает руку

Давайте рассмотрим одну интересную идею. Пусть руки игрока Y удовлетворяют условию этого случая, но на терне он делает чек и ставит на ривере. Может ли игрок X иногда уравнивать эту ставку?

Нет. В таком случае стратегию игрока X будет очень легко эксплуатировать. Пусть в диапазоне игрока Y есть $^1/_3$ часть рук, которые выиграют всегда, а оставшиеся $^2/_3$ выигрывают почти всегда. Тогда игрок Y может применять следующую стратегию:

Бет со всеми руками, у которых нет 100% эквити на терне (так что игроку Y придется сделать фолд), чтобы забрать *P* единиц из банка.
Чек с натсами на терне, бет на ривере, и молиться о колле, чтобы выиграть больше, чем *P* единиц

Поскольку оптимальная стратегия игрока X не должна давать оппоненту возможность играть по такой линии (а, значит, и улучшать свое ожидание), оптимальной стратегией для игрока X будет фолд в ответ на любую линию и на любой улице.

Получается, что если диапазон вашего оппонента настолько сильный, что вы должны скидывать свою руку в ответ на ставку или рейз, то стратегия фолда даже на следующих улицах в ответ на любой экшен будет по крайней мере ко-оптимальной.

Избежание подобной эксплуатации – еще один аргумент в пользу игры по сбалансированной стратегии.

Теперь обратимся к ситуации, когда игрок X решает всегда делать колл. Если это так, то ожидание игрока Y от чека с рукой *y* составит $(P^t)y$. То есть игрок Y сделает чек на терне, и если он выиграет на ривере, ожидание его руки составит P^t. Ожидание игрока Y от ставки с рукой *y* составит $(P+2)^t y - 1$. Тогда ему нужно всегда ставить, если:

$$y(P+2)^t - 1 \geq y(P^t)$$
$$y \geq 1/((P+2)^t - P^t)$$

Это значит, что в случае когда игрок X собирается уравнивать в каждой раздаче, игрок Y получает прибыль от своих ставок (по сравнению с чеком), если его рука *y* старше найденного нами значения.

Для большинства размеров банка P это выражение чуть меньше $^1/_2$. Например, при P= 3, мы получим 0.48. Очевидно, что игрок Y получает положительное ожидание от ставок, когда его эквити в раздаче превышает 50%. Однако ценность найденного неравенства в том, что, как оказалось, он может ставить и с руками чуть хуже, благодаря потенциальным шансам банка.

Самое время ввести еще одно обозначение. Зачастую нам нужно будет количественно определить диапазон рук, где эквити нашей руки оказывается выше некоего порога y_0. Например, группу рук $\{y \mid y \geq y_0\}$ можно обозначить через $\{y(t) \mid t \leq \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{T}$ выражает количество комбинаций. Приведем пример из распределения $\overline{\mathrm{Y}}$:

$$\{(1, {}^4/_{39}), ({}^{41}/_{44}, {}^{14}/_{39}), ({}^6/_{44}, {}^{12}/_{39}), ({}^2/_{44}, {}^9/_{39})\}$$

Представьте, что мы хотим найти в этом диапазоне все руки, чье эквити больше $y_0 = {}^1/_2$. Очевидно, что в эту группу войдут все руки с 100% эквити, с $^{41}/_{44}$ эквити, то есть {AA, JJ, AK. AQ}. Тогда $\mathcal{T}[{}^1/_2] = {}^{18}/_{39}$, поскольку выбранные нами руки в сумме имеют 18 комбинаций.

В некотором смысле $\mathcal{T}[y_0]$ является обратной функцией от $y(t)$, которая возвращает нам эквити лучшей руки из оставшихся. В свою очередь, $\mathcal{T}[y_0]$ говорит нам о том, сколько рук в заданном диапазоне имеют как минимум заданное эквити.

Тогда мы можем сказать, что:

$$t_0 = \mathcal{T}[(1/((P+2)^t - P^t)]$$

Где t_0 – это порог, на котором игрок Y должен начать ставить со всеми руками, чье эквити больше t_0 (при условии, что игрок X всегда делает колл). Кстати, можно также говорить, что эквити его диапазона ставки в таком случае составляет $y^\theta(t_0)$.

Если игрок Y действительно делает бет с таким диапазоном, то его оппоненту следует уравнивать 100% раз, пока среднее эквити диапазона игрока Y не превышает $(P+1)/(P+2)^t$ (как мы уже показали в Случае #1).

Случай #2

Условия: $y^{\theta}(t_0) \le (P+1)/(P+2)^t$

$t_0 = \mathcal{T}[(1/((P+2)^t - P^t)]$

Ход раздачи: Игрок Y делает бет, игрок X уравнивает

Итак, мы рассмотрели два крайних случая – когда эквити игрока Y стремится к 100%, и когда у игрока Y оказывается недостаточно сильная рука, чтобы не дать оппоненту возможность сделать колл.

Самое время рассмотреть третий случай, где игрок X будет применять смешанную стратегию. Здесь диапазон ставки игрока Y слишком силен, чтобы игрок X мог просто уравнивать каждый раз, но еще не настолько силен, чтобы игроку X было выгоднее делать фолд со всем диапазоном.

Вместо этого игрок X будет делать колл достаточно часто, чтобы оппонент был безразличен к блефу, но при этом и скидывать столько рук, чтобы игрок Y не смог эксплуатировать его.

Таким образом, у игрока X появится «частота фолда на терне», мы будем называть ее α', но с некоторыми оговорками. Дело в том, что поскольку мы находимся только на терне, и в игре остается еще одна улица, мы не можем использовать привычное уравнение $\alpha = 1/(P+1)$. Помните, что все руки игрока X одинаковы, следовательно, его стратегия может быть описана лишь одной переменной (частота колла/фолда на терне). На ривере же он, как и прежде, будет уравнивать $P/(P+1)$ раз.

Пусть игрок X скидывает α' раз и уравнивает $(1 - \alpha')$ раз, тогда мы можем выразить стратегию игрока Y через α'. Очевидно, что он будет ставить только когда ожидание от бета будет выше ожидания от чека.

<Y, бет с рукой x> $= \alpha'P + (1 - \alpha')(y(P+2)^t - 1)$

<Y, чек с рукой x> $= yP^t$

$$\alpha'P + (1 - \alpha')(y(P+2)^t - 1) \ge yP^t$$

$$y[(1 - \alpha')(P+2)^t - P^t] \ge 1 - \alpha'(P+1)$$

Левая сторона уравнения будет положительной при $\alpha'P < 2$, или $\alpha' < 2/P$.

Правая сторона окажется больше ноля при $\alpha' > 1/(P + 1)$. Это значит, что если игрок X решит скидывать чаше, чем $1/(P + 1)$, то игроку Y нужно начать ставить со всем диапазоном.

$$y\,[(1 - \alpha')(P+ 2)^t - P^t] \geq 1 - \alpha'(P+1)$$

$$y \geq (1 - \alpha'(P+1))/[(1 - \alpha')(P+2)^t - P^t] \qquad \textbf{(20.1)}$$

Здесь мы можем использовать еще одно свойство оптимальных стратегий. Если игрок X следует некой смешанной стратегии, которая предполагает коллы и фолды с его рукой, он должен быть безразличен к выбору конкретного действия. В противном случае он мог бы улучшить свое эквити, просто поменяв частоту колла. Предположим, что игрок Y ставит с оптимальным диапазоном $\mathcal{T}$. Тогда:

$$y^\theta(\mathcal{T})(P+2)^t - 1 = P$$
$$y^\theta(\mathcal{T}) = (P+1)/(P+2)^t$$

Теперь обратимся к свойствам $y^\theta(t)$. Это убывающая функция, так что верным будет следующее неравенство: $y^\theta(1) \leq y^\theta(t) \leq y^\theta(0)$. Мы также знаем порог $(P + 1)/(P + 2)^t$, при котором игрок Y начинает ставить со всеми руками, чье эквити выше заданного порога. Значит, должно выполняться одно из следующих условий:

#1: $y^\theta(1) \geq (P+ 1)/(P+ 2)^t$
#2: $y^\theta(0) \leq (P + 1)/(P+ 2)^t$
#3: $y^\theta(\mathcal{T}) = (P+ 1) /(P+ 2)^t$

Первый сценарий мы описали в Случае #1, когда игрок Y ставит весь свой диапазон, а игрок X всегда отвечал фолдом.

