Matematik B-niveau HF
25. maj 2020

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 25/05/20. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: `matematikuniverset@hotmail.com`

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Ud fra koordinatsystemet aflæses vektorerne. Der aflæses hhv.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) Tværvektoren til vektor $\vec{a}$ skrives $\hat{\vec{a}}$. Vektorkoordinaterne til tværvektoren er,

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Opgave 2.

(a) Funktionen differentieres ledvist.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x) + x^2)' && (3)\\ &= (\ln(x))' + (x^2)' && (4)\\ &= \frac{1}{x} + 2x^{2-1} && (5)\\ &= \frac{1}{x} + 2x, \quad x > 0. && (6) \end{aligned}$$

Opgave 3.

(a) Forklaringerne kan ses nedenfor.
Trin 1: Ligningen er skrevet op.
Trin 2: Første kvadratsætning bruges på højre side.
Trin 3: Fratrækker $x^2 + 2x + 1$ på begge sider.
Trin 4: Reducerer til formen $ax^2 + bx + c = 0$.

(b) Andengradsligningen løses.
Metode 1: Lad $a = 1$, $b = 4$, $c = -12$. Så er

$$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 - (-48) = 64 = 8^2. \tag{7}$$

Da $d > 0$ eksisterer der to reelle løsninger. Disse bestemmes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4 = \begin{cases} -2+4 = 2 \\ -2-4 = -6 \end{cases} \tag{8}$$

Dvs. løsningerne til ligningen er $x = -6 \vee x = 2$.
Metode 2: Hvilke to tal lagt sammen giver $b = 4$ men ganget sammen giver $c = -12$? (svarende til ligningssystemet

$$r_1 + r_2 = b,$$
$$r_1 \cdot r_2 = c,$$

som man kan løse pr. håndkraft.) Det gør tallene 6 og -2. Dermed er,

$$(x+6)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2. \tag{9}$$

Dvs. løsningerne til ligningen er $x = -6 \vee x = 2$.

Opgave 4.

(a) Af grafen aflæses hældningen for tangenten ved $x = 3$ (skrives $f'(3)$) til at være 0, dvs. $f'(3) = 0$.

(b) Intervallet hvor $f'(x)$ er positiv er $]1;3[$.

Opgave 5.

(a) Middelværdien beregnes ved $\mu = n \cdot p$. Her er $n = 10$ og $p = 0.38$. Dermed er $\mu = 10 \cdot 0.38 = 3.8$.

(b) Ved køb af 10 lodder er chancen for at Mette vinder netop 2 genvinster lig 14.2%.

Opgave 6.

(a) Formlen for hjertet opstilles. Først regnes arealet af et kvadrat og arealet af en cirkel (netop fordi der er to halve cirkler). Man har,

$$A_{\text{kvadrat}} = x \cdot x = x^2. \tag{10}$$

og

$$A_{\text{cirkel}} = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}. \tag{11}$$

Det samlede areal er

$$A = A_{\text{kvadrat}} + A_{\text{cirkel}} = x^2 + \frac{\pi x^2}{4}, \quad x > 0. \tag{12}$$

Delprøve 2.

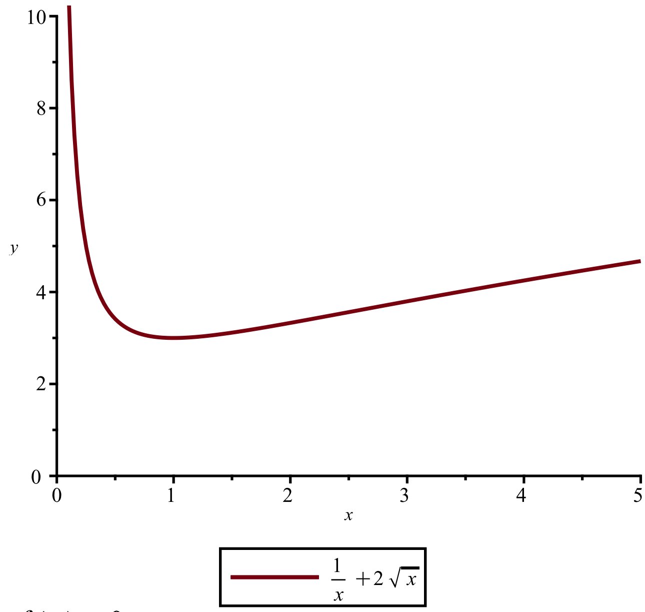
Se næste side. Løsninger er lavet i Maple 2020.

