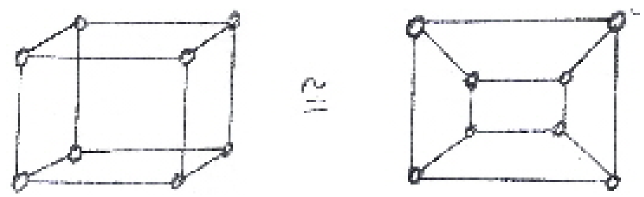
G09-Sikbeli-EA-200402.tex, 20.04.04.

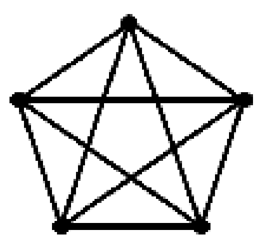
9. Síkba rajzolható gráfok

Dr. Szalkai István

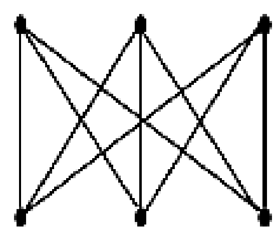
2020.04.04.



Definíció: *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf* **síkba teríthető/ rajzolható** *vagy* **síkbeli** (**planar**),
ha léteznek injektív $f : V \to \mathbb{R}^2$ *és* $g : E \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *függvények:*
- $e = \{x, y\} \in E$ *esetén* $g(e)$ *egy ív (vonal/görbe), amely az* $f(x)$ *és* $f(y)$ *pontokat köti össze,*
- *ezek az ívek csak a közös végpontjaikban metszik egymást.* □



K_5



$K_{3,3}$

$K_{3,3} =$ "*három ház három kút*":

Állítás: *A* K_5 *és* $K_{3,3}$ *gráfok* nem *rajzolhatók síkba.*
Bizonyítás: Ld. Tankönyv (Jordan tételével). □

Ezeket később Euler I. poliédertételéből vezetjük le egyszerűen.

Kuratowsky tétele

Miért csak K_5 *és* $K_{3,3}$?

Tétel: kb: " *Tiltott részgráfok halmaza* $\{K_5, K_{3,3}\}$ *teljes*. "

Kazimierz **Kuratowsky** (1896-1980), lengyel, (1930),
Orrin **Frink** Jr. (1901-1988), amerikai, (1930),
Paul Althaus **Smith** (1900-1980), amerikai, (1930),

Precízen: ... másodfokú csúcs megszüntetése / éllel helyettesítése, gráf redukáltja, élek felosztása (subdivision), topologikus részgráf, $H \dashv G$, homeomorf gráfok, él összehúzása / végpontjainak összeragasztása, gráf minorja, $H \preceq G$, ... ,

Gyakorlati alkalmazásoknál:

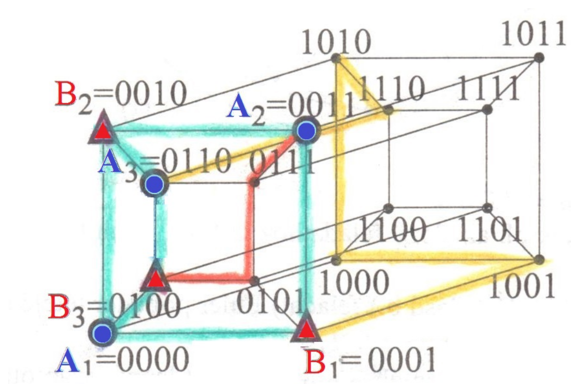
Tétel (az eredeti Tétel <u>ekvivalens</u> változata):

Egy tetszőleges G gráf pontosan akkor *teríthető síkba ha* <u>nem</u> *található benne*

- *sem öt csúcs azokat páronként összekötő (páronként) csúcsdiszjunkt utakkal,*

- *sem három* **piros** *és három* **kék** *csúcs, kilenc páronként csúcsdiszjunkt úttal,*

amelyek mindegyik piros csúcsot mindegyik kék csúccsal összekötik. □



Algoritmusok:

William Thomas **Tutte** (1917-2002) brit, 1963 *polinomiális*

John Edward Hopcroft (1939-) ÉS Robert Endre Tarjan (1948) amerikaiak, 1974, *lineáris* idejű.

Tétel (Wagner 1936, Fáry 1948)**:** *Ha G egyszerű síkbarajzolható => egyenes szakasszal is lerajzolható.* □

Fáry István (1922-1984) magyar.

