

Part I

Newtoni formalizmus

Alapvető tapasztalatunk hogy a jelenségek térben és időben történnek. Közvetlenül azonban csak a jelenségeket jellemző *térbeli távolságot*, illetve *időbeli távolságot* vagyunk képesek mérni.

A tapasztalataink alapján a klasszikus mechanikában a téridő egy idő, és három tér-dimenzióval rendelkező *affin tér*. Az affin tér az euklidészi tér általánosításának tekinthető, informálisan Marcel Berger szavaival írjuk körül: Egy affin tér az, ami egy vektortérből megmarad, miután elfelejtjük hol van az origó.

A jelenségeket legtöbbször valamilyen vonatkoztatási rendszerben írjuk le, ez azt jelenti hogy egy vonatkoztatási ponthoz, vagyis *origó*-hoz képest írjuk le. A tér pontjait az origótól az adott pontba mutató vektorral azonosítjuk, a lineáris kombinációk szabályai alapján vektorokat felbonthatunk, illetve összeadhatunk.

A fizikai jelenségek leírása, a végeredmény természetesen független kell hogy legyen az önkényes döntéseinktől, vagyis az origó felvételétől és a vektorok esetleges felbontásától.

A Newton formalizmus alapjai a Newton-törvények.

Newton első törvénye kimondja az inerciarendszerek létezését. Definíció szerint az inerciarendszerekben érvényesek a Newton-törvények. Az inerciarendszer a fizika egyik legfontosabb fogalma, meghatározza vonatkoztatási rendszereknek egy olyan halmazát, amelyben a fizika törvényei ekvivalensek, illetve –ezen túlmenően– a legegyszerűbbek.

A legnagyobb jelentőségű Newton második törvénye, amely kapcsolatot ad m tömegű pontszerű részecske mozgása, és a rá ható \mathbf{F} erő között inerciarendszerben.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (1)$$

Itt $\ddot{\mathbf{r}} \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2 \equiv \partial_t^2\mathbf{r}$ az \mathbf{r} helyvektor idő szerinti második deriváltja, ami fizikailag a gyorsulás, szokásos jelölése \mathbf{a} . Ezt a másodrendű közönséges differenciál-egyenletet át lehet írni két elsőrendű differenciál-egyenletből álló rendszerre.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}/m \end{aligned} \quad (2)$$

ahol

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

a tömegpont sebessége. Az \mathbf{F} erő függhet a részecske helyétől és sebességétől, illetve expliciten az időtől is: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Erők hiányában a tömegpontot szabad részecskének hívjuk, a felső mozgásegyenlet megoldása egyszerű integrálással megkapható,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol \mathbf{v}_0 és \mathbf{r}_0 a határozatlan integrálás esetén előkerülő integrációs konstansok. Ezek a fenti közönséges differenciál-egyenletek kezdeti értékei, vagyis fizikailag: a sebesség és a hely a $t = 0$ időpontban. Formailag ez Newton első törvénye.

Newton második törvénye egy differenciálegyenletet definiál, az általában három-komponensű $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ vektorra vonatkozóan. Ennek megfelelően, az (1) egyenlet átírható a komponenseire vonatkozó egyenletrendszerre

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Azt hogy az erő tetszőlegesen felbontható a komponenseire, néha Newton negyedik törvényének nevezik. Általában ez a három egyenlet nem független, a csatolások általában mindhárom koordináta-, illetve sebesség-komponens függvényei lehetnek.

N részecskéből álló rendszereket Newton második törvényének minden részecskére külön-külön való alkalmazásával írhatunk le, melyek általában csatolt közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vezetnek

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Mindegyik \mathbf{F}_i erőt fel lehet bontani a külső erő $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ és a részecskék kölcsönhatásából eredő belső \mathbf{f}_{ij} , erők összegére. Az egy testre ható erőknek a vektor jellege, –összeadhatósága, illetve felbonthatósága– Newton negyedik törvénye.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \mathbf{f}_{ij}. \quad (7)$$

Newton harmadik törvénye azt mondja ki, hogy két test kölcsönhatásakor fellépő erők anti-szimmetrikusak,

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}. \quad (8)$$

1 Pontszerű test mechanikája

Az alapvető matematikai megoldási módszereket a pontszerű részecske egyszerű mozgásegyenleteinek megoldásán keresztül mutatjuk be.

Pontszerűnek akkor tekinthetünk egy testet, ha a belső szerkezetétől, és geometriai alakjától függetlenül tekinthetjük a rá ható erőket, vagy ha erről a függésről nincsenek kellő információink, de a szerepe nem lényeges.

Információk hiányában, illetve geometriai viszonyoktól való függetlenség esetén forgásszimmetrikusnak, háromdimenziós esetben gömbszimmetrikusnak tételezzük fel a testet, a kiterjedését pedig olyan kicsinynek, hogy az erők ne függessenek a mérettől számottevően.

A pontszerűség absztrakciója precízebben azt jelenti, hogy a test trajektóriáját valamilyen véges kiterjedés esetén meghatározzuk, majd egyre kisebb sugarú testek trajektóriájának a határértékét vesszük. Ha a nulla kiterjedéshez tartozó határérték nem tér el nagyon az eredeti kiterjedésű test trajektóriájától, akkor mondhatjuk azt, hogy a pontszerűség elfogadható közelítés.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a trajektóriák kis-sugarú határértéke általában nem lesz azonos a kis-sugarú határérték trajektóriájával. Ezzel kapcsolatos konkrét megfontolásokat a szórásszámításokkal, illetve kényszerekkel kapcsolatban tárgyalunk.

1.1 Dinamika konstans erő hatása alatt

Bevezetésnek tekintsük az egyik legegyszerűbb rendszert. $\mathbf{F} = \text{const}$ esetén (1) egyenlet közvetlen integrálással megoldható:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ a tömegpont konstans gyorsulása. A megoldás érvényessége könnyedén ellenőrizhető idő szerinti differenciálással. Az $\mathbf{r}(t)$ trajektória (parabola) általában egy olyan síkban helyezkedik el, amelyet $\mathbf{a}\mathbf{v}_0$ és \mathbf{a} vektorok határoznak meg. Emiatt a mozgás a megfelelő koordinátázással kétdimenziósra redukálható. Kényelmes például úgy felvenni a koordináta-rendszert, hogy a trajektória az xy síkban legyen, így $z = 0$.

1.2 Hajítás lejtőn

Tekintsük a fentiek egy alkalmazását. Lejtőn állva, az xy síkban hajítunk el egy pontszerűnek vehető testet, a vízszintessel θ szöget bezárva, v_0 sebességgel. A közegellenállást és egyéb hatásokat elhanyagolva, számítsuk ki a földetérés maximális x -irányú távolságát. A lejtőt $y = \alpha x$ képlettel vesszük figyelembe.