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik B delprøve 2, 25. maj 2020.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 7: Funktionen defineres. $f(x) := \frac{1}{x} + 2 \cdot \mathrm{sqrt}(x)$:

(a) Grafen for $f(x)$ tegnes.
$plot(f(x), x = 0..5, y = 0..10, legend = f(x))$



(b) Her løses ligningen $f'(x) = 0$.
$solve(f'(x) = 0, x)$

$$1 \tag{1}$$

Dvs. $x = 1$. Ud fra grafen har man, at $x = 1$ passer til at være et minimum. Koordinatsættet til dette bestemmes. Man kræver y-koordianten.
$f(1) = 3$
Dermed er koordinatsættet $(1; 3)$.

Hvis ikke man havde grafen, så kan man argumentere på andre måder. Den ene metode er at lave fortegnsvariation omkring $x = 1$. Vælg $x = \frac{1}{2}$ og $x = 2$.

$f'\left(\frac{1}{2.}\right) = -2.585786438$
$f'(2.) = 0.4571067814$
Ovenstående bekræfter, at $x = 1$ er et minimum.

En anden metode er at benytte den anden afledt funktion og tjekke, at $f''(x_0) > 0$. Her er $x_0 = 1$. Dvs.

$f''(1) = \frac{3}{2}$
Det passer.

Opgave 8:
(a) Man har $n = 5017$ og $p = 23.1\%$, så konfidensintervallet er

$$\left[\frac{23.1}{100} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{23.1}{100} \cdot \left(1 - \frac{23.1}{100}\right)}{5017}}, \frac{23.1}{100} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{23.1}{100} \cdot \left(1 - \frac{23.1}{100}\right)}{5017}}\right]$$

$$[0.2193371905, 0.2426628095] \quad \textbf{(2)}$$

Konfidensintervallet (afrundet) er: $[0.219, 0.243]$.
Hvis du bruger 2 istedet for 1.96, så er det også helt i orden!

(b) Konfidensintervallet fra (a) er fra år 2018. I 2016 var 21.1% af alle danskere rygere. Tallet 21.1% ligger til venstre for intervallet og dermed ikke med. Det giver desværre en fremgang i antallet af danske rygere.

Opgave 9:
$restart : with(Gym) :$
(a) Der foretages andengradsregression på tallene.
$L1 := [-11.5, 0, 11.5] :$
$L2 := [0, 20, 0] :$
$f(x) := PolyReg(L1, L2, 2, x) :$
$f(x)$

$$-0.151228733459357\, x^2 - 2.41366066797249\; 10^{-16}\, x + 20.0000000000000 \quad \textbf{(3)}$$

Dvs. $a = -0.15$, $b \approx 0$ (overvej!) og $c = 20$.

(b)
Fra tabellen har man, at ved $x = 0$ er $y = 20$. Dvs. buen må have den maksimale højde på 20m. Fra tabellen har man desuden -11.5 og 11.5. Lægges disse tal numerisk sammen har man $|-11.5| + 11.5 = 11.5 + 11.5 = 23$. Dvs. den maksimale bredde på jorden er 23m.

Har man ikke styr på teorien kan man regne og få svaret. Ved $x = 0$ må buen være højst, så $f(0) =$ 20.0000000000000
Dvs. buen må have den maksimale højde på 20m. Bredden af buen kan regnes ved at løse ligningen $f(x) = 0$.
$solve(f(x) = 0, x)$

$$-11.50000000, 11.50000000 \quad \textbf{(4)}$$

Læg tallene numerisk sammen.
$\mathrm{abs}(-11.5) + 11.5$

$$23.0 \quad \textbf{(5)}$$

Dvs. den maksimale bredde på jorden er 23m.

