Matematik B, STX

25. maj 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Begge trekanter er retvinklede og ensvinklede. Kender man (3,4,5)- og (6,8,10)-trekanten, så har man svaret på opgaven, men kan naturligvis eftervises ved beregning.
Man benytter Pythagoras, og finder $|AB|$.

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Forholdet mellem trekanterne bestemmes.

$$k = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{8}{4} = 2$$

Og endelig findes $|DE|$.

$$|DE| = \frac{|AB|}{k} = \frac{10}{2} = 5$$

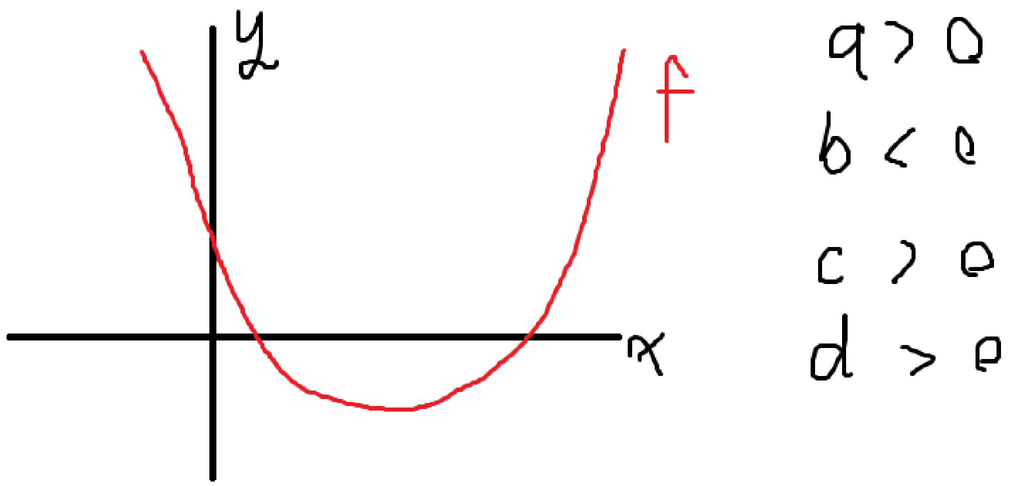
Opgave 2:

a) Benyt anden kvadratsætning i første led.

$$\begin{aligned}&(a-2)^2 + a\cdot(6-a) - 4\\ &= a^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot a + a\cdot 6 - a\cdot a - 4\\ &= a^2 - a^2 + 4 - 4 + 6a - 4a\\ &= 2a\end{aligned}$$

Opgave 3:

a) Grafen laves i Paint.



Her er $c > 0$, da $f(x)$ skærer andenaksen i første og anden kvadrant. Eller blot den positive side af andenaksen.

Opgave 4:

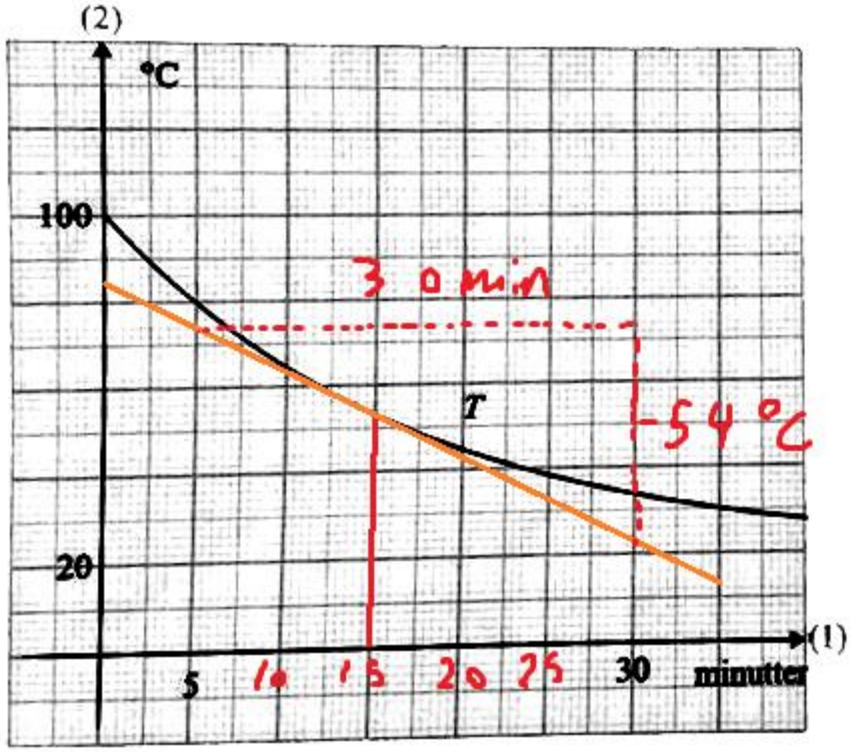
a) Ved aflæsning af opgaveteksten ser man, at der er tale om en lineær vækst. Her er $b = 1$ og $a = 0.1$, og dermed er forskriften