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cos\theta \\y &= v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2,\end{aligned}\tag{10}$$

A trajektóriát könnyen ki tudjuk fejezni, ha kifejezzük az időt: $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$.

$$y = x t g \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

A talajjal való érintkezés akkor történik, amikor egyidejűleg teljesül az

$$y = \alpha x = x t g \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

Ennek megoldása az $x = 0$, illetve $x = (t g \theta - \alpha) \frac{2v_0^2}{g} \cos^2\theta$

A maximumot úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk x szélsőértékét.

$$0 = \frac{dx}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g} (1 - (t g \theta - \alpha) 2 \cos\theta \sin\theta)$$

Trigonometriai egyszerűsítések után:

$$0 = 1 - 2 \sin^2\theta + \alpha \sin 2\theta = \cos 2\theta + \alpha \sin 2\theta$$

$$ctg 2\theta = -\alpha.$$

Ebből már közvetlenül megkapjuk a maximális vízszintes távolsághoz szükséges hajítási szöget:

$$2\theta = \operatorname{arctg}(-\alpha) = \operatorname{arctg}(-tg\phi) = \operatorname{arctg}(tg(-\phi)) = \operatorname{arctg}(ctg(\phi + \frac{\pi}{2}))$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

Ahol a ϕ a lejtő dőlésszöge, $\alpha = tg\phi$.

A maximális vízszintes távolságot is kifejezzük:

$$x_{max} = \frac{2v_0^2}{g} (\sin\theta \cos\theta - \alpha \cos^2\theta) = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\theta - \alpha - \alpha \cos 2\theta) = \frac{v_0^2}{g} (\cos\phi + \alpha \sin\phi - \alpha) = \frac{v_0^2}{g} \frac{(1 - \sin\phi)}{\cos\phi}$$

1.3 Mozgás lineáris közegellenállás esetén

Ha a test viszkózus közegben mozog, közegellenállási erő fog hatni rá. Ha a test szimmetrikus alakú, a közegellenállási erő a sebességgel ellentétes irányú lesz. Teljesen lamináris áramlásnál, kis sebességek esetén a közegellenállási erő felírható mint:

$$\mathbf{F}_v = -\alpha \mathbf{v}.\tag{11}$$

Itt az α lineáris közegellenállási együttható pozitív szám, amivel azt fejezzük ki, hogy a közegellenállás lassítja a közeghez képest relatíven mozgó testeket. Megjegyezzük például az égi-mechanika területén belül előfordul olyan helyzet, hogy a közegellenállás növeli a sebességet, ezzel későbbi fejezetben foglalkozunk.

Newton második egyenletébe beírva a lineáris közegellenállási erőt kapjuk hogy:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \alpha\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (12)$$

ahol \mathbf{F} az összes egyéb erőt tartalmazza. A tömeggel való osztás után az egyenletünk átírható:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m \quad (13)$$

ahol $\Gamma \equiv \alpha/m$ a karakterisztikus relaxációs rátának nevezett, s^{-1} dimenziójú mennyiség. Ha az erő legfeljebb az idő explicit függvénye, egyenletünket átírhatjuk a sebességekre vonatkozóan,

$$\dot{\mathbf{v}} + \Gamma\mathbf{v} = \mathbf{F}/m. \quad (14)$$

Ezzel a módszerrel a másodrendű közönséges differenciál-egyenletet elsőrendűvé alakítottuk. A megoldása után egyszerűen ki tudjuk fejezni $\mathbf{r}(t)$ -t integrálással, $\mathbf{r}(t) = \int dt\mathbf{v}(t)$.

Először foglalkozzunk azzal az egyszerűbb esettel, amikor a lineáris közegellenállási erőn kívül más erő nincs, vagyis amikor a differenciálegyenlet homogén, egyenlet. Ekkor $\mathbf{F} = 0$,

$$\dot{\mathbf{v}} + \Gamma\mathbf{v} = 0. \quad (15)$$

Ebben az esetben a mozgás egydimenziós a $3D$ térbe ágyazott valamely vonal mentén. A számolás szempontjából kényelmes, ha a koordinátákat úgy vesszük fel, hogy a mozgás az x tengely mentén történjen. Ekkor $y = z = 0$, és bevezetve a $v_x = v$ jelölést, a mozgásegyenlet

$$\dot{v} + \Gamma v = 0, \quad (16)$$

melyet a következő lépésekkel oldhatunk meg:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\Gamma dt \\ \int \frac{dv}{v} &= -\Gamma \int dt \\ \ln|v| &= -\Gamma t + \text{const} \\ |v| &= e^{-\Gamma t} e^C \end{aligned} \quad (17)$$

amely átírható a kezdeti feltételek illesztése után mint:

$$v = v_0 e^{-\Gamma t}. \quad (18)$$

Visszatérve az általános, vektorral történő írásmódhoz, azt írhatjuk hogy:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-\Gamma t}. \quad (19)$$

A koordinátához integrálnunk kell a sebességet idő szerint

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{v}_0}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}). \quad (20)$$

Ez a megoldási módszer hasznos lehet bizonyos nemlineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenletek esetén is.

Lineáris, homogén közönséges differenciálegyenletek esetén alkalmazható az az igen hasznos technika, hogy a megoldásokat exponenciális alakú függvények formájában keressük. Ebben a konkrét esetben

$$\mathbf{v} = C e^{\lambda t}. \quad (21)$$

Behelyettesítve az (15) egyenletbe az exponenciális alakot, egyszerűsítések után algebrai egyenletet kapjuk λ -ra

$$\lambda + \Gamma = 0 \quad (22)$$

melynek a megoldása a $\lambda = -\Gamma$. Ezért a megoldás felírható mint

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} e^{-\Gamma t} = \mathbf{v}_0 e^{-\Gamma t} \quad (23)$$

amely megegyezik az (19) eredménnyel.

