νέο φροντιστήριο	**ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ**	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
	ΤΜΗΜΑ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

α) Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο διάστημα Δ;

3 μονάδες

β) Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ;

3 μονάδες

Α2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

9 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Οι γραφικές παραστάσεις οποιωνδήποτε συναρτήσεων $f, -f$ είναι συμμετρικές μεταξύ τους ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα σε αυτό.

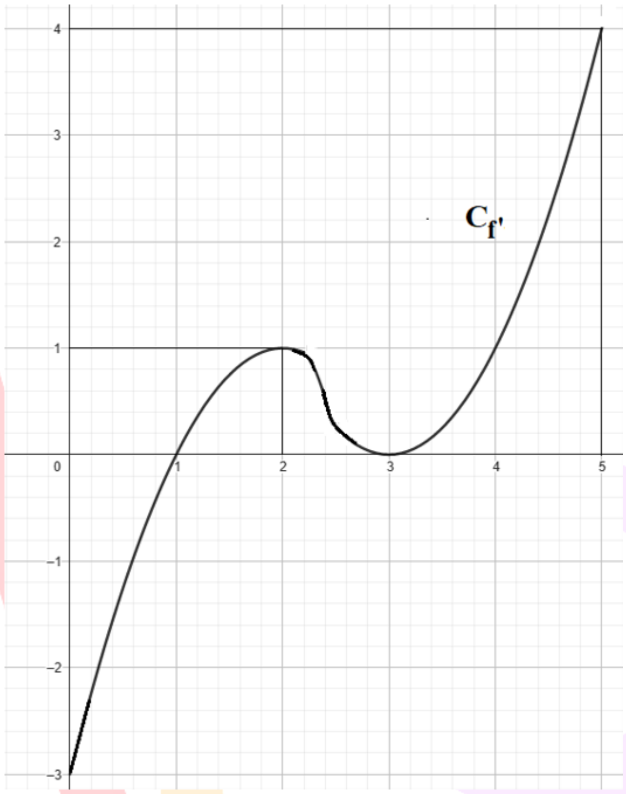
δ) Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης δεν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτές της.

ε) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

10 μονάδες

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνεχούς συνάρτησης $f: [0,5] \to R$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,5)$.



B.1 Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

6 μονάδες

B.2 Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής ακριβώς.

6 μονάδες

B.3 Εάν $f(2) = f'(2)$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_o = 2$ και να αποδειχθεί ότι: $f(x) > x - 1$, για $x \in (0,2)$

7 μονάδες

B.4 Να υπολογιστεί η τιμή του $N = \int_1^2 f'(x)dx - \int_2^1 x \cdot f''(x)dx$

6 μονάδες

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύει ότι: $x\cdot f'(x)-f(x)=\dfrac{x^2\cdot(e^x-1)}{e^x-x}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(1)=\ln(e-1)$, $f(-1)=1-\ln(e+1)$.

Γ1. α) Να δείξετε ότι: $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$.

2 μονάδες

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

4 μονάδες

Έστω $f(x)=x\cdot\ln(e^x-x), x\in\Re$.

Γ2. Αν το $x_0=0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

4 μονάδες

Γ3. α) Δίνεται η συνάρτηση g ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με $g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-e\cdot x$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,+\infty)$ ώστε η g να παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

4 μονάδες

β) Έστω $\mathrm{M}(x,f(x))$ σημείο της C_f με $x>0$.Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(x,0)$ $(\mathrm{MA}\perp 0x)$ και $B(0,f(x))$ $(\mathrm{MB}\perp Oy)$ όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του $x>0$ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να γίνει τετράγωνο και μάλιστα η τιμή αυτή είναι το ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

3 μονάδες

Γ4. α) Έστω F μια παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ με $F(0)=0$.Να δείξετε ότι $0\le F(x)\le x\cdot f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

4 μονάδες

β) Αν Ε είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_F ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ να δείξετε ότι : $2\mathrm{E}<F(1)$

4 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}^*$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x)+xf''(x)\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x-2\right)f(x)}{\ln x}=0$.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ell=-1$.

3 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

4 μονάδες

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\left(1-f'(1)\right)x\right]=+\infty$

4 μονάδες

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ και $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $1<\alpha<\beta$.

Δ3. Έστω Ε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να αποδείξετε ότι $\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{f(\alpha)}<E<\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{f(\beta)}$.

8 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $\dfrac{g'(\xi)}{f'(\xi)}=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$.

6 μονάδες

Ευχόμαστε επιτυχία!