$$f(x) = 0.1 \cdot x + 1$$

Hvor $f(x)$ angiver trykket, målt i atmosfære og x angiver dybden, målt i meter.

Opgave 5:

a) Benyt en lineal og gå ud fra $t = 15$, og lav en tangent til grafen. Aflæs grafen (du har det nok i pænere format...)



Så cirka

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{-54^o C}{30min} \approx 2^o C/min$$

Det betyder, at efter 15 minutter, falder temperaturen cirka med 2 grader celsius.

Opgave 6:

a) Integralet bestemmes.

$$\int_0^3 (3x^2 - x + 1)\, dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^3 = 3^3 - \frac{1}{2}3^2 + 3 - 0 = \frac{51}{2}$$

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7: Via GeoGebra

a) I WordMat indlæses tabellen, og der foretages lineær regression. OBS: Tabellen må IKKE være i ligningsformat!!!!

0	2	4	6	8	10
80.5	80.7	81.2	81.9	82.7	82.8

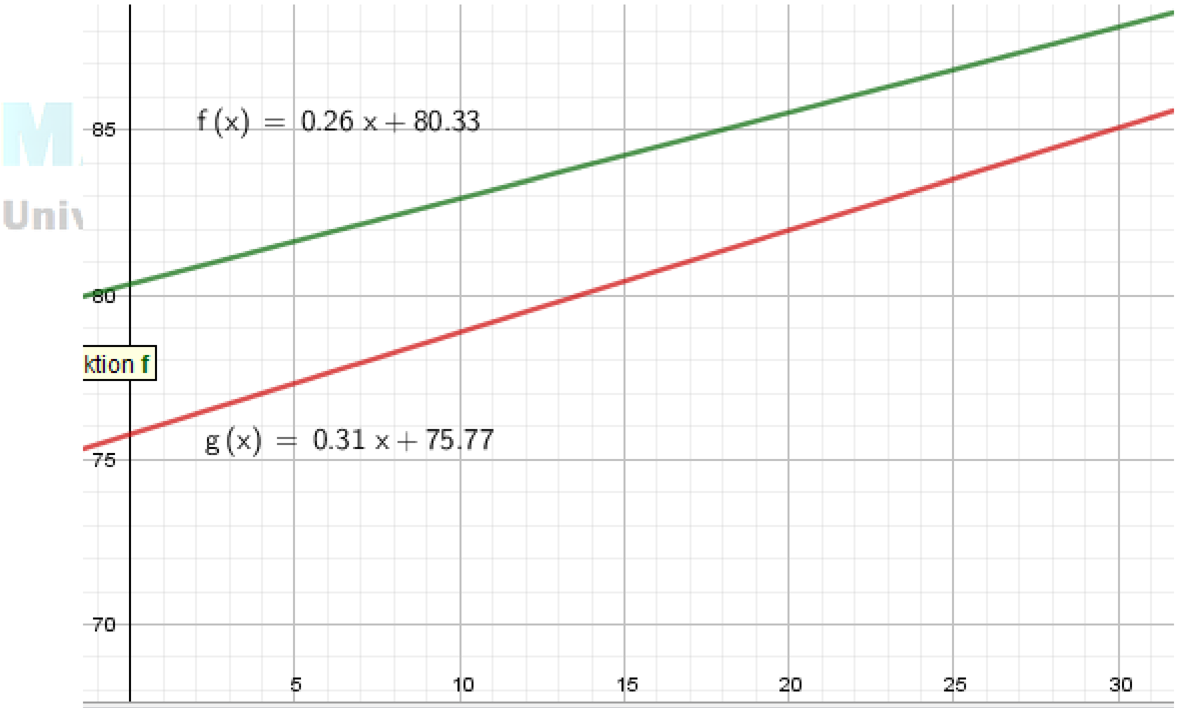
Lineær regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0,9630936$