Konstans erő jelenlétében, mint amilyenek pl: a gravitáció vehető, (14) inhomogén egyenletet kell megoldanunk. Ha az inhomogén egyenlet egy partikuláris- és a homogén egyenlet általános megoldása ismert, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldása ezek összege lesz. Ezt részletesebben a matematikai függelékben tárgyaljuk, most a konkrét példán keresztül rávilágítunk ennek a fizikai tartalmára. Az inhomogén egyenlet aszimptotikus megoldása megkereshető a $\dot{\mathbf{v}} = 0$ feltétel teljesüléséből. Ezt visszahelyettesítve, a megoldás:

$$\mathbf{v}_\infty = \mathbf{F}/(m\Gamma), \quad (24)$$

mely a részecske sebességének a jövőbeli határértéke. Ennek felhasználásával újraírható az (14) egyenlet az $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ változóban

$$\dot{\mathbf{u}} + \Gamma \mathbf{u} = 0. \quad (25)$$

Ez ugyanaz a homogén egyenlet, amit korábban megoldottunk. Hasonló úton megoldva, visszahelyettesítés, majd a kezdeti értékekhez illesztés után:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty) e^{-\Gamma t}. \quad (26)$$

Ennek az integrálásával kapjuk meg a koordinátákat

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_\infty t + \frac{\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}). \quad (27)$$

Végül tekintsük (14) egyenlet megoldását általánosan időfüggő $\mathbf{F}(t)$ erő esetén, az ú.n. konstans variációs módszer segítségével. Ez a módszer lehetővé teszi hogy, a homogén általános megoldásból kiindulva, megoldjuk az inhomogén közönséges differenciálegyenletet. A konstans variáció lényege, hogy a (14) egyenlet megoldását az alábbi alakban keressük.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}(t) e^{-\Gamma t}. \quad (28)$$

Behelyettesítve ezt (14)-be, egyenletet kapunk a $\mathbf{C}(t)$ "variációs konstans"-ra

$$\dot{\mathbf{C}}(t) e^{-\Gamma t} = \mathbf{F}(t)/m. \quad (29)$$

Ezt megoldjuk $\dot{\mathbf{C}}(t)$ -re, majd integrálás után azt kapjuk hogy

$$\mathbf{C}(t) = \int dt' e^{\Gamma t'} \frac{\mathbf{F}(t')}{m}. \quad (30)$$

Visszahelyettesítjük ezt a (28) egyenletbe, így

$$\mathbf{v}(t) = e^{-\Gamma t} \int dt' e^{\Gamma t'} \frac{\mathbf{F}(t')}{m}. \quad (31)$$

A határozatlan integrálás-ból eredő integrációs konstans meghatározható a kezdeti értékekhez való illesztés alapján, határozott integrálra való áttérés mellett

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\Gamma t} + e^{-\Gamma t} \int_0^t dt' e^{\Gamma t'} \frac{\mathbf{F}(t')}{m}. \quad (32)$$

Az eredmény t szerinti differenciálással könnyen ellenőrizhető.

1.4 Harmonikus oszcillátor

A fizika egyik legfontosabb differenciálegyenlete a harmonikus oszcillátoré. Ennek jelentősége a későbbiekben válik nyilvánvalóvá. A harmonikus oszcillátor legegyszerűbb példája az k rugóállandójú, rögzített rugóra akasztott m tömegű test idealizált modellje, kis kitérés esetén. A disszipációt lineáris közegellenállásnak feltételezve, lényegében (12) általánosítását kapjuk

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \alpha\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (33)$$

ahol \mathbf{F} a külső erő, akárcsak korábban. A k rugóállandó, és az α lineáris közegellenállási együttható pozitívak, a fizikailag ez a kikötés a közegellenállás fékező hatását, és a rugó visszahúzó erejét fejezi ki.

A modell természetesen erősen idealizált, a közegellenállást viszonylag szűk keretek között közelíthetjük lineárisan, a rugó pedig ebben a modellben tömeg nélküli, szerkezetét figyelmen kívül hagyjuk, a nyugalmi hosszát nullának tekintjük. Feltételezzük a tetszőleges kitérés esetén is teljesülő lineáris rugóerőt.

A következőkben egyenes mentén történő mozgás vizsgálatára szorítkozunk, az x tengely mentén. Leosztva a tömeggel, az egyenlet

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f, \quad (34)$$

ahol

$$\Gamma \equiv \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f \equiv \frac{F}{m}. \quad (35)$$

ω_0 a rezgés körfrekvenciája csillapítás hiányában.

A homogén egyenlet ($f = 0$) megoldása, az általános módszerekkel ekvivalensek, kereshető

$$x(t) = Ce^{i\Omega t} \quad (36)$$

alakban. Itt Ω a komplex számok körében értelmezett. Visszahelyettesítve a (34) egyenletbe, másodfokú algebrai egyenletet kapunk

$$-\Omega^2 + 2i\Gamma\Omega + \omega_0^2 = 0 \quad (37)$$

amely gyökei

$$\Omega_{\pm} = i\Gamma \pm \tilde{\omega}_0, \quad \tilde{\omega}_0 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}. \quad (38)$$

Az $\tilde{\omega}_0$ a paraméterek értékeitől függően lehet valós, nulla, vagy képzetes értékű, mi itt most részletesen csak a valós esettel, az alulcsillapítás esetével foglalkozunk.

Mivel két gyök van, ezért kétféle megoldást is találtunk. Homogén lineáris egyenleteknél mint ez, a megoldások szuperpozíciója is megoldás, ebből eredően az általános megoldás

$$x(t) = C_+ e^{i\Omega_+ t} + C_- e^{i\Omega_- t}, \quad (39)$$

ahol C_{\pm} -ok (általában komplex) integrációs konstansok. Felhasználva az

$$e^{i\varphi} \equiv \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (40)$$

összefüggést, a megoldást expliciten valós alakúra lehet átírni

$$x(t) = C_1 e^{-\Gamma t} \cos \tilde{\omega}_0 t + C_2 e^{-\Gamma t} \sin \tilde{\omega}_0 t, \quad (41)$$

ahol $C_{1,2}$ az előzőektől különböző integrációs konstansok. Ezeket a kezdeti értékek határozzák meg

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (42)$$

vagyis

$$x(0) = C_1 = x_0 \quad (43)$$

és

$$\dot{x}(0) = -\Gamma C_1 + \tilde{\omega}_0 C_2 = v_0. \quad (44)$$

Ezekből

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0 + \Gamma x_0}{\tilde{\omega}_0}. \quad (45)$$

Így végül a megoldás a kezdeti feltételekkel kifejezve

$$x(t) = x_0 e^{-\Gamma t} \cos \tilde{\omega}_0 t + \frac{v_0 + \Gamma x_0}{\tilde{\omega}_0} e^{-\Gamma t} \sin \tilde{\omega}_0 t. \quad (46)$$

Vizsgáljuk meg a megoldást közelebbről. (38) egyenletből kiindulva, csillapítás hiányában, vagyis $\Gamma = 0$ esetén, a rezgés frekvenciája ω_0 . A csillapítás csökkenti a rezgés frekvenciáját, ami végül nulla lesz $\Gamma = \omega_0$ esetén, ezt nevezzük kritikus csillapításnak. Ennél erősebb csillapításnál, amelyet túlcillapított-nal neveznek, ($\Gamma > \omega_0$) a frekvencia képzetessé válik, fizikailag a mozgás aperiodikus lesz.