Opgave 10:
(a) Cirklen og den rette linje tegnes nemmest ind i GeoGebra, men du kan også i Maple.

$with(plots):$

$x(t) := 7 + 1.5\cdot t :; y(t) := 4 + 2\cdot t :$

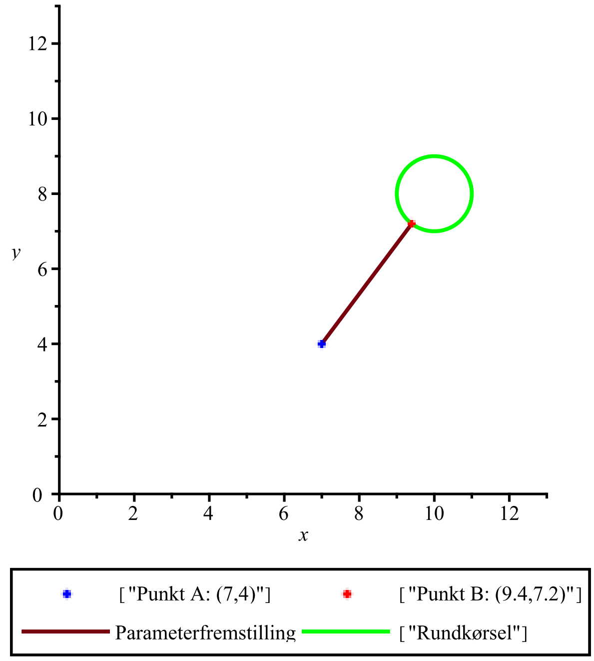
$Peqn := plot([x(t), y(t), t = 0..1.6], x = 0..13, y = 0..13, legend = [\text{"Parameterfremstilling"}]):$

$Cirk := implicitplot\left((x-10)^2 + (y-8)^2 = 1^2, x = 9..11, y = 7..9, legend = [\text{"Rundkørsel"}], color = green\right):$

$B := pointplot([9.4, 7.2], legend = [\text{"Punkt B: (9.4,7.2)"}], color = [\text{"Red"}]):$

$A := pointplot([7, 4], legend = [\text{"Punkt A: (7,4)"}], color = [\text{"Blue"}]):$

$display(Peqn, Cirk, A, B, scaling = constrained)$



(b) Man kan finde koordinatsættet til B ved at løse et ligningssystem. Vi har:

$x(t); y(t)$

$$7 + 1.5\,t$$

$$4 + 2\,t \tag{6}$$

Som indsættes i ligningen for cirklen. Det giver

$(x(t) - 10)^2 + (y(t) - 8)^2 = 1^2$

$$(-3 + 1.5\,t)^2 + (-4 + 2\,t)^2 = 1 \tag{7}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 2.400000000], [t = 1.600000000]] \tag{8}$$

Man ser, at linjen skærer cirklen to steder (i plottet kun et sted). Det første sted findes ved 1.6. Dvs. koordinatsættet til B er

$[x(1.6), y(1.6)]$

$$[9.40, 7.2] \tag{9}$$

(c) Det tager Mads ca. 1.6 minutter (1 minut og 36 sekunder) for at nå fra punktet A til B.

Opgave 11: Funktionen defineres.

restart : *with*(*Gym*) :

$f(x) := \dfrac{294}{1 + 41.35 \cdot \exp(-0.082 \cdot x)}$:

(a) Man indsætter $x = 50$. Dvs. 50 dage.

$f(50) = 174.4517099$

Dvs. når en rotte er 50 dage gammel, vejer den ca. 174.5g.

(b) Anvend den afledte funktion.