Второй сценарий был рассмотрен в Случае #2. Игрок Y ставил только с руками, у которых было положительное ожидание против 100% колла игрока X.

Третий сценарий – новый. Если $y(\mathcal{T}) > 1/((P + 2)^t - P^t)$, то пороговая рука (при которой игрок X становится безразличным к коллу) – все еще «хорошая». Таким образом, игрок Y сделает бет, но получит колл от игрока X, так как фактически мы все еще имеем дело со вторым случаем.

Однако если $y(\mathcal{T}) < 1/((P+2)^t - P^t)$, то в силу вступает уравнение 20.1, по которому игрок Y будет ставить только с руками, обладающими положительным ожиданием:

$$y \geq (1 - \alpha'(P + 1)) / [(1 - \alpha')(P + 2)^t - P^t]$$

Производим замену на $y(\mathcal{T})$ вместо y и решаем для α', получим:

$\alpha' = (1 - y(\mathcal{T})[(P+2)^t - P^t]) / (P + 1 - y(\mathcal{T})(P+2)^t)$

В этом случае игрок Y выбирает $\mathcal{T}$ таким образом, чтобы игрок X был безразличен к коллу или фолду против всего диапазона лучше, чем $\mathcal{T}$. В свою очередь, игрок X будет уравнивать или падать с частотой, которая сделает его оппонента безразличным к ставке ровно на пороге $y(\mathcal{T})$.

Случай #3
Условие: Ни первый, ни второй случай не подходят
Игрок Y ставит со всеми руками, удовлетворяющими $y^{\theta}(\mathcal{T}) = (P+1)/(P+2)^t$
Игрок X скидывает $\alpha' = (1 - y(\mathcal{T})[(P+2)^t - P^t])/(P + 1 - y(\mathcal{T})(P+2)^t)$ своих рук, уравнивает с остальными.

Теперь давайте рассмотрим несколько примеров. Для начала вернемся к руке, с которой все началось:

Рука игрока X: A♠ Q♣
Доска: A♥J♠ 8♦ 7♣
Диапазон игрока Y: {99+, AQ+}

Матрица рук игрока Y:

Рука	**Вероятность**	**Вероятность победы**
AA	$^1/_{39}$	1
KK	$^6/_{39}$	$^2/_{44}$
QQ	$^3/_{39}$	$^2/_{44}$
JJ	$^3/_{39}$	1
TT	$^6/_{39}$	$^6/_{44}$
99	$^6/_{39}$	$^6/_{44}$
AK	$^8/_{39}$	$^{41}/_{44}$
AQ	$^6/_{39}$	$^{41}/_{44}$
Сумма	1	

Мы получили производное распределение для игрока Y:

$$\{(1, {}^4/_{39}), ({}^{41}/_{44}, {}^{14}/_{39}), ({}^6/_{44}, {}^{12}/_{39}), ({}^2/_{44}, {}^9/_{39})\}$$

Пусть размер банка составляет 5 ставок. Давайте определим, какой из рассмотренных случаев нам подходит больше всего.

Случай #1:
$y^{\theta}(1)$ составляет примерно 0.48
$(P+1) / (P+2)^t = (6)/(\, ^{63}/_{8}) = \, ^{48}/_{63}$, или около $^{3}/_{4}$

Значит, это точно не случай #1, поскольку $y^{\theta}(1)$ оказывается меньше $(P+1)/(P+2)^t$.

Это и понятно – диапазон игрока Y в нашем случае недостаточно сильный, чтобы ставить в 100% случаев. Игроку X принадлежит значительная часть банка, поэтому он точно не станет скидывать все свои руки.

Случай #2:
Для начала, найдем t_0.

$$t_0 = \mathcal{T}\,[(1/((P+2)^t) - P^t)] = \mathcal{T}[^{8}/_{15}]$$

$\mathcal{T}[^{8}/_{15}]$ возвращает нам число комбинаций, чье эквити больше $^{8}/_{15}$. Вполне очевидно, что в нашем диапазоне это $^{18}/_{39}$ от всех рук. Если следующее неравенство выполняется, то мы имеем дело со случаем номер два:

$$y^{\theta}(t_0) \le (P+1) / (P+2)^t$$
$$y^{\theta}(^{18}/_{39}) \le \, ^{48}/_{63}$$

Среднее эквити старших $^{18}/_{39}$ диапазона игрока Y составляет:

$$y^{\theta}(^{18}/_{39}) = (^{4}/_{18})\,(1) + (^{14}/_{18})\,(^{41}/_{44}) \approx 0.94697$$

Значит, и этот случай также нам не подходит. Что, впрочем, также вполне ожидаемо – у игрока Y в диапазоне есть не только слабые, но также и достаточно много сильных рук. Так что игрок X не может уравнивать 100% раз, поскольку тогда его оппонент может начать ставить только с сильнейшими руками и тем самым эксплуатировать его стратегию.

Получается, что мы имеем дело со случаем #3. Тогда все, что нам нужно сделать – найти такое $\mathcal{T}$ для игрока Y, при котором бы игрок X оказался безразличным к коллу.

$$y^{\theta}(\mathcal{T}) = (P+1) / (P+2)^t$$
$$y^{\theta}(\mathcal{T}) = \, ^{48}/_{63}$$

Мы можем пойти от обратного:

$$\{(1,\, ^{4}/_{39}),\ (^{41}/_{44},\, ^{14}/_{39}),\ (^{6}/_{44},\, ^{12}/_{39}),\ (^{2}/_{44},\, ^{9}/_{39})\}$$

$^{48}/_{63}$ = [($^{4}/_{39}$)(1) + ($^{14}/_{39}$)($^{41}/_{44}$) + (y)($^{6}/_{44}$)] / ($^{18}/_{39}$+ y)

(где *y* – доля рук с эквити $^{6}/_{44}$, которые игрок Y поставит)

$^{48}/_{63}$($^{18}/_{39}$+ y) = [($^{4}/_{39}$)(1) + ($^{14}/_{39}$)($^{41}/_{44}$) + (y)($^{6}/_{44}$)]

y ≈ 0.13655

$\mathcal{T}$ = y + $^{18}/_{39}$ ≈ 0.59808

Итак, игрок Y должен ставить с 59.8% своих лучших рук. Сколько раз должен уравнивать его оппонент?

α' = (1 - y($\mathcal{T}$)[(P+2)^t - P^t]) / (P + 1 - y($\mathcal{T}$) (P+2)^t)
α' = (1 - ($^{6}/_{44}$)($^{15}/_{64}$))/(6 - ($^{6}/_{44}$)($^{63}/_{8}$))
α' ≈ 0.19651

Примерно с 19.6% своих рук.

Из этой игры можно извлечь три ценных урока.

- Потенциальные шансы – важная составляющая оптимальной стратегии в играх на нескольких улицах. Как правило, их решение оказывается весьма сложной задачей. В этой игре P^t фактически определяет величину потенциальных шансов в раздаче. Как мы увидели из приведенных выше решений, связанная стратегия для нескольких улиц может существенно отличаться от стратегии для каждой улицы в отдельности. Пусть на терне банк составляет 5 единиц. Тогда если один из игроков скидывает чаше, чем 1/(*P*+ 1) он открывает себя для возможной эксплуатации (оппонент просто начнет блефовать с большим количеством рук). Однако в нашем случае при банке в 5 единиц, игрок X должен скидывать почти пятую часть своих рук. Это обусловлено тем, что он находится в невыгодном положении не только на терне, но и на ривере. Таким образом, фолд на ранней улице предотвращает проплату вэлью бетов оппонента в дальнейшем. Значение этой идеи очень сложно недооценить – игры на нескольких улицах отнюдь не тождественны нескольким играм на одной улице, связанным воедино.
- Структура диапазонов оказывает огромное влияние на оптимальную стратегию. Когда диапазон игрока Y состоит только из натсов, его оппоненту следует всегда избавляться от своей руки. Но если он окажется несколько слабее, то игрок X всегда будет иметь достаточные шансы банка для колла.