Most tekintsük a gerjesztett harmonikus oszcillátor esetét. Mivel a homogén (gerjesztetlen) eset megoldása az előzőekből ismert, az inhomogén egyenlet megoldását meg tudjuk keresni a konstans variációs módszer segítségével. Akárcsak (39) egyenletnél, keressük az alábbi alakban

$$x_I(t) = C_+(t)e^{i\Omega_+ t} + C_-(t)e^{i\Omega_- t}. \quad (47)$$

A “variációs konstansok”-nak ki kell elégíteniük egy egyenletrendszert, (ennek bebizonyítása a matematikai függelékben található)

$$\begin{aligned} \dot{C}_+(t)x_+(t) + \dot{C}_-(t)x_-(t) &= 0 \\ \dot{C}_+(t)\dot{x}_+(t) + \dot{C}_-(t)\dot{x}_-(t) &= f(t). \end{aligned} \quad (48)$$

A megoldását megkapjuk például a Cramer-szabály felhasználásával:

$$\dot{C}_+(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_-(t) \\ f(t) & \dot{x}_-(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_+(t) & x_-(t) \\ \dot{x}_+(t) & \dot{x}_-(t) \end{vmatrix}} = \frac{-f(t)x_-(t)}{x_+(t)\dot{x}_-(t) - \dot{x}_+(t)x_-(t)}. \quad (49)$$

Behelyettesítések után

$$x_+(t)\dot{x}_-(t) - \dot{x}_+(t)x_-(t) = i(\Omega_- - \Omega_+)e^{i(\Omega_- + \Omega_+)t} = -2i\tilde{\omega}_0 e^{-2\Gamma t} \quad (50)$$

kifejezhetjük a variációs konstansok deriváltjait:

$$\dot{C}_+(t) = -\frac{i}{2} \frac{f(t)}{\tilde{\omega}_0} e^{i\Omega_- t + 2\Gamma t} = -\frac{i}{2} \frac{f(t)}{\tilde{\omega}_0} e^{-i\Omega_+ t} \quad (51)$$

$$\dot{C}_-(t) = \frac{i}{2} \frac{f(t)}{\tilde{\omega}_0} e^{i\Omega_+ t + 2\Gamma t} = \frac{i}{2} \frac{f(t)}{\tilde{\omega}_0} e^{-i\Omega_- t}. \quad (52)$$

Integrálás után behelyettesítve ezt a két formulát az (47) egyenletbe, megkapjuk az

$$x_I(t) = -\frac{i}{2\tilde{\omega}_0} e^{i\Omega_+ t} \int_0^t dt' f(t') e^{-i\Omega_+ t'} + \frac{i}{2\tilde{\omega}_0} e^{i\Omega_- t} \int_0^t dt' f(t') e^{-i\Omega_- t'} \quad (53)$$

inhomogén egyenlet megoldását. Ezt egyszerűsíthetjük:

$$\begin{aligned}
x_I(t) &= \frac{i}{2\tilde{\omega}_0} \int_0^t dt' f(t') \left[-e^{i\Omega_+(t-t')} + e^{i\Omega_-(t-t')} \right] \\
&= \frac{i}{2\tilde{\omega}_0} \int_0^t dt' f(t') e^{-\Gamma(t-t')} \left[-e^{i\tilde{\omega}_0(t-t')} + e^{-i\tilde{\omega}_0(t-t')} \right] \\
&= \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \int_0^t dt' f(t') e^{-\Gamma(t-t')} \sin [\tilde{\omega}_0(t-t')].
\end{aligned} \tag{54}$$

A teljes egyenlet általános megoldása

$$x(t) = x_H(t) + x_I(t), \tag{55}$$

ahol $x_H(t)$ a homogén egyenlet, vagyis a gerjesztetlen oszcillátor megoldása (46) volt. Teljesülni fog, hogy $x_I(0) = \dot{x}_I(0) = 0$, vagyis az inhomogén megoldás a kezdeti feltételektől független, a kezdeti értékekhez való illesztés kizárólag az $x_H(t)$ konkrét alakját rögzíti.

1.5 Töltött részecske mágneses mezőben

Az előző rendszerektől fizikailag különbözik, de roppant tanulságos, analitikusan végigszámolható a töltött pontszerű részecske homogén mágneses mezőben megnyilvánuló dinamikája. Egy mozgó töltött részecskére B mágneses mezőben az ún. Lorentz-erő hat,

$$F_L = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \tag{56}$$

Mivel ez egy sebességtől függő erő, kényelmes átírni a mozgásegyenletet a sebességre vonatkozó formába, ahogyan a közegellenállásnak kitett szabad részecskére tettük

$$m\dot{\mathbf{v}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \tag{57}$$

Vizsgálatainkat most a homogén, statikus mágneses mező esetére korlátozzuk. Vegyük fel a z tengelyünket a \mathbf{B} mágneses indukció irányába, ekkor $B_z = B$ és $B_x = B_y = 0$. A mozgásegyenletet komponensenként kiírva:

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y \tag{58}$$

$$\dot{v}_y = -\omega_c v_x \tag{59}$$

$$\dot{v}_z = 0, \tag{60}$$

ahol

$$\omega_c \equiv \frac{qB}{m} \tag{61}$$

a ciklotron frekvencia. Idő szerint differenciálva az első egyenletet, majd behelyettesítve a másodikat kapunk egy másodfokú differenciálegyenletet v_x -re.