$f'(30) = 0.848019941180944$

Dvs. når en rotte er 30 dage gammel, stiger dens vægt pr. døgn med 4.1g.

Opgave 12:

Tabellens data indlæstes.

restart : *with*(*Gym*) :

$L1 := [22, 21, 20, 22, 24, 22, 26, 27, 26, 26, 27, 34, 33, 32, 38, 38, 38, 43, 44, 41, 44, 44, 44, 42, 42, 40, 40, 43, 46, 49, 46, 45, 48, 46, 45, 45, 46, 47, 46, 48, 45, 47, 45, 54, 51, 53, 55, 59, 61, 64, 64, 61, 68, 65, 66, 83]$:

$L2 := [65.9, 66.5, 68.6, 68.6, 70.8, 73.4, 60.1, 61.9, 62.8, 64.3, 68.7, 67.7, 68.8, 79, 64.5, 80.7, 80.8, 62.7, 65.2, 65.6, 68, 69, 70.7, 70.8, 73.6, 76.3, 76.7, 87, 61.2, 65.6, 68.3, 68.7, 69.8, 70.5, 70.6, 70.6, 71.6, 72.1, 74.5, 76.8, 77.8, 80.2, 88.9, 73.3, 76.9, 87.8, 74.5, 82, 92, 98.8, 105.8, 118.9, 89.8, 99.5, 130.8, 132.9]$:

(a) Lineær regression foretages på $L1$ og $L2$.

$f(x) := LinReg(L1, L2, x)$:

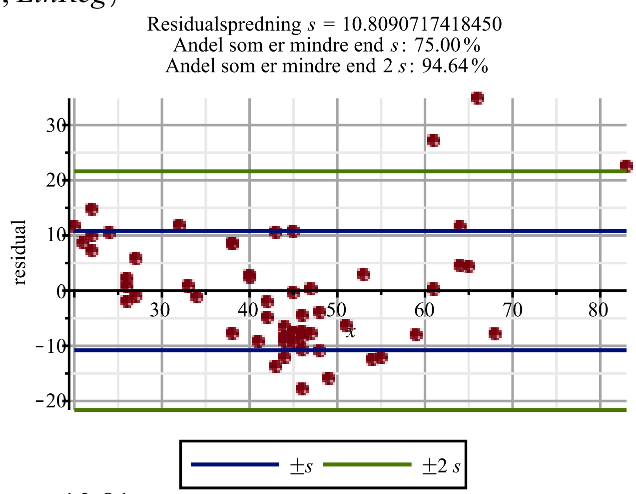
$f(x)$

$$0.848019941180944\, x + 39.9800593495949 \tag{10}$$

Dvs. $a = 0.848$ og $b = 39.98$.

(b) Der laves et residualplot og residualspredningen bestemmes heraf.

plotResidualer(*L1*, *L2*, *LinReg*)



Residualspredningen er $s = 10.81$.

(c)

Intervallet er $[-2 \cdot 10.81, 2 \cdot 10.81] = [-21.62, 21.62]$

Her kan man konstatere, at der ligger 3 residualer udenfor intervallet.

Ift. opgave 12c. Hvis ikke man havde plottet, eller plottet bestod af utrolig mange residualer, at man ikke orker at tælle dem, så er der en metode til at finde residualerne der ligger udenfor intervallet $[-21.62, 21.62]$.

$s := 10.8090717418450:$

$with(Statistics):$

$res := Fit(a \cdot x + b, L1, L2, x, output = residuals):$

$grupperData(res, \langle \min(res), -2\,s, 2\,s, \max(res) \rangle)$

$$\begin{bmatrix} -17.7889766439183 \,..\, -21.61814348 & 0 \\ -21.61814348 \,..\, 21.61814348 & 53 \\ 21.61814348 \,..\, 34.8506245324628 & 3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ud fra ovenstående kan vi se, at 3 residualer ligger udenfor intervallet. Tak til Dennis Pipenbring for en god YouTube video. :-)

https://youtu.be/cQ0bQ9v6vqs