Matematik A, STX
21. maj 2019
Gammel reform

www.matematikhfsvar.page.tl
matematikuniverset@hotmail.com

Maj 2019

NB: Løsningerne er ikke garanteret fejlfrie. Løsningerne skal bruges til indlæring, så det handler om ikke at skrive af.

Delprøve 1

Opgave 1
Ligningssystemet givet
$x+y=1$ og $2x-y=17$

Lad $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$ som indsættes i $2x-y=17$, så
$2x-(1-x)=17 \Leftrightarrow 2x-1+x=17 \Leftrightarrow 3x=18 \Leftrightarrow x=6$

Så $x=6$ giver $y=1-6=-5$

$x=6 \wedge y=-5$

Opgave 2
$\vec{a}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{bmatrix} 1+t \\ -4 \end{bmatrix}$
To vektorer er ortogonale kræver skalarproduktet er lig 0.
$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+t \\ -4 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow 4\cdot(1+t)+5\cdot(-4) \Leftrightarrow 4t=16 \Leftrightarrow t=4$

Opgave 3
Tallet b fortæller, at i år 2015 var prisen for den bestemte vare lig med 75000kr. Tallet $a=0.98$ fortæller, at efter år 2015 faldt prisen med 2% pr. år, da $1-0.98=0.02$.

Opgave 4
$F(x)=\int\left(\frac{1}{x}+6\cdot x\right)\mathrm{d}x=\ln(x)+3x^2+C$
Her løses
$10=\ln(1)+3\cdot 1^2+C \Leftrightarrow 10=3+C \Leftrightarrow C=7$

Dvs.
$F(x)=\ln(x)+3x^2+7$

Opgave 5
$f(x)=x^2\cdot e^x$
$f'(x)=x^2\cdot e^x+2\cdot x\cdot e^x$

Indsættes i diff. ligningen
$x^2\cdot e^x+2\cdot x\cdot e^x=\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot x^2\cdot e^x \Leftrightarrow x^2\,e^x+2\,x\,e^x=x^2\,e^x+2\,x\,e^x$
f er en løsning.

Opgave 6
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+k\cdot x=x+k \Leftrightarrow x^2+k\cdot x-x-k=0 \Leftrightarrow x^2+(k-1)\cdot x-k=0$
En løsning kræver $d=0$, så
$0=(k-1)^2-4\cdot 1\cdot(-k) \Leftrightarrow 0=(k-1)^2+4k \Leftrightarrow k^2+2k+1=0 \Leftrightarrow (k+1)^2=0 \Leftrightarrow k=-1$

Delprøve 2

Opgave 7

$restart :; with(Gym) :$

a)

$\vec{a} := \langle 2, -4 \rangle :; \vec{b} := \langle 3, 4 \rangle :$

$A = det(\vec{a}, \vec{b})$

$$A = 20 \tag{1}$$

b)

$proj(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Opgave 8

$restart :; with(Gym) :$

a)