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0. \tag{62}$$

Ez egy harmonikus oszcillátor egyenlettel egyezik meg, amelyet az előzőekben már megoldottunk. Ezért v_x időben oszcillálni fog. Azonos egyenleteket kapunk v_y komponensre is. Másrésztől a mágneses mező irányával párhuzamos mozgásra a szabad részecske egyenletét kaptuk meg,

$$\dot{v}_z = 0, \quad v_z = \text{const} = v_{z0}, \quad z = z_0 + v_{z0}t. \tag{63}$$

A (62) egyenlet megoldása (41) alapján:

$$v_x(t) = C_{x1} \cos \omega_c t + C_{x2} \sin \omega_c t. \quad (64)$$

Az integrációs konstansokat a kezdeti feltételek határozzák meg,

$$C_{x1} = v_x(0) = v_{x0} \quad (65)$$

$$C_{x2} = \dot{v}_x(0)/\omega_c = v_y(0) = v_{y0}, \quad (66)$$

ezért megoldás:

$$v_x(t) = v_{x0} \cos \omega_c t + v_{y0} \sin \omega_c t. \quad (67)$$

Hasonló lépéseken keresztül megkapjuk hogy

$$v_y(t) = v_{y0} \cos \omega_c t - v_{x0} \sin \omega_c t. \quad (68)$$

Vizsgáljuk meg, vajon a mozgási energia megmarad-e a statikus mágneses mezőben való mozgás során. Ehhez elegendő a sebesség-komponensek négyzetösszegeit tekintenünk:

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= (v_{x0} \cos \omega_c t + v_{y0} \sin \omega_c t)^2 + (v_{y0} \cos \omega_c t - v_{x0} \sin \omega_c t)^2 + v_{z0}^2 \\ &= v_{x0}^2 \cos^2 \omega_c t + 2v_{x0}v_{y0} \cos \omega_c t \sin \omega_c t + v_{y0}^2 \sin^2 \omega_c t \\ &+ v_{y0}^2 \cos^2 \omega_c t - 2v_{x0}v_{y0} \sin \omega_c t \cos \omega_c t + v_{x0}^2 \sin^2 \omega_c t + v_{z0}^2 \\ &= v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (69)$$

Ebből láthatóan az $E_k = m\mathbf{v}^2/2$ kinetikus energia megmarad, miközben az (v_x, v_y) vektor körbeforog ω_c szögsebességgel. Az x és y koordináták időfüggését v_x illetve v_y integrálásával kapjuk meg.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_{x0}}{\omega_c} \sin \omega_c t - \frac{v_{y0}}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y &= y_0 + \frac{v_{y0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{v_{x0}}{\omega_c} \cos \omega_c t. \end{aligned} \quad (70)$$

A töltött részecske a mezőre merőleges síkban (x_0, y_0) középpontú körpályán fog mozogni. A körpálya R sugarát a fentihez hasonló számolás révén számolhatjuk ki:

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{\omega_c^2}. \quad (71)$$

Ebből eredően a ciklotron-pálya sugara

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{qB}, \quad (72)$$

ahol $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

1.6 Szabadesés kvalitatív vizsgálata

Legtöbb konkrét alkalmazás esetén nem is annyira az egyenletek analitikus megoldása az elsődleges, mint amennyire egy olyan modell felállítása, amelyik az adott jelenség legfontosabb vonásait visszaadni képes. Modellalkotásra szép példa egy ejtőernyős zuhanás dinamikája. Történjen a kiugrást = 0 időpontban. Feltételezzük hogy a szél fújása elhanyagolható, és hogy a mozgás gyakorlatilag függőleges egyenes mentén történik. A nehézségi, illetve a közegellenállási erők lesznek relevánsak.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{köz}, \quad (73)$$

Az alapvető kérdés az lenne, hogy a közegellenállás hogyan függ a sebességtől/időtől illetve a közeg paramétereitől. Mivel azonban kvalitatív vizsgálatra szorítkozunk, egyszerű gondolatmenet szerint járhatunk el: az ejtőernyő Δt idő alatt $v\Delta t$ utat tesz meg ($v = |\mathbf{v}|$). Ha az ejtőernyű effektív keresztmetszete A , a közeg sűrűsége ρ , akkor ezalatt az idő alatt $\Delta m = \rho A v \Delta t$ tömegű levegőt hoz mozgásba. Ezután azzal a feltételezéssel élünk, hogy a megmozgatott légtömeget az ejtőernyő közelítően a saját v sebességére gyorsítja. Így a közegnek átadott energia $\frac{1}{2}\rho A v^3 \Delta t$. Ezt a munkát nyilván a közegellenállási erő ellenereje végzi, ebből eredően a közegellenállási erő által a testre kifejtett teljesítmény $P = -\frac{1}{2}\rho A v^3 = \mathbf{F}_{köz}\mathbf{v}$. Ezt szorozzuk a sebességvektorral: $-\frac{1}{2}\rho A v^3 \mathbf{v} = \mathbf{F}_{köz}v^2$, emiatt:

$\mathbf{F}_{köz} = -\beta v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}$ alakúnak vehető a közegellenállási erő a zuhanást jellemző áramlási térben.

Írjuk a Newton-egyenletet a sebességekre vonatkozó alakúra:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} - \beta|\mathbf{v}|\mathbf{v}, \quad (74)$$

Úgy koordinátázunk, hogy a pozitív értékhez tartozzon a függőlegesen felfelé mutató irány, és tegyük fel –ezt intuitívan sejtjük, de utólagosan, a végeredményből precízen is be lehet látni– hogy a sebesség a zuhanás során végig negatív értékű

$$m\dot{v} = -mg + \beta v^2. \quad (75)$$

Leosztva β -val, és bevezetve a

$$\sqrt{\frac{mg}{\beta}} = v_\infty, \quad (76)$$

változót, –amely az aszimptotikus sebesség nagysága– az egyenletet közvetlenül integráljuk.

$$\frac{m}{\beta} \frac{dv}{dt} = v^2 - v_\infty^2, \quad (77)$$

$$\frac{v_\infty^2}{g} \frac{dv}{dt} = v^2 - v_\infty^2, \quad (78)$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{g}{v_\infty^2} \int_0^t dt, \quad (79)$$

$$\frac{g}{v_\infty^2} t = \int_0^v \frac{dv}{(v - v_\infty)(v + v_\infty)} = \int_0^v \frac{A}{(v - v_\infty)} + \frac{B}{(v + v_\infty)} dv = \int_0^v \frac{1}{2v_\infty(v - v_\infty)} - \frac{1}{2v_\infty(v + v_\infty)} dv \quad (80)$$

Itt a törzfüggvények integrálásának jól ismert módszerét használtuk fel, innen az integrálás egyszerűen elvégezhető:

$$\frac{g}{v_\infty^2} t = \frac{1}{2v_\infty} [\ln|v - v_\infty| - \ln|v + v_\infty|] + C = \frac{1}{2v_\infty} \ln \frac{|v - v_\infty|}{|v + v_\infty|} + C \quad (81)$$

Mivel az ugrás a $t = 0$ időpoillanatban történt, ezért a sebesség ekkor nulla. Könnyen ellenőrizhető módon ez a $0 = C$ egyenletre vezet. Átrendezzük az egyenletet, szorzunk (-1) -el, és az előjeleket figyelembevéve megkapjuk a sebesség időfüggésének áttekinthető alakját.

$$\exp\left[-\frac{2g}{v_\infty}t\right] = \frac{|v + v_\infty|}{|v - v_\infty|}, \quad (82)$$

$$v = v_\infty \frac{e^{-\frac{2gt}{v_\infty}} - 1}{e^{-\frac{2gt}{v_\infty}} + 1} \quad (83)$$

2 Impulzus és impulzusmomentum

Egy részecske impulzusát (vagy lendületét) úgy definiáljuk mint:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (84)$$

Newton második egyenlete átírható az impulzusra vonatkozóan

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (85)$$

Erők hiányában az impulzus megmaradó mennyiség, amiben nincsen semmi újszerű.