"VLSI" (*very large scale integration*) probléma: minimális területű síkrészre rajzolás.

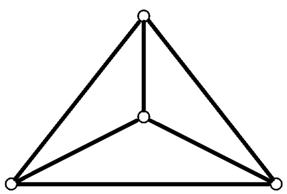
Euler poliédertételei

Lap (tartomány, ország) = ? = precízen bonyolult, de pl. gráfelméleti kör esetén van, kb. $\approx$ körlappal (topológiailag) *homeomorfak* = gumiból kivágva körlappá lehet alakítani.

Eredetileg csak poliéderhálókra (1752), de most **általánosabban**:

Tétel (Euler I. poliédertétele) G *tetszőleges, összefüggő, síkba rajzol***t** (!) *gráf* =>

$$\boxed{\ell + c - e = 2} \quad . \tag{1}$$



A gráfon "kívüli" végtelen tartomány is egy lap!

Bizonyítás: HA van G -ben (gráfelméleti) kör, akkor ennek bármely élét elhagyva az *élek száma* ÉS a *lapok száma* is 1 -el csökken, de G' összefüggő marad!
=> végül körmentes összefüggő = fa gráfot kapunk:

$$c - 1 = e' \ , \tag{2}$$

$\ell' = 1$, tehát elhagytunk $(\ell - 1)$ lapot = ugyanennyi élet.
Mindkét oldalhoz $\ell - 1$ -et adva megkapjuk (1) -t. $\square$

Megjegyzés: Tehát a lapok száma (ℓ) nem függ a síkba terítéstől.

Következmények: i) HA G *egyszerű síkba rajzol**ható** gráf* =>

$$e \leq 3c - 6 \tag{3}$$

ii) HA G *egyszerű síkba rajzol**ható páros** gráf* $(4 \leq g)$ =>

$$e \leq 2c - 4 \tag{4}$$

iii) HA G *egyszerű síkba rajzol**ható**, g = legrövidebb kör hossza* $(= girth(G) =$ derékbőség)

$$e \leq \frac{g}{g-2} \cdot (c-2) \tag{5}$$

Bizonyítás: lásd tankönyv, nem nehéz. $\square$

Megjegyzés: Egyik becslés sem fordítható, egyszerű ellenpéldák vannak.

Következmény: K_5 *és* $K_{3,3}$ *nem síkba rajzolható gráfok.*

Bizonyítás: K_5 : $e = 10$, $c = 5$ és $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$.

$K_{3,3}$: (3) teljesül, de (4) nem: $e = 9$, $c = 6$, $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$. $\square$

Tétel (Euler II. poliédertétele) *G tetszőleges összefüggő, 3 -reguláris, síkba rajzolt, hurokmentes, minden éle G egy (gráfelméleti) körében van, és $n_i := i$ -oldalú lapok száma* $(i \in \mathbb{N}\ , i \geq 2)$, =>

$$\sum_{i=2}^{\infty}(6-i) \cdot n_i = 12\ . \tag{6}$$

Bizonyítás: Euler I. poliédertétele alapján:

3 -reguláris => minden csúcs 3 laphoz tartozik:

$$c = \frac{1}{3}\sum i \cdot n_i \quad ,$$

minden él *pontosan* két lap közös határa

$$e = \frac{1}{2}\sum i \cdot n_i \quad ,$$

és

$$\ell = \sum n_i \quad .$$

Beírva (1) -be kapjuk (6) -t. $\square$

Megjegyzés: Hatszögek száma (n_6) lényegtelen!

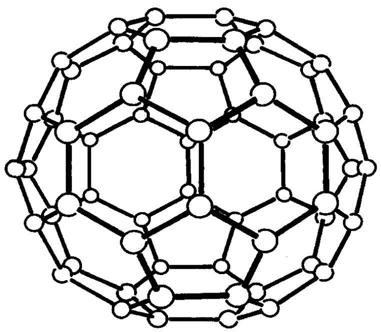
Fullerének

A szén (C) harmadik tiszta módosulata, a ”futball-labda” molekula.

Kísérleti vegyészek 1984-ben jelenségeket észleltek, elméletileg leírták tulajdonságait, sőt Euler is.

Csak 1990 -ben sikerült laborban előállítani.

R.Buckminster Fuller amerikai építészmérnökről nevezték el.



Topkapi Palota
("Ágyúkapu palota", Isztambul, 1465 és 1853 között)

Térképek

Síkba / gömbre rajzolt gráfok lapjai = partíció.