$$y = 0,26x + 80,33333$$

Dermed er tallene a og b hhv.

$$a = 0.26, \qquad b = 80.333$$

b) I GeoGebra tegnes begge rette linjer, $f(x)$ og $g(x)$.



År 2017 svarer til $x = 12$, så

$$f(12) = 0.26 \cdot 12 + 80.33333 \approx 83.45333$$
$$g(12) = 0.31 \cdot 12 + 75.77 = 79.49$$

Forskellen er:

$$83.45333 - 79.49 \approx 3.96333$$

År.

c) Hældningskoefficienten for kvinderne er $a_{kvinde} = 0.26$ og mændene er $a_{mand} = 0.31$.
For hvert år der går, stiger levealderen for kvinder med 0.26 år.
For hvert år der går, stiger levealderen for mænd med 0.31 år.

Summa summarum vil mændenes levealder indhente kvindernes levealder, hvilket kan findes ved at løse ligningerne:

$$0.26 \cdot x + 80.33333 = 0.31 \cdot x + 75.77$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 91.2666$$

Så i år $2005 + 91 = 2096$ vil det ske. Dette var dog ikke en del af opgaven.

Opgave 8:

a) Man indsætter $x = 60$ i den angivende funktion og udregner.

$$f(60) = 4.37 \cdot 60^{1.27} \approx 792.0152$$

Det betyder, at når effekten i pæren er 60 watt, så er lysmængden 792 lumen.

b) Lad $r_x = 50\% = 0.5$, og $a = 1.27$, så er r_y den ubekendte, og man anvender formlen

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Med tallene indsat er

$$r_y = ((1 + 0.5)^{1.27} - 1) \cdot 100 \approx 67.35392$$

Så når effekten øges med 50%, så øges lysmængden med 67.35%

Opgave 9: Via Maple

a) En passende nulhypotese er:

$$\mathrm{H_0}\text{: Valg af undervisningsmaterialet er uafhængigt af kønnet.}$$

Og de forventede værdier kan bestemmes vha. formlen:

$$forventet = \frac{vandret\ sum \cdot lodret\ sum}{sum\ total}$$

Men i Maple klares problemet hurtigt.

$$obs := \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 15 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}:$$

$evalf[2](forventet(obs))$

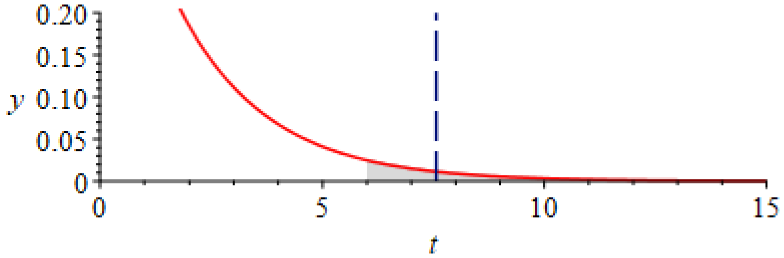
$$\begin{bmatrix} 25. & 25. \\ 23. & 22. \\ 14. & 14. \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Og sådan kunne man klare det.

b) I Maple kan man få udregnet teststørrelsen vha. en kommando i Gym-pakken, man kan også bruge Excel vha. WordMat.