Az impulzus jelentőségét kölcsönható részecskék rendszerénél tudjuk értékelni, ahol a teljes impulzust definiáljuk

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (86)$$

Idő szerinti differenciálása után

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (87)$$

Szétválasztva az erőket külső erőkre, és a rendszer alkotórészei között ható belső erőkre, (7), és felhasználva Newton harmadik törvényét (8), könnyen látható, hogy a rendszer teljes impulzusát csak a külső erők változtatják meg,

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (88)$$

A környezetlőtől izolált rendszer esetén külső erők nem játszanak szerepet, emiatt bár az egyes alkotóelemeinek impulzusa változhat a kölcsönhatások révén, de a teljes impulzus megmarad. A teljes impulzus megmaradása alapvető fontosságú eredmény, például ütközésekkel kapcsolatos számítások esetén. Az ütközések során a rendszerek gyakorlatilag izoláltak tekinthetők, mert az ütközés olyan rövid ideig tart, hogy a külső erők nem képesek számottevő mértékben megváltoztatni az impulzusokat. Emiatt ütközéseknél a belső erők a meghatározóak.

Egy részecskére vonatkozó impulzusmomentum, (vagy impulzusnyomaték, perdület) úgy definiált mint:

$$\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \quad (89)$$

ahol \mathbf{r} a részecske koordináta-vektora valamely vonatkoztatási rendszerben. Emiatt természetesen az impulzusmomentum függ a koordináta-rendszer origójának választásától. Az idő szerinti deriváltja

$$\dot{\mathbf{l}} = [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] \equiv \boldsymbol{\tau}. \quad (90)$$

Itt $\boldsymbol{\tau}$ jelöli a forgatónyomatékokot, amely szintén a vonatkoztatási rendszerünktől függ. Abban a speciális esetben mikor az erő centrális, vagyis egy tetszőleges pont irányába –vagy attól el– mutat, érdemes úgy felvenni a vonatkoztatási rendszerünket, hogy az origót ebbe a kitüntetett pontba helyezzük. Ekkor a forgatónyomaték nulla, és az impulzusmomentum megmaradó mennyiség lesz.

Egy rendszer teljes impulzusmomentumát definiáljuk:

$$\mathbf{L} = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]. \quad (91)$$

Az idő szerinti deriválást elvégezve:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i] = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}] + \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{f}_{ij} \right]. \quad (92)$$

A belső erőket tartalmazó tagot kiírva, felhasználva az indexek átnevezhetőségét, illetve Newton harmadik törvényét:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{int}} = \sum_{ij} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}] = \sum_{ij} [\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}] = - \sum_{ij} [\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij}]. \quad (93)$$

Ilyen módon a belső erők forgatónyomatéka $\dot{\mathbf{L}}_{\text{int}}$ kifejezhető mint:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}]. \quad (94)$$

Ha, mint általában, a kölcsönhatásokból eredő erők centrálisak, az erők iránya a kölcsönható részecskéket geometriailag összekötő egyenessel párhuzamosak lesznek. Emiatt a fenti vektoriális szorzás eltűnik. A rendszer teljes impulzus-momentumának a megváltozása kizárólag a külső eredetű forgatónyomatékoktól függ,

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}] = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (95)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan transzformálódik az impulzusmomentum koordináta-eltolásra. Ha az eredetihez képest \mathbf{a} -val eltolt koordinátarendszert tekintünk, az eredeti koordinátákat az új koordinátákkal kifejezve:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}. \quad (96)$$

A teljes impulzusmomentum pedig

$$\mathbf{L} = \sum_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{a}) \times \mathbf{p}_i] = \mathbf{L}' + [\mathbf{a} \times \mathbf{P}]. \quad (97)$$

Látható, hogy ha a \mathbf{P} teljes impulzus nulla, a teljes impulzusmomentum független a koordinátarendszerünk origójának helyétől. If the system is close to the origin of the primed frame but far from the origin of the original frame, one can say that the term $[\mathbf{a} \times \mathbf{P}]$ is the angular momentum corresponding to the motion of the system as the whole in the original frame.

Hasonlóan, a forgatónyomatéokra felírható hogy:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_i] = \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{a} \times \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (98)$$

Vagyis, ha az eredő erő nulla, a forgatónyomaték független a koordinátarendszerünk origójának helyétől, hiszen ekkor $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'$.

2.1 Becsapódási mélység

Az impulzus-megmaradáson alapul egy nagyon egyszerű, Newton által leírt megfontolás. Ez a megfontolás egy nagy sebességgel mozgó, a sebesség irányában \mathbf{L} kiterjedésű, \mathbf{A} effektív hatáskeresztmetszetű, ρ sűrűségű test valamilyen homogén, $\rho_{\mathbf{k}}$ sűrűségű közegbe való becsapódásakor keletkező kráter mélységének a közelítő felírása.

A sebesség nagysága ebben az esetben a közegbeli hangsebességhez viszonyított nagyságot jelent. Szokásos feltételezés továbbá hogy a becsapódó test tompa, így a közeget maga előtt kénytelen tolni, azonos sebességgel.

Ugyanakkor ekkora sebességek mellett a közeg belső erői elhanyagolhatóak, így gyakorlatilag fluidumként viselkedik, ebből eredően az impulzus-átadás rugalmas módon, közvetlenül történik.

A kráter D mélysége azt jelenti, hogy a közegben ekkora utat tud megtenni a test megállásig, vagyis az impulzusát ekkora úton kell leadnia.

$$\rho L A v = \rho_k D A v, \quad (99)$$

$$D = L \frac{\rho}{\rho_k}. \quad (100)$$

Ez az erősen közelítő jellegű eredmény több helyen is alkalmazásra kerül, például geológusok által a meteoritok vizsgálatában, vagy különféle lövedékek hatásának a becslésében.

2.2 Feynman-féle locsolófej

Legyen egy "S" alakú locsolófejünk. Ha folyadék áramlik ki belőle, az intuíciónknak megfelelő irányú forgatónyomaték fog hatni a locsolófejre. A kérdés most, hogy milyen irányba fog gyorsulni beszívás esetén.