- Игроки не могут сделать друг друга безразличными к розыгрышу определенных рук. Более того, как правило, безразличными к выбору действия они могут оказаться только на одном пороге, который и задает форму всей стратегии. В последнем случае значения $\mathcal{T}$ и α’ как раз были этими порогами. Причем если игрок Y следует оптимальной стратегии, игрок X может варьировать свой порог α’ на достаточно широком интервале, при этом ничего не теряя.

Несколько мыслей об играх с дро

В последней игре из этой главы мы рассмотрели достаточно общий случай, когда игрок X не мог поставить на терне. К слову сказать, мы проработали решения и для гораздо более сложных игр, однако, в конечном счете, решили не включать их в эту главу из-за громоздкости решений, а также условности использованных диапазонов. Но мы все же уделим немного времени обсуждению идей, которые мы почерпнули из полученных результатов.

Так, в играх с различными видами дро мы обнаружили, что гораздо лучше иметь в диапазоне немного очень сильных рук и много слабых, чем много средних дро. Представьте себе следующие распределения. В одном 25% натсов и 75% воздуха, в другом – 100% рук с 25% эквити. Если мы рассматриваем вероятность выигрыша на шоудауне, то эти диапазоны идентичны – их среднее эквити составляет 25%. Однако диапазон с натсами разыгрывается гораздо лучше в играх на двух улицах, поскольку чаще собирает вэлью с рук хуже. С дро же нам часто приходится ждать, пока ривер принесет нужную карту, и уже потом ставить на вэлью или блефовать. Интересно, что диапазоны с большим количеством сильных рук часто приближают своего обладателя к статусу ясновидящего.

В результате мы получили подтверждение уже озвученной выше идеи. В играх на нескольких улицах необходимо держать свои диапазоны сбалансированными, и иметь на каждой улице соответствующее количество натсов и блефов.

Что касается игр на полных двух улицах, мы столкнулись с рейзами на полублеф. В случаях, когда диапазон игрока Y оказывался достаточно слабым, либо содержал в себе большое количество рук-дро, игрок X делал донк-бет на терне. В свою очередь, игрок Y отвечал рейзом с сильными руками, которые балансировал полублефами. Со средними и слабыми дро он предпочитал либо делать колл, либо фолд (если он уже сбалансировал свой диапазон нужным количеством полублефов).

И третья идея, которую мы бы хотели здесь осветить, касается игр против ясновидящего. В них ценность открытых дро оказывается значительно ниже таковой для скрытых дро. Действительно, против последних неясновидящий оппонент должен скидывать α своих рук, в то время как при игре против открытых дро, он мог избавляться более чем от половины диапазона (мы уже рассматривали подобные ситуации выше).

Сложность игр на нескольких улицах пока представляет собой непреодолимое препятствие для покерного анализа – для них требуется введение многих переменных, влияющих на формы диапазонов игроков, размер банка и т.п. Более того, это касается лишь игр на двух улицах с лимитными ставками. Если бы мы знали, каким образом может изменяться сила диапазонов или каким образом несколько играемых улиц влияют на потенциал дро, нам бы не составило труда решить любую покерную игру. Но пока мы вынуждены довольствоваться решением простых (относительно) вспомогательных игр и усваивать их уроки, а также те крупицы информации, которые нам удается найти.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- В основе анализа игр на нескольких улицах лежат два принципа. Первый – чтобы иметь возможность делать правдоподобные блефы, мы должны подкреплять их сильными диапазоном. Второй – игры на нескольких улицах не тождественны нескольким связанным между собой играм на одной улице.

…………………………………………………………………………………………………..

- Если диапазон одного из игроков содержит в себе только дро, но никогда не сильные руки, его ожидаемый выигрыш, как правило, будет очень низким.

…………………………………………………………………………………………………..

- Скрытые дро гораздо более предпочтительны, чем открытые, поскольку против них оппонент вынужден чаще проплачивать.

…………………………………………………………………………………………………..

- Некоторые дро (или готовые руки) настолько сильны (или предлагаемые им шансы банка настолько малы), что мы не можем сделать их безразличными к выбору действия. Но когда мы выбираем какие дро мы хотим сделать безразличными, нам стоит выбирать сильнейшие (из числа тех, для которых это действительно возможно).

…………………………………………………………………………………………………..

- Потенциальные шансы оказывают очень большое влияние на частоту различных действий, когда в диапазонах игроков присутствуют дро. В игре против ясновидящего вся игра построена на ожидании в банке на последней улице.

…………………………………………………………………………………………………..

- Если диапазон вашего оппонента настолько сильный, что вы должны скидывать свою руку в ответ на ставку или рейз, то стратегия фолда даже на следующих улицах в ответ на любой экшен будет по крайней мере ко-оптимальной.

…………………………………………………………………………………………………..

Глава 21

Практическое занятие: Применяем теорию игр

На протяжении третьей части книги мы изучали различные вспомогательные и реальные игры, стараясь получить лучшее представление о том, какие факторы могут оказывать влияние на оптимальную стратегию в покере. Но самое сложное, естественно, - это применение выведенных правил и закономерностей непосредственно за покерным столом. Как уже было отмечено в предисловии к этой книге, мы не собираемся давать никаких конкретных советов по игре, так что даже эта глава будет посвящена более-менее общим темам (во многом из-за чрезвычайной сложности рассматриваемой игры). Для того чтобы лучше проиллюстрировать процесс применения теории игр на практике, мы приведем несколько примеров розыгрыша в обобщенных ситуациях, где поговорим о различных идеях и моделях, затронутых в этой книге.

Конечно же, мы не претендуем на то, что описанные ниже стратегии являются оптимальными или неэксплуатируемыми. Более того, мы готовы утверждать прямо противоположное – как мы уже показали, даже в простейших играх реализация оптимальной стратегии представляет определенные сложности. Мы можем только надеяться, что вы усвоите две основные темы из обсуждения ниже: баланс и правильный уровень агрессии с вэлью руками. В качестве основной игры для наших примеров мы выбрали наиболее популярную форму покера на сегодняшний день – безлимитный Холдем.

И первое, что стоит заметить – при анализе любой игры с неограниченными ставками, размеры стэков приобретают особое значение. Для некоторых примеров мы поговорим о стратегиях при различных стэках, однако чаще всего мы будем концентрировать ваше внимание лишь на некоем конкретном размере. Мы также будем игнорировать любые дополнительные источники информации, которые могут оказаться в нашем распоряжении, в том числе теллсы и статистику.

Поскольку покер является многопользовательской игрой, оптимальных стратегий для него не существует (мы еще затронем эту тему в пятой части). Поэтому мы сосредоточимся на поиске ко-оптимальных или хотя бы сбалансированных стратегий, которые мы сможем применять против большинства оппонентов в условиях почти полного отсутствия информации.

Подробное обсуждение природы такой многогранной игры как покер может занять не одну сотню страниц, так что мы приложим максимум усилий, чтобы свести все отвлеченные комментарии к минимуму. Также вы заметите, что мы не будем обсуждать конкретные раздачи, поскольку знание рук, которые оказались у игроков лишено всякого смысла в рамках этой главы. Нас будет интересовать исключительно линия розыгрыша, а также соответствующие ей диапазоны.

Мы начнем изучение практических аспектов теории игр с ситуаций на префлопе.

Игра на префлопе (оупен-рейз)

Вопреки распространенному мнению, составление стратегии для игры на префлопе далеко не простое занятие. Существует множество факторов, которые мы должны принять во внимание при выведении диапазонов, с которыми мы желаем вступить в раздачу. Например, представьте себе ситуацию, когда все оппоненты до вас скинули свои карты, и вы принимаете решение об оупен-рейзе.

Наша стратегия на префлопе фактически может быть выражена через распределение вероятностей для каждой руки, причем в нем мы должны будем указать частоту рейза (а также его размер), частоту лимпа, частоту фолда. Наш опыт в решении [0,1] игр подсказывает, что многие из этих стратегий будут чистыми, а руки, с которыми мы решим играть по смешанной стратегии, чаще всего окажутся в пороговых точках. Здесь, однако, важно сделать оговорку о том, что блокеры играют видную роль в Холдеме, так что, на наш взгляд, смешанные стратегии окажутся применимыми для еще большего числа рук.