Man anvender uafhænighedstesten.
ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)

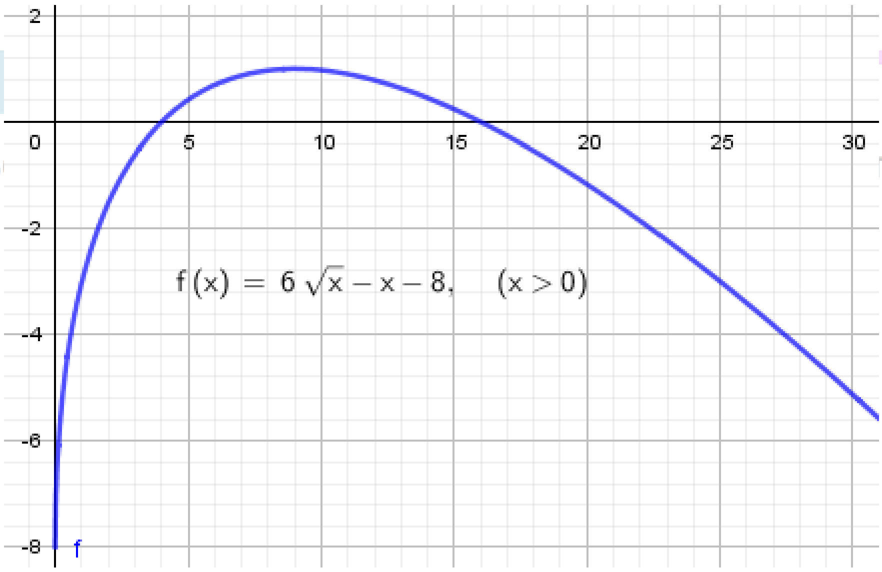
χ^2-teststørrelse = 7.5638
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.022779



Da p-værdien er mindre end 5%, så forkastes nulhypotesen.

Opgave 10: Via GeoGebra

a) I GeoGebra tegnes grafen.



Og i WordMat løses ligningen $f(x) = 0$, så

$$6\sqrt{x} - x - 8 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 4 \quad \vee \quad x = 16$$

Så det betyder, at nulpunkterne er

$$A(4;0) \wedge B(16;0)$$

b) Monotoniforholdene bestemmes. Man finder den differentierede funktion,

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 1, \qquad x > 0$$

Og man løser ligningen $f'(x) = 0$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 9$$

Den dobbelte afledede bestemmes.

$$f''(x) = -\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}, \qquad x > 0$$

Man indsætter $x = 9$ i den anden afledede og tjekker fortegnet.

$$f''(9) = -\frac{3}{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}} \approx -0.05555556$$

Da tallet er negativt, dvs. $f''(9) < 0$, så er der lokalt maksimum. Det betyder, at funktionen $f(x)$ er:

- Voksende i intervallet $]-0; 9]$,
- Aftagende i intervallet $[9; \infty[$.

c) Vha. Excel kan man finde arealet af M, ved at skrive kommandoen

Integral(f(x), 4, 16)

Men man kan også bruge WordMat.

$$M = \int_4^{16} \left(6\sqrt{x} - x - 8\right) dx = 8$$

Opgave 11:

a) Vinkel v bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + 25^2 - 24^2}{2 \cdot 25 \cdot 25}\right) \approx 57.3708$$

b) Trekanten er ligebenet, så længden $|AB|$ kan halveres, dermed kan højden bestemmes vha. Pythagoras.

$$h_c = \sqrt{25^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} \approx 21.931$$

Dermed er $h_c = 21.9$cm.

Højden x findes ved

$$x = r - h_c = 25 - 21.931 \approx 3.069$$

Så x er ca. 3cm.