Fordítva: (síkbeli) térkép **duális gráfja:** országok és szomszédok.

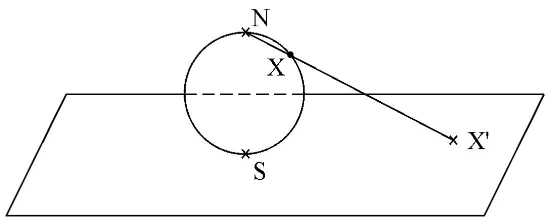
Színezések a következő fejezetben.

Egyéb felületek (= pihenés)

$\mathcal{F}$ = gömb, tórusz ("úszógumi"), Möbius szalag, Klein -palack, perec, kétfülű bögre, ...

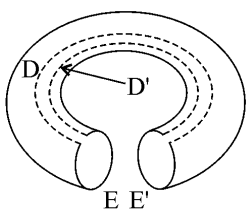
Állítás: Minden síkbeli gráf $\mathcal{F}$ -re rajzolható ("kicsiben").

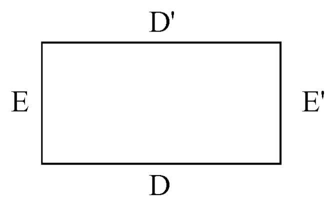
Állítás: *G rajzolható gömbre* <=> *síkba* :

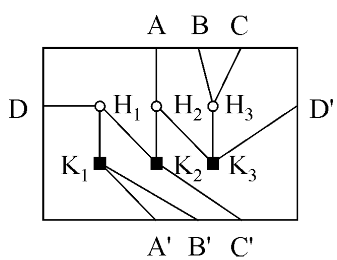


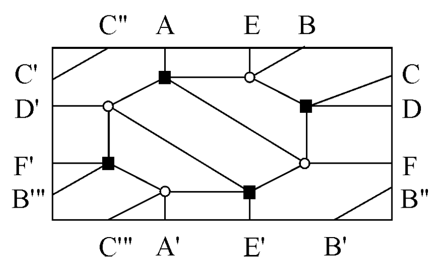
□

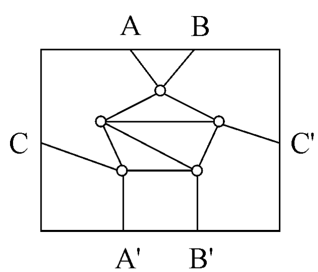
$\mathcal{F}$ -re néha többet is lehet, pl. *tóruszra* : $K_{4,4}$ és K_7 lehet ($K_{5,5}$ és K_8 már nem):

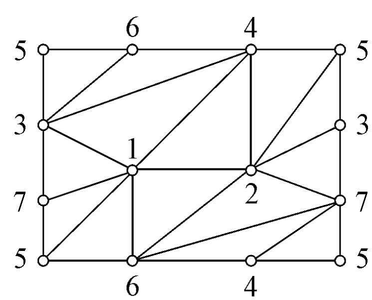










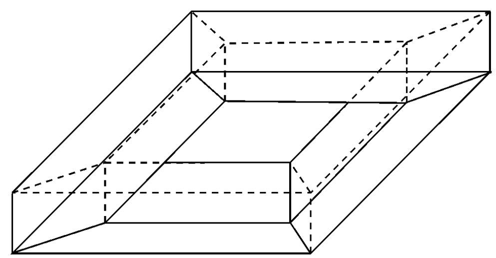


Tétel: *Tetszőleges $\mathcal{F}$ felületre létezik* véges sok *"tiltott" gráf*: *tetszőleges G gráf $\mathcal{F}$ -re rajzolható* <=> *egyik tiltott gráfot sem tartalmazza.* $\square$

A tiltott részgráfok pontos listáját csak az Euklideszi és a projektív síkra ismerjük.

Gömbre rajzolt gráfokra is teljesül **Euler I. poliéder tétele** (a bizonyítás ugyanaz).

Tóruszon $\ell + c - e = 0$ mindig, pl. képkeret = H_4 kockagráf :



Sőt, tetszőleges $\mathcal{F}$ felületre létezik $\sigma \in \mathbb{Z}$ szám (ú.n. **Euler karakterisztika**):
tetszőleges összefüggő gráf rajzolásakor

$$\ell + c - e = \sigma \ .$$

Sík: $\sigma = 2$,

tórusz, Möbius -szalag, kétlyukú gömb, hengerpalást $\sigma = 0$,

a két lyukú papírlap = $\sigma = -1$, ...