Kezdjük az ideális folyadék esetével. Ekkor a stacionárius viselkedés legegyszerűbben a rendszer (forgástengelyre vonatkozó) impulzusmomentumának megmaradása alapján érthető meg. A kiáramló folyadék tetszőlegesen kis térfogatát vizsgálhatjuk, miközben egy áramlási vonal mentén halad. Amíg a sebesség sugárirányú, a tengelyre vonatkozó imp.momentum nulla, de aszimptotikusan mégis rendelkezni fog valamekkora impulzusmomentummal. Mivel a rendszer egészére nézve megmarad az imp.momentum, a csőnek kellett ellentétes előjelű perdületre szert tennie. Mivel ez a folyamat folyamatosan történik, így a locsolófej folyamatosan perdületet nyer a folyadékkal ellentétes irányban.

Ha befelé szívjuk a folyadékot, akkor azonos gondolatmenet alapján tudjuk hogy a trajektória végén a folyadék-részecskék impulzusmomentumának nullának kell lennie, hiszen radiális irányú a sebesség. Ha azonban a folyadék kezdetben nyugalomban volt (amit hallgatólágyosan feltételezünk), akkor kezdetben is azonosan nulla volt, így nem szállít el a folyadék perdületet a rendszertől. Emiatt a forgatónyomaték nulla lesz.

Természetesen ezzel a gondolatmenettel csak a stacionárius viselkedést írtuk le, a bekapcsolás/kikapcsolás pillanatában érvénytelen lesz a következtetésünk. A beszívás elkezdése után egy rövid ideig lesznek olyan folyadék-részecskék, amelyek szert tesznek perdületre, de amelyeknek nincsen "ellentétes megfelelőjük" (vagyis olyan részecske amelyik éppen leadja az imp.momentumát).

Egy valódi, viszkózus folyadékkal más a helyzet. Az impulzusmomentum nem marad meg, de az előző gondolatmenetből kitalálható a változás. Ekkor a befelé szívás során bármely áramló részecske, amelyik szert tesz perdületre, nem fogja tudni visszaadni az imp.momentumot teljes egészében a locsolófejnek a disszipáció miatt. Emiatt a fej a folyadék áramlásának az irányába fog gyorsulni. Ez a forgatónyomaték azonban kisebb mint az ellentétes irányban.

3 Munka, energia, konzervatív erők

Definiáljuk az \mathbf{F} erő által a részecske $d\mathbf{r}$ elmozdulása során végzett infinitézimális munkát:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (101)$$

Itt most azért használjuk a δW jelölést dW -vel szemben, hogy kihangsúlyozzuk azt a tényt, hogy a munka általában nem (egyértékű) függvénye a helynek, így differenciája sem értelmezhető közvetlenül. Szintén alapvető fogalom a P teljesítmény, amely az egységnyi idő alatt végzett munka,

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (102)$$

Ha \mathbf{F} egy szabad részecskére hat, az gyorsulni vagy lassulni fog, de a részecskén végzett munka a mozgási energia változása alapján meghatározható

$$E_k = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}. \quad (103)$$

A mozgási energia infinitézimális megváltozása éppen az infinitézimális munkával egyenlő

$$dE_k = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \delta A. \quad (104)$$

Kiemelt fontosságú az úgynevezett konzervatív erő(tér), amikor az erőket ki tudjuk fejezni egy csak a helytől függő U potenciál negatív gradienseként

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (105)$$

A konzervatív erők által végzett munka független a trajektóriáktól, értéke csak a kezdeti és végpontok helyétől függ,

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \quad (106)$$

Zárt görbe mentén a konzervatív erők munkája mindig nulla,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (107)$$

mert az U változása egy körülvjárás után zérus. Az (106) egyenlet átírható úgy, hogy a potenciális energia definícióját adja meg az erőn keresztül,

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (108)$$

Itt $U(\mathbf{r}_0)$ a potenciális energia (tetszőleges) értéke az \mathbf{r}_0 viszonyítási pontnál. A potenciális energia közvetlenül nem mérhető fizikai mennyiség, az erőn keresztül definiált, értéke egy tetszőleges konstans erejéig meghatározott. Az (108) egyenlet érvényessége azon múlik, hogy az integrál értéke független az úttól. Ha, mint azt korábban írtuk, \mathbf{F} konzervatív erőter, tetszőleges zárt görbe mentén vett vonal menti integrálja nulla, amit a Stokes-tétel segítségével átírhatunk az erőter rotációjára vonatkozó felületi integrállá

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (109)$$

Ha fennáll, hogy

$$\text{rot } \mathbf{F} \equiv \text{curl } \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0, \quad (110)$$

akkor \mathbf{F} konzervatív erőter.

Természetesen az erők általában – mint például a súrlódási/közegellenállási erők – nem konzervatívok. Egy fontos speciális esete a konzervatív erőtereknek a homogén erőter, mint amilyenek közelítően a gravitáció is tekinthető a Föld felszínének közelében,

$$U = m\mathbf{g}\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z + \text{const}, \quad (111)$$

ahol \mathbf{e}_z az erő irányával ellentétes irányba (felfelé) mutató egységvektor. Egy másik fontos példa a két tömegpont közötti gravitációs kölcsönhatás. Ekkor, konstanstól eltekintve a rendszerhez rendelhető potenciális energia

$$U = G \frac{mM}{|\mathbf{r}|}. \quad (112)$$

Itt \mathbf{r} a két tömegpontot összekötő koordináta-vektor, amelyet sokszor szokás a nagy M tömegtől (pl: Nap) a kis m tömeg (pl: Föld) felé irányítottan felvenni. Ekkor az m tömegű testre ható erő

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -G \frac{mM \mathbf{r}}{r^2 r}, \quad (113)$$

ahol felhasználtuk a

$$\frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (114)$$

relációt. Ez az erőter szigorúan centrális, így megőrzi az impulzuszórányt.

További fontos példa a Lorentz-erő, (56), mely azonban ponttöltésen nem végez munkát, így skalárpotenciál nem rendelhető hozzá. Ebből eredően természetesen nem jár az energia megváltozásával, mint a súrlódási erők.

Most tekintsük át az erők teljesítmény-viszonyait.