Теперь давайте поговорим о составлении нашей стратегии. Это и впрямь непростая задача – хоть мы и можем разбить все возможные действия на категории, они все равно окажутся тесно связанными друг с другом. Например, мы можем разделить всю префлоп стратегию на три основных блока:

- Какие руки мы разыгрываем
- Делаем ли мы с ними рейз или лимп
- Какой размер рейза выбрать

Каждый из этих блоков сложен по-своему, но все они взаимозависимы. Скажем, мы принимаем решение о розыгрыше 88 из ранней позиции со стэком в 20 больших блайндов. Во-первых, существенное влияние на ответ будет оказывать наша общая стратегия для этой позиции. Пусть мы всегда делаем лимп с руками, с которыми хотим продолжать игру. Тогда 88 наверняка будет обладать положительным ожиданием в рамках такой стратегии. С другой стороны, если мы обычно делаем рейз до четырех блайндов, то такая пара, скорее всего, должна отправиться в пас.

Для того, чтобы правильно сбалансировать все доступные нам стратегические альтернативы, нам потребуется информация о каждой разыгрываемой руке. Представьте, что наша стратегия заключается в рейзе со всеми стартерами, с которыми мы собираемся вступить в игру, и фолде с остальными. Тогда нашей единственной задачей будет поиск рук, которые обладают положительным ожиданием от розыгрыша в рамках всего нашего диапазона рейза. Или мы можем всегда делать лимп с подходящими руками, при этом скидывая остальные. В этом случае мы также будем искать прибыльные руки, но уже в разрезе нового диапазона. Третьей возможной стратегией будет смесь рейзов и лимпов, но тогда нам придется разобраться с балансом между руками для рейза и лимпа таким образом, чтобы конечная стратегия не выдавала оппонентам никакой дополнительной информации.

Таким образом, нашей главной целью будет анализ ожидаемого выигрыша для всего диапазона стартовых рук и определение такого диапазона, который бы гарантировал максимальное ожидание для каждой руки. Цикличность этой задачи делает нахождение ко-оптимальной префлоп стратегии практически невозможным. Поэтому на практике мы обычно будем считать одну из вышеуказанных переменных константой, и пытаться определить значения остальных.

Мы предпочитаем никогда не делать лимп, когда все оппоненты скинули свои карты (за исключением редких случаев в блайндах). Этому есть несколько причин. Во-первых, в каждой позиции мы будем разыгрывать диапазон гораздо сильнее, чем те случайные стартеры, которые еще остались в раздаче. Таким образом, мы можем ожидать, что наша рука часто окажется лучшей, а, значит, нам стоит начать разгонять банк уже на префлопе. Во-вторых, мы убеждены, что гораздо предпочтительнее давить на блайнды и предлагать им непривлекательную цену для продолжения раздачи, чем подстраховываться от возможных потерь против сильных рук оппонентов. Как мы уже показали в этой части книги, безразличие оппонентов к выбору действия является важной составляющей оптимальных стратегий. Здесь же мы в некотором смысле будем пытаться сделать блайнды безразличными к коллу или рейзу, когда остальные игроки скинут свои карты. В-третьих, потенциальные потери, которые мы можем понести вследствие отказа от смешанной стратегии лимпов и рейзов, с лихвой окупаются тем фактом, что мы можем достаточно эффективно скрывать истинную силу нашей руки, играя по стратегии рейза.

Следующим важным аспектом является позиция. Если мы делаем рейз на полном столе из UTG+1, то за нами оказываются еще шесть игроков, чьи решения могут существенно скорректировать нашу стратегию, плюс не следует забывать о том, что у любого из них иногда окажется сильная рука. Так что если мы решимся зайти в банк с пограничным стартером, мы очень часто получим рейз или ре-рейз, что автоматически заставляет нас более ответственно подходить к выбору диапазона для продолжения игры.

Однако чем ближе мы подбираемся к баттону, тем меньше случайных рук остается перед нами, а это значит, что мы можем начать делать рейзы и с более слабыми стартерами. На баттоне же для нас открывается возможность игры с максимально широким диапазоном, не в последнюю очередь благодаря позиционному преимуществу и дополнительному ожиданию, которое оно дает. Но даже в этом случае нам следует выбирать только те руки, которые увеличат ожидание от розыгрыша всего диапазона.

Для начала, давайте представим диапазон, в котором нет никаких рук. Будем добавлять в него комбинации, которые могут улучшить наше ожидание, причем в какой-то момент мы достигнем предела, за которым каждая новая рука будет лишь уменьшать ожидаемый выигрыш. Важно понимать, что математическое ожидание для каждой новой руки мы будем рассматривать уже в контексте нового диапазона. Объясним на примере. Пусть первой рукой в нашем распределении рук окажутся AA. Пока будем считать, что мы всегда делаем рейз, причем в позиции UTG мы будем делать рейз до двух блайндов только с AA и ни с одной другой рукой.

Поскольку мы хотим найти стратегию, которую невозможно эксплуатировать, будем считать, что мы сообщили всему столу о нашем намерении делать рейз только с AA. Тогда оппоненты естественно никогда не захотят отвечать ре-рейзом ни с одной рукой. Более того, скорее всего они будут скидывать все подряд (за исключением случаев, когда их стэки составляют всего пару блайндов). Так что наше ожидание от розыгрыша с AA будет близким к сумме блайндов, поставленных в раздаче. Вполне очевидно, что место для улучшения нашей стратегии все еще имеется. Давайте добавим следующую руку, KK. Наш диапазон так и остался очень сильным, однако теперь блайнды, наверное, могут делать колл с руками, в которых есть туз. Но в общем и целом, наше ожидание все еще будет примерно равно сумме блайндов.

Далее мы будем добавлять в диапазон и другие стартеры: QQ, AKs, AKo и т.д. В какой-то момент наш диапазон окажется достаточно слабым, чтобы другие игроки за столом (особенно блайнды) захотели ввязываться с нами в раздачи. В таком случае мы должны понимать, что мы уже не получим много денег от слабых рук, однако наше ожидание от розыгрыша AA существенно возрастет. Например, если наш диапазон составляют руки {99+. AQ+], пара тузов в среднем будет оплачиваться гораздо чаще по сравнению с диапазоном {KK+}.

Составляя диапазон, который максимизирует ожидание для всех рук, мы должны принимать во внимание блокеры, а карты, которые могут выйти на доску. В большинстве игр, которые мы проанализировали в предыдущих главах, функция силы всех рук был монотонной (то есть одна рука была либо сильнее, либо слабее своих соседей). Но представьте ситуацию с общими картами в Холдеме, где у нас могут оказаться либо AJs, либо 98s. Как вы уже, наверное, знаете, AJs находится впереди случайной руки. Однако на многих флопах вероятность того, что у нас может оказаться 98s повысит ожидаемый выигрыш для всего диапазона, ведь как мы показали в главах 19 и 20, наличие натсов в диапазоне на многих досках дает нам огромное преимущество, особенно при глубоких стэках. Кстати, в последнем случае нам следует иметь еще более широкий диапазон для оупен-рейза (хотя некоторые руки в нем и будут играться по смешанным стратегиям): AXs, слабые пары, одномастные коннекторы и другие стартеры, которые имеют шанс попасть в натс на средних и низких досках.

Однако мы никогда не будем играть слабые руки ради того, чтобы запутать оппонента – помните, мы уже говорили о том, что оптимальные и ко-оптимальные стратегии никогда не включают в себя такие заведомо убыточные линии. Важно соблюдать баланс между возможностью попасть в натс и посредственным шоудаун вэлью таких рук. Например, при бесконечно больших стэках мы, скорее всего, сможем играть 52s из позиции UTG в плюс – в таком случае мы сможем изображать натс на досках вида A34sss. Однако мы никогда и ни при каких обстоятельствах не будем открывать 52o в этой же ситуации.