$AB := 4 :; AC := 5 :$

$BC := \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot Cos(55)}$

$$BC := 4.249346133 \tag{3}$$

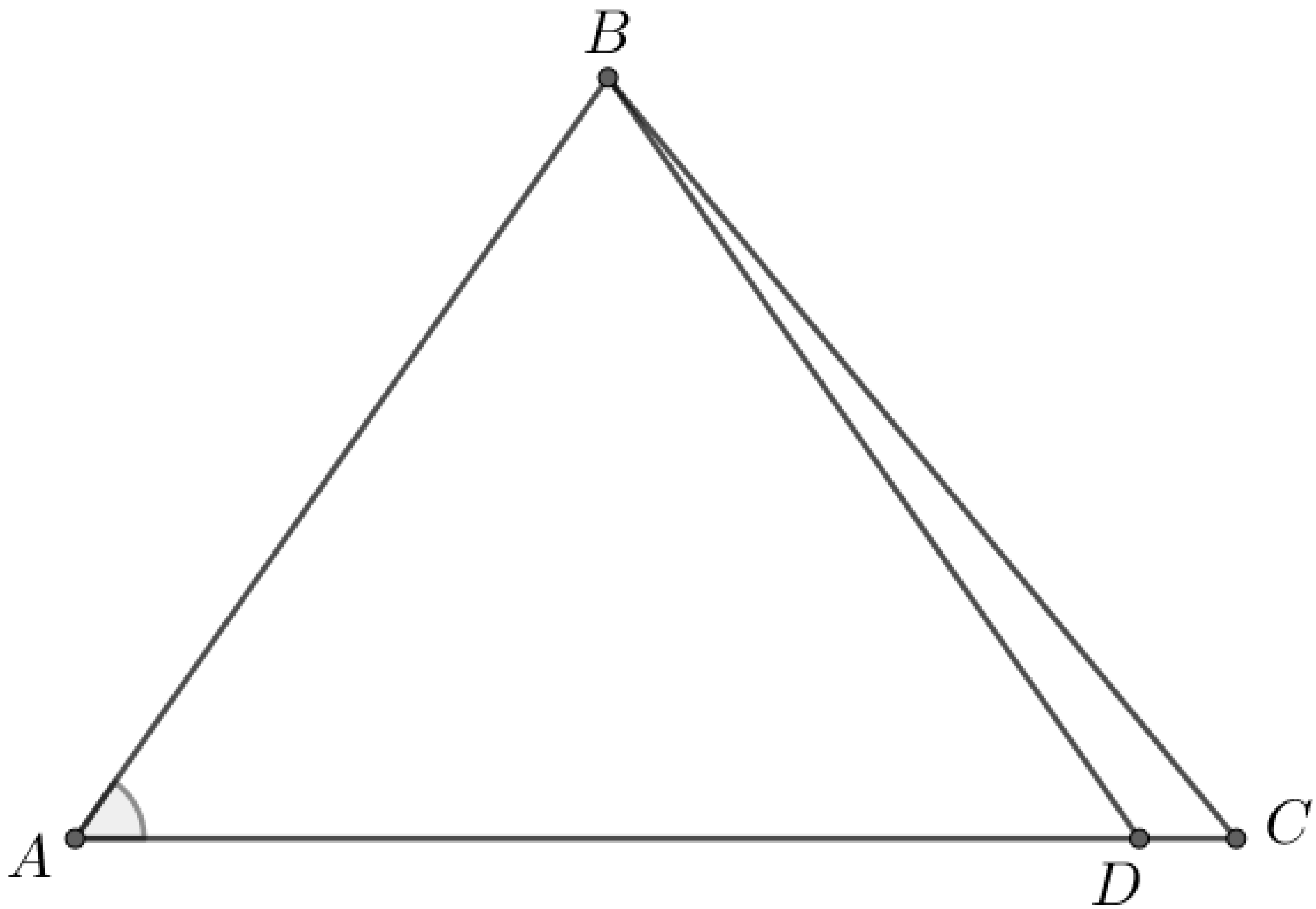
$\mathrm{O} = AB + BC + AC$

$$\mathrm{O} = 13.24934613 \tag{4}$$

Dvs. 13.25 er omkredsen af trekanten ABC.

b)

For at gøre livet nemmere, laves en skitse af trekanten.



Da ABC og BCD har samme højde, så sammenlignes grundlinjerne for AD og DC. Trekanten ABD er ligebenet, så

$AD = 2 \cdot Cos(55) \cdot 4$

$$AD = 4.588611488 \tag{5}$$

Længden $DC = AC - AD$, dvs.

$DC = 5 - 4.588611488$

$$DC = 0.411388512 \tag{6}$$

Så forholdet F er

$F = \dfrac{4.588611488}{0.411388512}$

$$F = 11.15396117 \tag{7}$$

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

a)

$A_{cirkeludsnit} = \dfrac{105}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 \mathrm{cm}^2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} A_{cirkeludsnit} = 91.631\ \mathrm{cm}^2$

b)

$A_{indre} = \dfrac{105}{360} \cdot \pi \cdot (10 - x)^2$

$$A_{indre} = \frac{7\,\pi\,(10 - x)^2}{24} \tag{8}$$

$A_{ydre} = \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot (10-x)^2 = \frac{175\,\pi}{6} - \frac{7\,\pi\,(10-x)^2}{24} = -\frac{7\,\pi\,x\,(x-20)}{24}$

$= \frac{7\,\pi\,x\,(20-x)}{24}$

$0 < x < 10$

c)

$\frac{7\,\pi\,x\,(20-x)}{24} = 45$

$$\frac{7\,\pi\,x\,(20-x)}{24} = 45 \tag{9}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{2\left(-35\,\pi + \sqrt{1225\,\pi^2 - 1890\,\pi}\right)}{7\,\pi}\right], \left[x = \frac{2\left(35\,\pi + \sqrt{1225\,\pi^2 - 1890\,\pi}\right)}{7\,\pi}\right]\right] \tag{10}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[x = 2.8665], [x = 17.134]] \tag{11}$$