Opgave 12:

a) Kig godt på figuren!!! Den er åben, og man har nogle særlige kriterier som når $V = 1000$, så er højden $h - 2$. Pr. definition er overfladen og volumen givet ved

$$V = hx^2, \qquad O = 4xh + x^2$$

Erstattes V med 1000, og h med $h - 2$, så

$$1000 = (h-2)x^2 \Leftrightarrow h - 2 = \frac{1000}{x^2} \Leftrightarrow h = \frac{1000}{x^2} + 2$$

Det næste er at udnytte overfladeareal formlen.

$$O(x) = 4x \cdot \left(\frac{1000}{x^2} + 2\right) + x^2 = 4x \cdot \frac{1000}{x^2} + 4x \cdot 2 + x^2 = x^2 + 8x + \frac{4000}{x}$$

Hvor $0 < x < 30$.

b) Funktionen $O(x)$ differentieres.

$$O'(x) = 2x + 8 - \frac{4000}{x^2}$$

Man løser ligningen $O'(x) = 0$, så

$$2x + 8 - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 11.39712$$

Man bruger den anden afledede.

$$O''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

Man indsætter $x = 11.39712$ i den anden afledede og tjekker fortegnet.

$$O''(11.39712) = 2 + \frac{8000}{11.39712^3} \approx 7.403867$$

Da tallet er positivt, dvs. $O''(11.39712) > 0$, så er der lokalt minimum. Det betyder, at $x = 11.4$cm giver den minimale sidelængde.

Matematik B, STX

30. maj 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Den angivende ligning løses.

$$5x - 4 = 3x + 2 \Leftrightarrow$$
$$5x - 3x - 4 = 3x + 2 - 3x \Leftrightarrow$$
$$2x - 4 + 4 = 2 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = 3$$

Man kan altid kontrollere, at det er rigtigt ved at indsætte løsningen i ligningen og tjekke, at begge sider er identiske.

Opgave 2:

a) Fra teksten ses det, at der er tale om en eksponentiel model, da man får angivet begyndelsesværdien og det vigtigste, vækstraten.

Her er $b = 29132$ og $r = 10\% = 0.1$, så kan fremskrivningsfaktoren findes.

$$a = 1 + r = 1 + 0.1 = 1.1$$

Dermed er

$$f(x) = 29132 \cdot 1.1^x$$

Den ønskede model, hvor $f(x)$ angiver antallet af solgte huse til tidspunktet x, målt i år efter år 2012.

Opgave 3:

a) Toppunktet kan findes på to måder:

differentialregning og toppunktsformlerne.

Sidstnævnte overlades til læseren. Lad $f(x) = x^2 - 4x - 5$, så er $f'(x) = 2x - 4$, og hermed løses ligningen $f'(x) = 0$, så

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Så førstekoordinaten til toppunktet er

$$T_x = 2$$

Andenkoordinaten finder man ved at indsætte $T_x = 2$ i $f(x)$, så

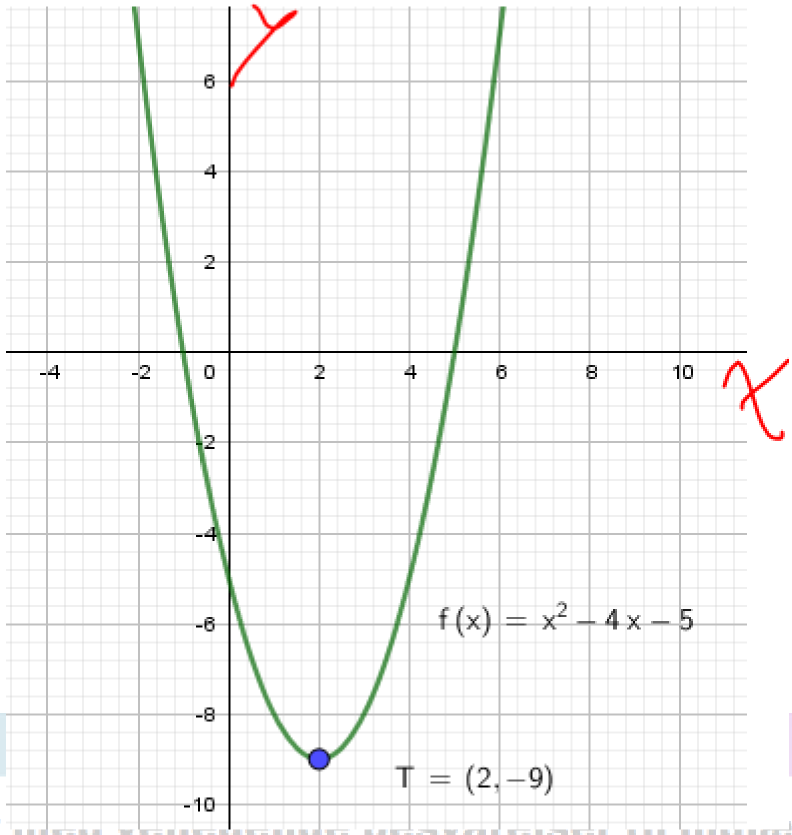
$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Så andenkoordinaten er