Последняя тема, которую мы затронем в этом разделе – размеры рейзов. Чтобы лучше продемонстрировать нашу логику, для начала мы говорим о противостоянии префлоп рейзера и блайндов. Вполне очевидно, что последние являются ключевыми участниками в любой раздаче, ведь они уравнивают рейзы чаще других игроков за столом из-за более привлекательных шансов банка. В свою очередь, префлоп рейзер может столкнуться с двумя типами ситуаций. Первая - он может получить рейз или колл от оппонента с хорошей рукой. Вторая – если ни у кого не оказалось ничего стоящего, то, скорее всего, он окажется на флопе с одним из блайндов. Поэтому при выборе размера рейза нам важно найти золотую середину между этими двумя случаями. Так, в первом мы хотим инвестировать в банк как можно меньше – тогда потенциальный выигрыш оппонента уменьшается, а со своими натсами мы всегда сможем сделать ре-рейз на префлопе или большую ставку на поздних улицах. Во втором же мы наоборот хотим сделать рейз достаточно большого размера, чтобы оказать давление на большой блайнд, но при этом и извлечь вэлью с сильными руками. Поэтому, скажем, рейз до десяти больших блайндов с сильным диапазоном часто получит лишь фолд от оппонента. Так что когда мы делаем оупен-рейз, мы хотим поставить игроков в блайндах в максимально сложное положение со средними руками. Естественно, мы не можем сделать их безразличными к коллу с сильными стартерами. Хотя точнее было бы сказать, что сделать это мы можем, однако в таком случае мы бы жертвовали слишком большой долей нашего общего математического ожидания.

Это значит, что наш бетсайзинг может и должен меняться на префлопе в зависимости от силы нашего диапазона и позиции, ведь вероятность получить рейз от сильной руки, когда мы находимся, скажем, на кат-оффе, гораздо ниже. Однако не стоит варьировать размеры своих рейзов в излишне широком диапазоне – не забывайте о том, что сокрытие информации также имеет свое место в игре, и любая очевидная стратегия может только навредить нашему ожидаемому выигрышу.

В итоге, рекомендуемая стратегия на префлопе будет включать в себя следующие элементы:

- Нам стоит делать рейз со всеми руками, с которыми мы хотим продолжать.
- Размеры наших рейзов должны варьироваться в зависимости от позиции, силы диапазона, наших ожиданий от игры на постфлопе. С появлением анте мы должны соответствующим образом подстраивать бетсайзинг.
- Мы должны составлять диапазоны таким образом, чтобы все руки, которые мы собираемся разыгрывать, имели положительное ожидание против оставшихся оппонентов (считаем, что они играют по близкой к оптимальной стратегии).

Игра на префлопе с короткими стэками (пуш)

В разделе выше мы обсуждали бетсайзинг исходя из предположения, что стэки на префлопе были достаточно большими, так что все рейзы делались в расчете на следующие улицы торговли. Однако с уменьшением эффективных стэков, зачастую такая стратегия окажется нежелательной.

Представьте, что наши стэки составляют всего три больших блайнда, и мы решаем сделать рейз до двух блайндов из позиции UTG+1. Очевидно, что мы окажемся в очень глупой ситуации, если один из блайндов решит уравнять наш рейз: в банке окажется $4\ ^1/_2$ больших блайнда, а в нашем стэке всего один, так что на постфлопе нам будет очень сложно сделать фолд с любой рукой на любой доске. В результате, оппонент может заставить нас вкладывать деньги в банк когда ему захочется, будь то префлоп или флоп. С другой стороны, если бы мы пошли в олл-ин на префлопе, то у него не было бы никакого выбора кроме колла или фолда. В главе 12 мы уже показали, что стратегические альтернативы имеют неотрицательное ожидание, а это значит, что мы должны стараться лишить нашего оппонента возможности выбирать из нескольких линий.

Но что если в нашем стэке не три, а четыре-пять-пятнадцать блайндов? В какой-то определенной точке наша стратегия изменится, и нам уже не будет выгодно идти в олл-ин на префлопе. Естественно, значение этого порога будет постоянно меняться, в том числе и в зависимости от нашей позиции. Однако мы можем попытаться прикинуть, каким он будет. Пусть мы делаем рейз из средней позиции за полным столом со следующим диапазоном:

{77+, AJs+, AQ+, KQs}

Мы можем рассчитать эквити этого диапазона против стандартного набора рук для ре-рейза, включающего в себя {TT+, AQs+, AK+}; оно составляет 41.9%. На первый взгляд может показаться, что нам придется уравнивать ре-рейз в подавляющем большинстве случаев.

Но это не совсем так. На самом деле, нам абсолютно не интересно, как стоит весь наш диапазон против ре-рейза, ведь, например, мы точно знаем, что всегда сделаем колл с тузами. Таким образом, нам нужно знать лишь эквити худших рук: у 77 будет 33.0%, у AJs 32.0%, а у KQs только 31.88%.

Пусть мы определили некий порог *x*, который обозначает стэк, при котором мы бы с радостью уравняли олл-ин после мини-рейза на префлопе. Если наш стэк будет меньше *x*, то нам следует просто делать пуш на префлопе, тем самым лишая оппонента стратегической возможности колла.

Если мы делаем рейз до двух блайндов, и кто-то ставит олл-ин на весь наш стэк, нам придется уравнять ($x - 2$) блайндов, чтобы выиграть ($x + 3.5$). Для того, чтобы мы смогли сделать колл со всем диапазоном, наше ожидание в этом банке со слабейшей рукой должно быть больше цены колла.

$$(0.3188)(2x+ 1.5) > x - 2$$
$$x > 6.83$$

Оказывается, что в этом примере нижняя граница для нашего стэка составляет примерно 7 больших блайндов. Естественно, этот результат относится лишь к определенным диапазонам оупен-рейза и ре-рейза, но мы можем решить эту задачу и в более общем виде. Вспомните несколько идей из теории игр, которые мы обсуждали выше:

- Мы должны быть безразличны к пушу со слабейшей рукой в нашем диапазоне, поскольку мы выбираем между фолдом и пушем. И поскольку слабейшая рука как раз находится на пороге, разделяющим эти два действия, что ожидание от олл-ина для нее должно быть примерно равно нулю.
- При размере стэка, являющимся порогом между пушем и обычным рейзом, мы должны быть безразличны между этими двумя действиями (хотя, скорее всего, наши диапазоны для таких линий будут различаться).

Предположим, что за нами сидит оппонент, играющий по стратегии близкой к оптимальной (давайте пока не будем принимать в расчет других игроков за столом). Если он знает, что размер нашего стэка достиг точки, в которой мы безразличны к пушу, то он должен быть готов вступить в раздачу против небольшого рейза с тем же диапазоном, с которым бы он уравнял олл-ин. Если же это не так, то нам не составит труда его эксплуатировать.

Пусть N – диапазон рук, с которым оппонент поставит олл-ин против нашего рейза в *x* единиц. Тогда в этом диапазоне также окажутся руки, которые имеют положительное ожидание и против нашего олл-ина.

Предположим, что мы делаем пуш со стэком в 6 блайндов и диапазоном {77+, AJs+, KQs}. В таком случае N включает в себя все руки, эквити которых составляет по крайней мере $^{12}/_{27}$ банка или 44.44%. Если говорить более конкретно, то это {99+, AKs, AKo}. Против такого диапазона нашей худшей рукой будет 77 с 29.91% на победу. Однако если бы мы сделали небольшой рейз, нам все равно пришлось бы уравнивать из-за хороших шансов банка:

$$0.2991\ (13.5) - 4 > 0$$

Что если мы увеличим размер стэка до 8 блайндов? Тогда порог для ре-рейза поднимется до 45.7%, то есть диапазон оппонента примет вид: {TT+, AKs, AKo}. И снова 77 будут нашей худшей рукой с 31.41% эквити. Причем мы уже не сможем делать колл после мини-рейза на префлопе:

$$(0.3141)(17.5) - 6 < 0$$

Снова сталкиваемся с результатом, который намекает, что если мы делаем оупен-рейз из ранней позиции, то порог между пушем и рейзом будет находиться в районе 7 больших блайндов.