Dvs. $x = 2.8665$cm

Opgave 10

$restart:; with(Gym):$

a)

$C(t) := 225 \cdot \sin(0.262 \cdot t - 2.88) + 250:$

Tallet $a = 225$ (amplituden) fortæller, at iltkoncentrationen kan variere med op til 450 μM pr. døgn ifølge modellen.

b)

$intervalsolve(C'(t) = 0, 0..24)$

$$[4.996960585, 16.98777224] \tag{12}$$

Her undersøges de to løsninger vha. dobbelte afledede. Her søges maksimum, så der skal gælde følgende, dvs. output skal være *true*:

$is(C''(4.996960585) < 0); is(C''(16.98777224) < 0);$

$$false$$

$$true \tag{13}$$

Så $t = 16.98777224$ eller oversat: 17 timer efter midnat vil iltkoncentrationen være maksimal.

Opgave 11

$restart:; with(Gym):$

a)

$f(x) := (4-x) \cdot x:$

$g(x) := 2 \cdot f(x):$

$f(x) = g(x)$

$$(4-x)\,x = 2\,(4-x)\,x \tag{14}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 4]] \tag{15}$$

Arealet:

$$M = \int_0^4 (g(x) - f(x))\, dx$$

$$M = \frac{32}{3} \quad (16)$$

b)

$$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^4 \left((g(x))^2 - (f(x))^2 \right) dx$$

$$V = \frac{512\,\pi}{5} \quad (17)$$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

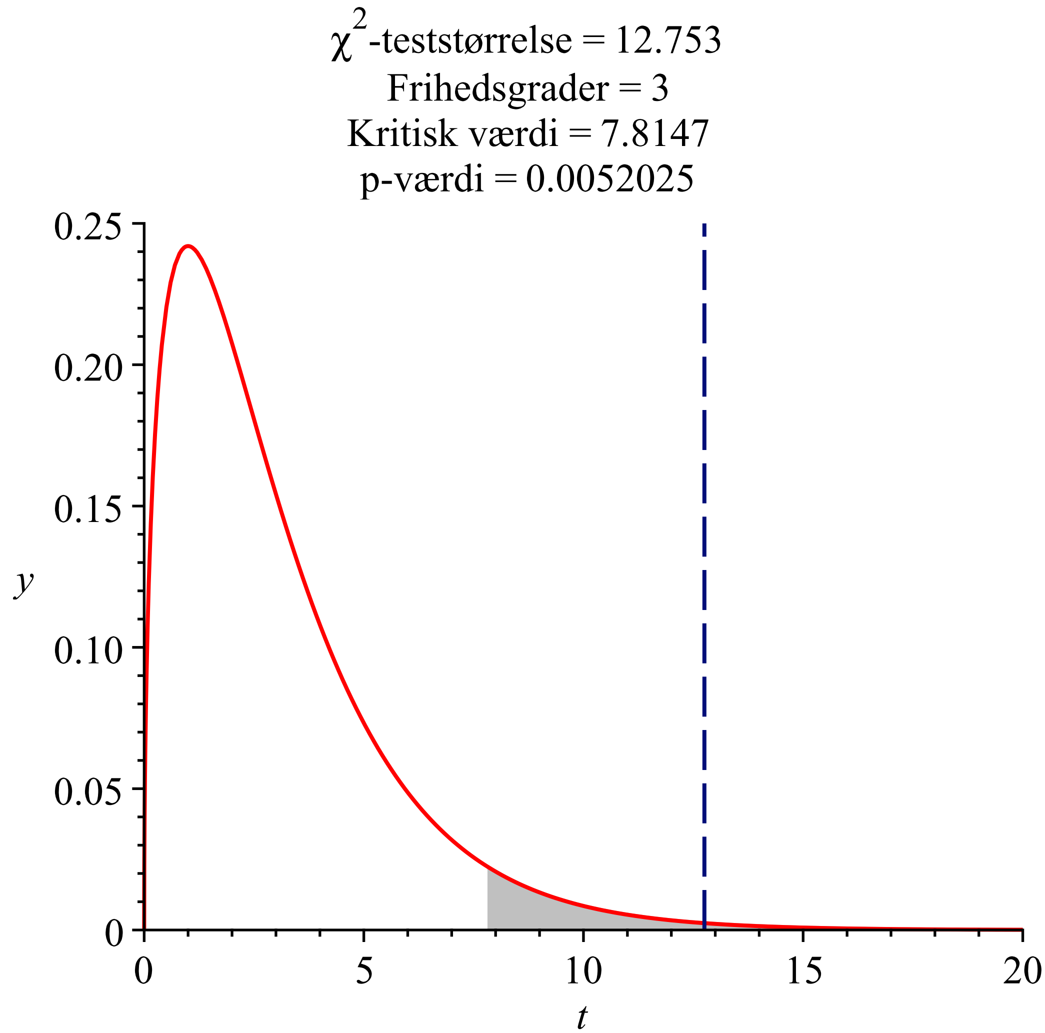
a)