$$T_y = -9$$

Og der kan sluttes, at toppunktet er $T(2; -9)$.

Vi snyder lidt, og bruger GeoGebra til at tegne for os, men den bedste måde at tegne i hånden er at lave et sildeben. Vælg f.eks. fra -2 op til 6, så



<u>Opgave 4:</u>

a) De tre grafer er alle sammen potensfunktioner. Der gælder følgende:

$0 < a < 1$, funktionen er langsomt voksende
$a = 0$, funktionen er konstant
$a > 1$, funktionen er hurtigt voksende
$a = 1$, funktionen er lineær voksende/ aftagende
$a < 0$, funktionen er aftagende

Da $a = 1.5 = 3/2$, så er $a > 1$ og dermed er a hurtigt voksende, det betyder, at grafen for A og C er ugyldige, idet A har en a-værdi der er mindre end 0, og dermed aftager, og C har en a-værdi, der er mellem 0 og 1, så grafen for C vokser langsomt. Altså er grafen for B, der passer for $f(x) = 2x^{1.5}$

Opgave 5:

a) Fra figuren kan man se, at trekanten er ligebenet, dermed er afstanden fra C til midtpunktet 5, tilsvarende for B til midtpunktet. Dermed kan man benytte Pythagoras til at bestemme højden.

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Dermed er højden h fra A til jorden 12 meter.

Opgave 6:

a) Funktionen differentieres først.

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^x$$

(Fordi e^x altid differentieret giver sig selv. Hvorfor mon?)

Man indsætter $x = 0$ i f og f' og får

$$f(0) = 2\mathrm{e}^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$f'(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Tangentligningen er dermed

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = 2(x - 0) + 3 = 2x + 3$$

Delprøve 1 slut.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7:

a) I WordMat indlæses tabellen, og der foretages lineær regression. OBS: Tabellen må IKKE være i ligningsformat!!!!

0	5	10	15
1450	1200	900	450

Lineær regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0{,}9810811$

$$y = -66x + 1495$$

Ifølge regressionen ovenfor, er $a = -66$ og $b = 1495$.

b) Tallet a fortæller, at for hvert år der går, efter år 2000, falder den årlige brevmængde med 66 mio. ifølge modellen.

c) Man løser ligningen

$$-66x + 1495 = 100$$

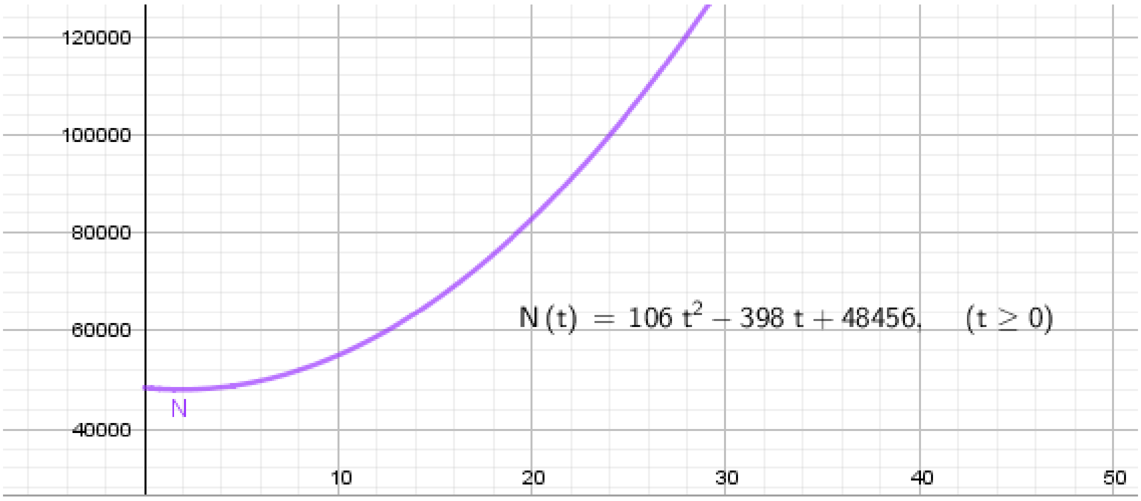
$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$x = 21.13636$$