Давайте теперь рассмотрим гораздо более широкий диапазон, с которым мы обычно окажемся на баттоне:

{22+, A2+, K2s+, K8o+, Q8s+, Q9+, J8s+,JT, T8s+, 97s+, 87s}

В этом примере наш стэк составляет 10 блайндов, мы делаем рейз до трех с намерением уравнять ре-рейз. Тогда диапазон N немного изменится и будет включать себя лишь руки с 46.5% эквити:

{33+, A2s+, A5o+, KTs+, KTo+, QJs}

После ре-рейза от такого диапазона мы должны будем уравнять 7 блайндов, чтобы выиграть банк в 14.5. С нашей худшей рукой (K8o) у нас будет 33.4% на победу против вышеназванного диапазона:

$$(0.334)(21.5) - 7 > 0$$

Значит, при стэке в 10 единиц мы должны уравнивать со всеми руками. Теперь давайте сделаем небольшую паузу и подумаем, чем олл-ин в таком случае окажется лучше рейза. Для этого нам нужно посчитать ожидание от стратегии пуша и стратегии рейза (при условии, что мы не нарушаем принцип сокрытия информации ни с одной из них).

И здесь мы столкнемся с некоторыми трудностями. Во-первых, мы редко сможем точно оценить ожидаемый выигрыш от розыгрыша некоего диапазона на постфлопе. Во-вторых, многие руки с неплохим шоудаун эквити весьма скверно играют на флопе, терне и ривере. Возьмем, к примеру, AXo – с ними мы делаем небольшой рейз (до 3 блайндов при стэках 12). На флопе в банке окажется 7.5 блайндов при эффективных стэках 9.

Вполне очевидно, что места для маневра у нас совсем не осталось. Оппонент делает чек. Как нам следует поступить? Если на флопе есть туз, то, естественно, мы должны вложить в банк все оставшиеся деньги, то же самое часто будет относиться и к ситуации, если в пару попал наш кикер. Но что делать на оставшихся 67% флопов, где у нас окажется лишь туз старший? У нас будет достаточно большое эквити, даже слишком большое, чтобы просто отдать банк оппоненту. В свою очередь, у него окажется пара в трети случаев, а еще $^1/_6$ раз у него будет какое-то дро, с которым он решит дойти до олл-ина. Иными словами, примерно 50% его рук смогут правильно выставиться на флопе – в этом смысле его «степень ясновидения» оказывается выше нашей! Более того, эффективная позиция в раздаче также находится у него – ему достаточно сделать чек и вынудить нас принимать непростое решение. В то же время каждая из наших стратегий имеет свои недостатки.

В случае чека вдогон мы дадим бесплатную карту худшим рукам, плюс позволим некоторым блефам оппонента забрать банк на терне. Однако мы можем и попасть в свои ауты, при этом вернув себе эффективную позицию в раздаче.

Небольшой бет и фолд на чек/рейз не выглядит хорошим решением против возможных блефов и полублефов, ведь тогда оппонента может превратить свои 40%-50% эквити на флопе в 100%.

Небольшой бет и колл чек/рейза будет хорошей линией против дро, но ужасной против готовых рук. Играя по такой стратегии, мы позволяем оппоненту избирательно подходить к составлению диапазона для олл-ина на флопе. То же самое касается и пуша на флопе: мы обнаруживаем силу своей руки, в то время как наш оппонент будет играть строго по шансам банка.

Но все эти трудности решаются сами собой, если мы просто поставим олл-ин на префлопе. Понятно, что при определенных стэках окажется, что мы рискуем слишком большим количеством денег. Поэтому нам необходимо найти ту точку, при которой небольшой рейз становится более предпочтительным решением.

Мы бы могли и дальше искать точки безразличия для разных стэков и диапазонов. Более того, если бы могли оценить ожидание от игры на постфлопе, то нам не составило бы труда определить оптимальные пороги для любой позиции. Однако сейчас мы ограничимся общим правилом для игры на префлопе с короткими стэками: вам стоит делать пуш (а не небольшой рейз) со стэками примерно в 6 раз больше банка до рейза.

Игра на флопе

С выходом на стол карт флопа мы получаем огромное количество информации о силе рук оппонентов. Анализируя флоп, следует обращать на два главных аспекта. Первый – кто был ***префлоп агрессором***. Игрок, сделавший последнюю ставку или рейз, будет обладать более сильным диапазоном (при условии ко-оптимальной игры), чем его оппонент, хотя у него также нередко окажутся и слабые руки, с которыми он балансировал свои натсы. Второй – ***текстура*** флопа. Этот термин скорее относится к возможным дро на руках каждого из игроков, а также к силе этих дро.

Например, доска 9♦ 8♦ 7♣ создает бесчисленное множество дро, и структура диапазонов каждого участника раздачи (вне зависимости от того, насколько тщательно они их балансировали) изменится соответствующим образом. Такие доски мы называем ***дровяными***. С другой же стороны, на доске K♠ 8♣ 2♦ никаких дро нет. Максимум, что может здесь получить оппонент – это дро на пару или две пары (с пятью-шестью аутами) Этот тип флопов называется ***сухим***. Пожалуй, самым экстремальным примером сухой доски является A♥ A♣ A♦, где существуют лишь несколько хороших дро на пару. Старшинство карт, а также их положение относительно друг друга очень сильно влияют на розыгрыш различных частей наших диапазонов.

Важное отличие реального покера от рассмотренных нами вспомогательных игр заключается в том, что роль префлоп агрессора накладывает серьезный отпечаток на всю постфлоп стратегию, ведь в покере диапазоны игроков, увидевших флоп, зачастую оказываются ассиметричными. Представьте ситуацию, где блайнд уравнивает оупен-рейз из ранней позиции. Как правило, у него окажется гораздо более слабый диапазон, ведь он делал колл и с не очень сильными руками из-за привлекательных шансов банка. Даже при глубоких стэках, когда диапазон оупен-рейза у префлоп агрессора становится шире, это правило соблюдается почти неукоснительно.

Более того, зачастую диапазон агрессора из ранней позиции оказывается настолько сильным, что после чека оппонента он вправе ставить на любом флопе и с любой рукой. Тогда игрок в блайнде должен делать чек со всем своим диапазоном (мы опустим здесь доказательство того, что если ваш оппонент скорее всего поставит со всем своим диапазоном, то чек будет как минимум ко-оптимальной стратегией).

Как легко заметить, такой расклад выгоден в первую очередь префлоп агрессору. Кто-то может сказать, что в подобной ситуации ему иногда будет выгодно делать чек вдогон, чтобы избежать чек/рейза от сильных рук блайнда и посмотреть на терн бесплатно. Однако, на наш взгляд, префлоп агрессор получит большее ожидание, если поставит сам. Ведь его диапазон часто окажется настолько сильным, что он захочет либо извлечь вэлью из оппонента, либо забрать банк блефом (поскольку они хорошо защищены натсами). Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, аналогичной случаю #1 из предыдущей главы, где один из игроков мог скидывать больше рук, чем предписывала ему оптимальная стратегия, и при этом не думать об эксплуатации со стороны оппонента.

Если же мы взглянем на эту раздачу с точки зрения игрока в блайнде, то кроме слабых рук у нас часто окажутся дро, пары, две пары, сеты и т.п., то есть комбинации, с которыми мы захотим продолжать. После ставки от оупен-рейзера, мы должны составить сбалансированную стратегию, которая бы гарантировала нам максимальное ожидание. Для этого нужно определить имеющиеся стратегические возможности, а также наборы рук, которые подходят для каждой из них.

После чека мы можем сделать рейз, колл или фолд. Очевидно, что нам следует избавиться от слабейших рук – получается, мы уже имеем диапазон для чек/фолда. Но нам также доступны варианты рейза и колла. В этой главе мы не будем анализировать все возможные варианты развития событий для каждой из этих линий, однако мы выведем несколько полезных правил, которым стоит следовать при составлении собственной стратегии.

Представьте, что эффективные стэки в раздаче сравнительно глубоки. Мы, как и наш оппонент, будем руководствоваться определенными областями чистых стратегий, которые разделены между собой порогами (это могут быть как отдельные комбинации, так и целые классы рук). Как обычно, мы будем структурировать свой диапазон таким образом, чтобы сделать другого игрока безразличным к выбору действия в пороговых точках.