Forventet	$250 \cdot 0.34$ 85.00 **(18)**	$250 \cdot 0.26$ 65.00 **(19)**	$250 \cdot 0.14$ 35.00 **(20)**	$250 \cdot 0.26$ 65.00 **(21)**

b)

OBS := [110, 63, 28, 49] :; *FORV* := [85, 65, 35, 65] :

ChiKvadratGOFtest(*OBS*, *FORV*)



Heraf forkastes nulhypotesen. Der er signifikans forskel på sangdroslernes sneglefangst og fordelingen af snegle i habitatet.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x) := x + \frac{x}{x^2+1}$:

a)

$f'(x) = 1$

$$1 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = 1 \qquad \textbf{(22)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -1], [x = 1]] \qquad \textbf{(23)}$$

Førstekoordinaterne er hhv. $x = -1$ og $x = 1$ for hver af de to tangenter.

b)

$f'(x) = 0$

$$1 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \textbf{(24)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x=\frac{\sqrt{-2-2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right],\left[x=-\frac{\sqrt{-2-2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right],\left[x=\frac{\sqrt{-2+2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right],\left[x=-\frac{\sqrt{-2+2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right]\right] \quad (25)$$

Ingen reelle løsninger. Enten er *f* voksende eller aftagende. Der er ingen vandrette tangenter. Der udvælges et tilfældigt tal som f.eks. 1

$f'(1)$

$$1 \quad (26)$$

Da $f'(1)=1>0$, så er *f* voksende.

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

a) Her indsættes 90^oC.

$\frac{dy}{dt}=0.0447\cdot(110-90)$

$$\frac{dy}{dt}=0.8940 \quad (27)$$

Dvs. vandtemperaturens væksthastighed er 0.984^oC/min.

b)

$dsolve(\{y'(t)=0.0447\cdot(110-y(t)),y(0)=80\},y(t))$

$$y(t)=110-30\,\mathrm{e}^{-\frac{447\,t}{10000}} \quad (28)$$

$y(t) := 110-30\,\mathrm{e}^{-\frac{447\,t}{10000}}$

$$y := t \mapsto 110-30\,\mathrm{e}^{-\frac{447\,t}{10000}} \quad (29)$$

$y(t)=105$

$$110-30\,\mathrm{e}^{-\frac{447\,t}{10000}}=105 \quad (30)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t=\frac{10000\ln(6)}{447}\right]\right] \quad (31)$$

$evalf[5](\%)$

$$[[t=40.084]] \quad (32)$$

Dvs. efter 40 min. opstår der et nyt udbrud.

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

a)

$2\cdot(-2)+2\cdot3-1-1=0$

$$0=0 \quad (33)$$

Så *P* ligger i planen α.

b)
Her kan man skrive to svarmuligheder, selvom en er nok.
Først opstilles en parameterfremstilling ud fra planens normalvektor samt punktet *P*.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2t \\ 3 + 2t \\ 1 - t \end{bmatrix} \quad \textbf{(34)}$$

Nu anvendes dist-formlen. (dist=6)

$$6 = \frac{|2 \cdot (-2 + 2t) + 2 \cdot (3 + 2t) - 1 \cdot (1 - t) + (-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 2], [t = -2]]$$

Her indsættes $t = -2$ eller $t = 2$ i parameterfremstillingen (vælg selv)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(35)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(36)}$$

Så en af de søgte ligninger er:

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 6^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36 \quad \textbf{(37)}$$

Eller

$$(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6^2$$

$$(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 36 \quad \textbf{(38)}$$