Dvs. ifølge modellen kommer brevmængden under 100 mio. i løbet af år 2021.

Opgave 8: Via GeoGebra

a) Modellen tegnes i GeoGebra. Der er altså kun et lille udsnit.



År 2018 svarer til $t = 7$, så ifølge modellen vil befolkningstallet i år 2018 være

$$N(7) = 106 \cdot 7^2 - 398 \cdot 7 + 48456 = 50864$$

På Færøerne.

b) Når noget hedder "mindst", så skal man finde den afledede, men det er nok at udregne toppunktets førstekoordinat, da modellen er på formen

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Dermed er $a = 106$ og $b = -398$, så

$$T_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-398}{2 \cdot 106} \approx 1.877358$$

Det betyder, at ifølge modellen er befolkningstallet mindst i ca. år 2013 ifølge modellen.

c) Man differentierer modellen.

$$N'(t) = 212t - 398$$

Her er $t = 4$ år 2015, så

$$N'(4) = 212 \cdot 4 - 398 = 450$$

Dvs. for hvert år der går, efter år 2015, vokser befolkningstallet med 450 personer pr. år.

Opgave 9:

a) Først bestemmes vinkel ADB vha. vinkelsummen i trekanten ABD.

$$ADB = 180^o - DAB - ABD = 180^o - 34.5^o - 141^o = 4.5^o$$

Dermed kan man benytte sig af sinusrelationerne til at finde $|BD|$. Dernæst anvendes WordMat's ligningsløser.

$$\frac{\sin(34.5)}{|BD|} = \frac{\sin(4.5)}{3}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for BD vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$|BD| = 21.65738$$

Ifølge udregningerne er afstanden $|BD|$ ca. 21.66km

b) Man benytter sig igen af sinusrelationerne og udnytter afstanden $|BD|$ samt $|CD|$ og vinkel DBC.

$$\frac{\sin(10)}{7} = \frac{\sin(BCD)}{21.65738}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for BCD vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$BCD = 32.49677^o$$

Da vinkel BCD oprindeligt er stump, så kan den findes ved

$$BCD_{stump} = 180^o - BCD = 180^o - 32.49677^o \approx 147.5032^o$$

Som er den ønskede vinkel.

Opgave 10:

a) Integralet udregnes.

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_1^3 = \frac{1}{4}\cdot 3^4 + 3 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 + 1\right) = 22$$

b) Man bruger svaret fra a), så

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x + k$$

Og anvender punktet $P(2;4)$. Dermed løses følgende ligning vha. WordMat

$$4 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2 + k$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for k vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$k = -2$$