Скажем, мы рассматриваем возможность чек/рейза. В таком случае у нашего оппонента будет выбор из трех действий (почти при любом размере стэка). Каждому из них будет соответствовать своя область, причем порогов будет много, поскольку в областях, не предусматривающих фолд (колл и ре-рейз), для балансировки диапазонов должны присутствовать полублефы. Более того, так как это не статичная игра, ценность рук может быть взята как на текущей, так и на будущих улицах торговли.

Когда мы делаем рейз, мы хотим, чтобы оппонент не мог эксплуатировать наш диапазон. Пусть некий порог игрока Y находится между областями y_1 и y_2. Тогда его оппонент должен разыгрывать такие руки, чтобы в пороговой точке его оппонент был безразличен к игре по y_2 и y_1. На практике такое безразличие труднодостижимо, однако мы можем использовать следующее упрощение. Нам необходимо структурировать свой диапазон таким образом, чтобы если игрок Y попытается нас эксплуатировать, расширив одну из этих областей, у нас окажется достаточно рук, которые в таком случае получат больше вэлью и тем самым компенсируют потери для другой части диапазона.

Разделим все руки игрока в блайнде на следующие категории:

1) Сильные руки (сеты, две пары, стриты и т.п.)
2) Руки средней силы (одна пара) со слабыми дро
3) Слабые готовые руки с очень сильными дро (флэш-дро с гатшотом или парой)
4) Слабые готовые руки со средними дро (флэш-дро или стрит-дро)
5) Слабые руки без дро

На самом деле, единственный способ оценить вес каждой из этих категорий в общем диапазоне – найти оптимальную стратегию с заданными диапазонами на префлопе. Но даже эта задача сегодня оказывается неразрешимой. Однако мы можем использовать это деление для того, чтобы показать, как должен примерно выглядеть наш сбалансированный диапазон для чек/рейза.

Очевидно, что больше всего от фолдов оппонента выигрывают дро, особенно слабейшие из них. Фактически, чем слабее наше дро, тем больше наше ожидание от фолда, хотя мы и должны учитывать упущенную прибыль против сильных рук и даже некоторых полублефов.

Если оппонент решает чаше уравнивать с сильными руками (а не делать рейз), мы теряем вэлью со своими натсами и средними комбинациями, однако выигрываем с дро, поскольку им не нужно вкладывать лишние деньги в банк или, того хуже, скидывать в ответ на ре-рейз.

Если оппонент чаще уравнивает со слабыми руками, то ситуация будет прямо противоположной – наши натсы и руки средней силы выиграют, а слабые дро потеряют в ожидаемом выигрыше.

Если оппонент часто делает ре-рейз, мы выиграем с натсами, но потеряем с дро (за исключением случаев, когда у нас очень сильное дро, которое стремится поставить все деньги в банк уже на флопе).

Чтобы получить близкую к оптимальной стратегию, мы должны определить руки, которые выигрывают больше всего от какой-либо конкретной линии, сбалансировать их, а затем убедиться в том, что оставшиеся комбинации (разыгрываемые по линии чек/колл) от этого никак не пострадают.

Мы уже определили, что чек/рейза больше всего подходит для слабых дро. Интересно, что зачастую они оказываются абсолютно неиграбельными, если мы по какой-то причине не можем сделать рейз. Кроме того, нам имеет смысл делать чек/рейз и со значительной частью натсов (как мы уже обсуждали ранее, размер банка должен соотноситься с силой нашего диапазона). Третий тип рук, который также должен оказаться в диапазоне чек/рейза, помогает защищаться против лузовых ре-рейзов и включает в себя очень сильные дро, наподобие стритфлэш-дро. С ними мы просто можем просто пойти в олл-ин против очередного рейза оппонента – во второй части книги мы показали, что такие руки максимизируют свое ожидание, если оказываются в олл-ине на ранних улицах (даже против очень сильных комбинаций). Худшее, что может случиться с этими руками – мы сделаем рейз, получим колл, и нам придется играть на оставшихся улицах с заметно укороченным стэком. Причем с каждым промахом ценность дро будет падать, и даже в случае выхода нужной карты вероятность проплаты будет невелика. С другой стороны, это также значит, что если оппонент начнет часто уравнивать, ожидая дисбаланса в нашем диапазоне в сторону сильных дро, наши натсы будут получить гораздо больше вэлью.

Таким образом, наш диапазон для чек/рейза должен состоять из очень слабых дро (с которыми мы будем сдаваться в ответ на ре-рейз или уже на терне), некоторых натсов (ведь часть из них нам понадобится для балансировки диапазона чек/колла) и очень сильных дро. Для линии чек/колла в этом случае остаются руки средней силы, несколько натсов и средние дро (например, натсовые флэш-дро). Однако мы уже можем сказать, что этот диапазон сбалансирован, поскольку на терне часть дро превратится в натсы, а на всех остальных картах нашим сетами, двум парам и другим подобным рукам ничего угрожать не будет. Значит, оппонент никак не сможет эксплуатировать такой диапазон.

Как видите, это обсуждение уже зашло достаточно далеко, причем ситуация, рассмотренная выше, была не из разряда чрезмерно сложных. Кроме того, мы не поговорили о размерах ставок и рейзов, а также о текстуре доски.

Эксплуатировать оппонентов сложно – для этого нам нужно по крупицам собирать разрозненные факты, которые зачастую оказываются недостоверными, анализировать их, выстраивать новые линии и кроме всего прочего стараться свести к минимуму возможность ответной эксплуатации. Однако и играть в оптимальный покер ничуть не легче – составление сбалансированных диапазонов для целых линий розыгрыша также заставит вас потратить не один десяток часов.

Теперь давайте затронем тему бетсайзинга. Здесь одним из наиболее важных факторов будет текстура флопа. Так, наличие двух одномастных карт на доске дает множество возможных флэш-дро, которые, в свою очередь, меняют дальнейшие стратегии.

Для начала рассмотрим достаточно сухую доску, KK4, на которой мы оказались в качестве префлоп агрессора с сильным диапазоном. На таком флопе имеет смысл ставить на трех улицах по стратегии геометрического приращения банка, при условии, что у нас средний стэк (так что каждая новая ставка будет находиться в районе от $^1/_3$ до целого банка). Такой бетсайзнг неплохо балансирует количество денег, которым мы рискуем против сильной части диапазона оппонента, а также вэлью, которое мы извлекаем из слабых дро. И поскольку сила всех дро на этой доске оставляет желать лучшего, нам не нужно делать большие ставки, чтобы лучшие из них оказались безразличными к выбору действия.

Важно отметить, что чем больше становятся стэки, тем реже нам стоит ставить больше банка. Вместо этого мы можем использовать стратегию геометрического приращения для четырех улиц, оставляя таким образом место для возможного рейза от оппонента. Очевидно, что на сухих досках нам никогда не стоит делать овербет на ранних улицах, иначе мы никак не сможем воспользоваться относительной силой нашего диапазона.

Однако когда на доске оказываются две одномастные карты, или же пара карт, делающих возможными различные стрит-дро, ситуация в корне меняется. Дело в том, что значительная часть диапазона колла или рейза оппонента полностью обесценится на ривере. Но хоть его набор рук и окажется более слабым, его «степень ясновидения» выше нашей, ведь только он знает, было ли у него дро или натс, плюс он никогда не будет проплачивать вэлью бет, например, с промазавшим флэш-дро.

Из-за этого нам стоит ставить больше на ранних улицах торговли, пытаясь нивелировать преимущество оппонента в экс-шоудаун вэлью ближе к концу раздачи. На досках, где возможны всего несколько дро (скажем, K♠ 7♥ 2♥), мы можем увеличить свой бетсайзинг лишь наполовину. Так, если мы раньше ставили $^1/_2$ банка, то на таком флопе имеет смысл сделать бет в $^3/_4$. С другой стороны, если доска очень дровяная, как например 9♠ 8♠ 7♦, нам придется вкладывать в банк еще больше денег, вплоть до геометрического приращения для двух улиц.

Естественно, каждая из этих подстроек в бетсайзинге потребует от нас изменения и в диапазонах. Если мы делаем ставки большего размера, то нам следует сузить разыгрываемый диапазон, чтобы избежать эксплуатации со стороны оппонента. Фактически это значит, что нам придется делать чек как со всеми средними, так и со многими очень сильными руками.

Например, на монотонной доске K♣ 7♣ 4♣ (считаем, что мы будем делать бет размером в банк), нам часто придется делать чек как с AQ без крестовой карты, так и с некоторыми сильными парами. Очевидно, что в таком случае мы даем бесплатную возможность слабым дро попасть в нужную карту на терне. Более того, текстура доски также играет на руку оппоненту, ведь любая крестовая карта в его диапазоне может получить на терне флэш. Поэтому чтобы полностью сбалансировать свой диапазон, нам стоит делать чек и с комбинациями, которым все равно, что выйдет на терне. Хорошим примером таких рук будут A♣Ax или A♣Kx – с ними мы получаем вэлью от блефов оппонента на терне и одновременно защищаем более слабую часть диапазона.

Игра на терне

Теперь давайте поговорим об игре на терне. Этот раздел будет не таким длинным, как предыдущий, во многом потому, что стратегия на терне повторяет уже рассмотренные правила. Здесь все так же важно балансировать различные стратегические возможности, иметь натсы в каждой линии розыгрыша и так далее. Отличительной чертой терна является игра с дро.

Представьте себе ситуацию, где ни одно из очевидных дро не закрылось на четвертой карте. В этом случае сила готовых рук остается примерно той же, что и на флопе, однако дро серьезно обесцениваются, ведь теперь у них остается немногим более 20% на улучшение (а иногда и меньше). Естественно, на терне могут улучшиться и какие-то средние готовые руки, если попадут в две пары или топ пару.

Поэтому в большинстве ситуаций наша стратегия на терне должна выглядеть следующим образом. Пусть мы сделали ставку на флопе с неким диапазоном рук. На терне мы сделаем чек со следующими комбинациями:

- Несколько натсов
- Руки средней силы с флопа, которые улучшились на флопе (например, попали в две пары)
- Некоторые руки средней силы, которые сделают чек/колл на терне (чаще всего в эту категорию попадают руки чуть слабее хорошей топ пары)
- Слабые руки, с которыми мы будем делать чек/фолд (слабые дро)

В то же время, стоит продолжать ставить с:

- Всеми остальными натсами
- Сильными парами и двумя парами
- Сильными полублефами (с которыми мы уравняем рейз, чтобы сбалансировать предыдущую категорию рук)
- Слабыми полублефами (с которыми мы упадем в ответ на рейз).

Конечно, это деление диапазонов не стоит считать истиной в последней инстанции – на него будут оказывать влияние вышедшие карты, текстура доски и т.д. Однако в каждом случае и для каждой возможной линии мы должны выбрать такой диапазон, который наш оппонент не смог бы эксплуатировать. Многие игроки часто спотыкаются именно на терне: они делают рейз на префлопе и получают колл, затем ставят на флопе и видят колл, а на терне решают сдаться. Они могли бы сделать свою стратегию менее эксплуатируемой, если бы стали делать чек с руками, готовыми как минимум уравнять ставку на терне.

Даже когда на терне закрывается очевидное дро, мы можем следовать тем же самым принципам. Но поскольку теперь многие полублефы превратились в сильные готовые руки, имеет смысл перевести некоторые слабые комбинации из диапазона чек/колла в диапазон бета, а худшие руки из диапазона бета в диапазон фолда. Интересно, что зачастую закрывшееся дро на терне создает множество производных дро. Например, третья карта к флэшу даст тузу той же масти натсовое флэш-дро против всех только что появившихся флэшей и других готовых рук.

Стоит отметить, что натсовые бэкдор флэш-дро занимают особое место в оптимальной стратегии. Во-первых, с ними мы получаем возможность попасть в натс к риверу, если выйдут две подходящие карты – лишнее эквити никогда не помешает. Во-вторых, уменьшается вероятность того, что у оппонента окажется сильное дро, с которым он захочет сделать рейз на флопе. К примеру, у вас A♣ K♦ на доске K♣ 7♣ 2♥, и дело заканчивается пушем в ответ на ваш рейз. Если бы в вашей руке был, скажем, червовый туз, то у оппонента вполне могло бы оказаться натсовое флэш-дро с 12 аутами. Но с A♣ вам следует чаще задумываться о фолде, так как теперь диапазон оппонента в этой ситуации никогда не включает в себя руки вида A♣X♣ (хоть он и не знает об этом).

Говоря о блокерах, нельзя не отметить, что они становятся не просто важным, а ключевым элементом игры на ривере.

Игра на ривере

Играть на ривере проще всего. Однако на этой улице банк уже, как правило, достаточно большой, так что каждая ошибка может дорого вам обойтись. Так, на ривере сильнее всего проявляются ошибки при составлении диапазонов, сделанные на ранних улицах торговли. На самом деле, мы нисколько не преувеличим, сказав, что цель покера – это оказаться на ривере со сбалансированным диапазоном, состоящим из натсов, средних рук (которые не смогли реализовать свой потенциал из-за вышедших карт) и блефов, причем его сила должна находиться в прямой зависимости от размера банка.

Стратегия на ривере будет напомнить [0,1] игры с ассиметричными распределениям, но с некоторыми оговорками. Во-первых, сила каждой руки в диапазоне будет величиной дискретной (не непрерывной). Во-вторых, блокеры будут оказывать существенное влияние на наши решения.

Однако мы также можем извлечь некоторые уроки и из игры AKQ, в том числе превентивные ставки. Как вы можете помнить, это небольшие беты на ривере со смешанным диапазоном, состоящим из натсов, а также рук, которые достаточно сильны, но не хотели бы столкнуться с большой ставкой. Такими бетами мы заставляем оппонента либо делать блеф рейз (тогда мы выигрываем с натсами), либо фолд (мы не отдадим банк блефам), причем мы не застрахованы и от рейза против наших средних рук - в таком случае нам придется скинуть свою руку. Размер превентивных ставок часто должен составлять от ${}^{1}/_{10}$ до ${}^{1}/_{6}$ от размера банка.

Наиболее распространенным сценарием, где такая ставка будет уместной, является выход очевидного дро когда наш диапазон содержит значительное число флэшей, а также топ пар, оверпар и других рук, которые бы не хотели столкнуться с большой ставкой. Здесь мы вполне можем применить смешанную стратегию, включающую в себя как небольшие превентивные ставки, так и стандартные вэлью беты.

Что касается блокеров, то зачастую они помогут нам решить, с какими руками стоит блефовать. Выбирая из комбинаций, которые имеют достаточно низкое шоудаун вэлью, мы должны останавливаться на тех, что исключают из диапазона оппонента как можно большее число хороших комбинаций. И наоборот, когда мы принимаем решение о колле, нам стоит обращать внимание на карты, которые находятся у нас в руке.

Представьте ситуацию из семикарточного Стада, где у оппонента возможен флэш, а нам зашли две пары. В таком случае, на ривере оппонент фактически становится ясновидящим (если только нам не зашел фулл хаус): он будет блефовать достаточно часто, чтобы мы оказались безразличны к коллу когда у нас нет блокеров на его флэш. Однако если у нас есть карты нужной масти, то для нас колл всегда будет более предпочтителен, чем фолд.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- Иногда может показаться, что оппонент эксплуатирует нас на какой-то конкретной улице несмотря на то, что мы играем по близкой к оптимальной стратегии. Однако зачастую это происходит из-за того, что он пожертвовал частью своего ожидания на предыдущей улице, чтобы получить перевес сейчас. Вспомните ситуацию из главы по игры на нескольких улицах, где открытой готовой руке нужно было уравнивать на ривере всего один раз из шести, поскольку она уже заставила дро вложить в банк деньги еще на терне.

…………………………………………………………………………………………………..

- Для каждой линии должен существовать свой сбалансированный диапазон. Области вэлью бетов, полублефов и блефов должны рассматриваться как часть единой стратегии.

…………………………………………………………………………………………………..

- Любая линия, которая не оканчивается фолдом, должна содержать в себе натсы, поскольку иначе оппонент сможет безнаказанно нас эксплуатировать, делая овербеты в каждой раздаче.

…………………………………………………………………………………………………..

- Текстура доски оказывает огромное влияние на структуру диапазонов. Для того, чтобы составить стратегию для ранних улиц торговли необходимо понимать все возможные исходы на различных картах.

…………………………………………………………………………………………………..