Så den endelige partikulære stamfunktion til $f(x)$ igennem P er

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - 2$$

Opgave 11: Via Excel

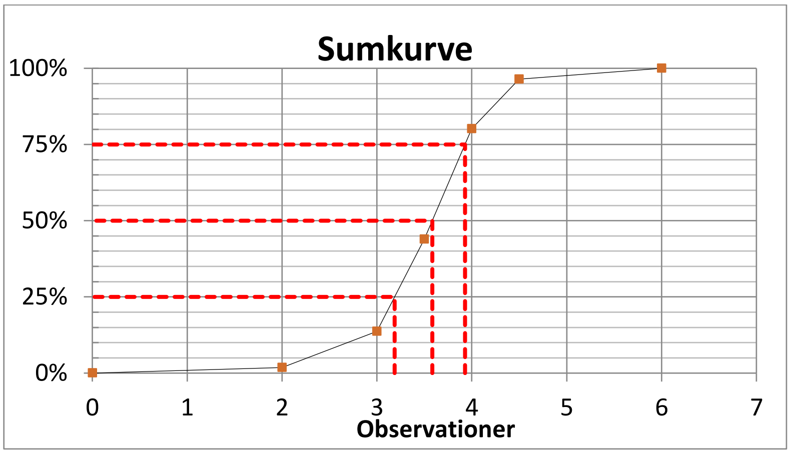
a) I WordMat kan man åbne den integrerede Excel fil, som er klar til brug. Vælg grupperede observationer. Indtast tabellen fra opgavesættet i Excel filen.

Fra	Til	Hyp.	Frekvens	Kum. Frekv
0	2	514	2%	2%
2	3	3311	12%	14%
3	3,5	8411	30%	44%
3,5	4	10098	36%	80%
4	4,5	4525	16%	96%
4,5	6	1003	4%	100%

Dette kunne alene også gøres i hånden. Find summen og divider de enkelte søjler med summen. Så fås frekvensen, og derfra kan man finde den kumulerede frekvens. God øvelse, til dem der har mundtligt matematik B. Summen er 27862, så er frekvensen i intervallet 0 til 2 udregnet ved

$$frekvens = \frac{514}{27862} = 0{,}01844807 \approx 0.02 = 2\%$$

Ved at udnytte de kumulerede frekvenser, så kan man lave en sumkurve, man kan også bruge Excel arket.



Så fra Excel arket blev sumkurven tegnet.

b) Medianen bestemmes. Den kan aflæses fra sumkurven, dvs. man aflæser ved 50%, og kan slutte, at tallet er 3.584kg, som også kan aflæses fra Excel-arket.

Kvartilsæt	
Mindste	0
Nedre	3,187
Median	3,584
Øvre	3,929
Største	6

Endeligt kan man finde middelværdien vha. formlen.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{n}$$

Hvor

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Dvs. a er intervallets begyndelsespunkt og b er intervallets slutpunkt.

Dog kan man få et mere jordnært indblik i, hvordan formlen anvendes i praksis.

$$\bar{x} = \frac{514 + 2.5 \cdot 3311 + 3.25 \cdot 8411 + 3.75 \cdot 10098 + 4.25 \cdot 4525 + 5.25 \cdot 1003}{27862}$$

$$\approx 3.534985$$

Dvs. middelværdien er ca. 3.534kg.

Som også kunne læses i Excel arket

Middeltal	3,535
Spredning	0,69

Opgave 12:

a) Givet funktionen $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Funktionen differentieres vha. produktreglen og kædereglen.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Man sætter $f'(x) = 0$ og løser ligningen.

$$\mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 1$$

Dernæst bestemmes den anden afledede ved samme teknikker som ved den første afledede. (Man kan også tage den mere traditionelle vej, og lave fortegnsvariation og lave monotonilinje).

$$f''(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Man indsætter $x = 1$ i $f''(x)$, så

$$f''(1) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx -0.3678794$$

Da tallet er mindre end 0, dvs. $f''(x) < 0$, så er der lokalt maksimum og dermed kan der sluttes, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; 1]$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[1; \infty[$

b) Man differentierer $g(x)$ vha. samme teknikker som i a).

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-a \cdot x} - a \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

Hvis $g(x)$ skal have maksimum i $x = 2$, så skal man indsætte $x = 2$ i x for $g'(x)$ og 0 på $g'(x)$, dvs. man får ligningen

$$\mathrm{e}^{-a \cdot 2} - a \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot 2} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$a = \frac{1}{2}$$

Så hvis $a = 1/2$, så er der maksimum i $x = 2$ for $g(x)$.