Egy anyagi pont teljes energiája

$$E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{r}) \quad (115)$$

dinamikailag megmaradó mennyiség (ú.n. *első integrál*), ha egyéb disszipatív –tehát nem skalárpotenciálos– erő nem hat rá.

$$\dot{E} = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (m\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (116)$$

amely reláció newton második törvényéből következően fennáll. Ez az általános összefüggés mutatja meg, hogy miért szokás konzervatív erőternek nevezni azokat az erőtereket, amelyek egyértelműen leírhatók skalárpotenciállal. Súrlódási vagy közegellenállási erők mellett (11), a testre eső teljesítmény

$$\dot{E} = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \left(-\alpha \mathbf{v} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} = -\alpha \mathbf{v}^2, \quad (117)$$

amely negatív előjeléből világos az energia-disszipáció fizikai jelentése is.

Fejezzük ki az E energiát, mint Newton második törvényének az első integrálját. Szorozzuk meg a teljesítményt skalárisan \mathbf{v} -vel, majd a kifejezést átalakítva kapjuk hogy

$$0 = \left(m\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right). \quad (118)$$

Ha ezt a kifejezést integráljuk idő szerint, megkapjuk az (115) egyenletet a további információval, hogy $E = \text{konstans}$.

Kölcsönható részecskék rendszerének a teljes energiája sokszor úgy írható mint

$$E = \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} + U(\{\mathbf{r}_i\}), \quad (119)$$

ahol a potenciális energia általában a rendszert alkotó összes részecske pozíciójától függ. Nem-konzervatív erők hiányában az összetett rendszerek teljes energiája megmaradó mennyiség. Ennek belátása szintén Newton második törvényéből vezethető le, hasonló úton mint egy részecskére. Az esetek jelentős részében a potenciális energia egyrészecske- és kétrészecske potenciálokból áll,

$$U(\{\mathbf{r}_i\}) = \sum_i U_0(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{ij} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (120)$$

A párkölcsönhatásokhoz tartozó $1/2$ együttható azért szükséges ebben a felírásban, hogy kompenzálja az ij és ji indexű tagok kétszeres összegét. Ez szükséges ahhoz hogy a két részecske közötti kölcsönhatási energia

V legyen. A párkölcsönhatások potenciálja legtöbbször eltolás-invariáns (nem változik meg az $\mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$ transzformáció hatására). Felhasználva az (114) egyenletet, kapjuk meg a megfelelő erőt,

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_j \mathbf{f}_{ij}, \quad (121)$$

ahol a párkölcsönhatási erők

$$\mathbf{f}_{ij} = -V'(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (122)$$

Itt V' a potenciálfüggvény argumentum szerinti deriváltját jelöli. Azonnal látható hogy Newton harmadik törvénye ($\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$) teljesül. Ahogyan már említettük (94) egyenlettel kapcsolatban, a párkölcsönhatási erők iránya a két részecskét összekötő egyenesre esik.

3.1 Szabadesés nagy magasságból

Tekintsünk egy pontszerű testet, amint egy ρ sugarú, M tömegű bolygó tömegközéppontjától kezdetben R_0 távolságra nyugszik.

A többi égitest gravitációs hatása elhanyagolható, léggör a pálya túlnyomó részén gyakorlatilag nincs. Ezekkel a közelítésekkel célunk a dinamika meghatározása.

Mivel a tangenciális sebesség nulla, a Newton-egyenlet

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}. \quad (123)$$

Az egyenlet közvetlen megoldása nem triviális. Az első lépés mindenképpen az, hogy a másodrendű egyenletet elsőrendűvé alakítjuk, ehhez szorozzuk meg \dot{R} -el.

$$\dot{R}\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}\dot{R} \quad (124)$$

Az egyenlet ekvivalensen átalakítható

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{R}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GM}{R} \quad (125)$$

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = C \quad (126)$$

Észrevehetjük, hogy ez az átalakítás éppen a mozgási energiát adja. Ez a példa rávilágít az energiamegmaradásnak, mint számítási eszköznek a hasznára. Mivel így elsőrendű egyenletünk van, könnyen integrálható alakíthatjuk. Közben érdemes megjegyezni, hogy a kezdeti feltétel értelmében $C = -\frac{GM}{R_0}$.

$$\dot{R} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)} \quad (127)$$

Az egyenlet szétválasztható:

$$\int_{R_0}^{R(\tau)} \frac{dR}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)}} = -\int_0^\tau dt. \quad (128)$$

Átalakítva a kifejezést és bevezetve az $u = \sqrt{R}$ változót, figyelembevéve hogy $du = \frac{dR}{2\sqrt{R}}$:

$$-\tau = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{R_0}^{R(\tau)} \frac{\sqrt{R}dR}{\sqrt{1 - \frac{R}{R_0}}} = \frac{2}{\sqrt{2GM}} \int_{\sqrt{R_0}}^{\sqrt{R(\tau)}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{R_0}}} = \frac{2}{\sqrt{2GM}} \int_{\sqrt{R_0}}^{\sqrt{R(\tau)}} \left(\frac{-R_0\left(1 - \frac{u^2}{R_0}\right) + R_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{R_0}}} du \right) \quad (129)$$

Az integrálás elvégzéséhez újabb változó bevezetése szükséges, legyen $u = \sqrt{R_0} \sin(v)$, $du = \sqrt{R_0} \cos(v) dv$. Ekkor

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{2R_0\sqrt{R_0}}{\sqrt{2GM}} \int_{\arcsin(1)}^{\arcsin(\frac{\sqrt{R(\tau)}}{\sqrt{R_0}})} \left(\frac{-\cos^2(v) + 1}{\sqrt{\cos^2 v}} \cos v dv \right) = -\frac{2R_0\sqrt{R_0}}{\sqrt{2GM}} \left[v - \frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right]_{\arcsin(1)}^{\arcsin(\frac{\sqrt{R(\tau)}}{\sqrt{R_0}})} \quad (130) \\ &= -\frac{2R_0\sqrt{R_0}}{\sqrt{2GM}} \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin v \sqrt{1 - \sin^2 v}}{2} \right]_{\arcsin(1)}^{\arcsin(\frac{\sqrt{R(\tau)}}{\sqrt{R_0}})} = \frac{R_0\sqrt{R_0}}{\sqrt{2GM}} \left(-\arcsin \sqrt{\frac{R(\tau)}{R_0}} + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{R(\tau)}{R_0}} \sqrt{1 - \frac{R(\tau)}{R_0}} \right) \quad (131) \end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk az implicit összefüggést a τ időpont, és az ahhoz tartozó $R(\tau)$ között, így bár ez az összefüggés nem ad szemléletes képet, de elvileg minden információt tartalmaz a trajektóriáról.

Természetesen ez a megoldás, akárcsak a differenciálegyenlet, csak $R > \rho$ esetén érvényes.

Speciálisan azt is láthatjuk, hogy az $R(\tau) = 0$ helyet a formula szerint $\tau_0 = \frac{\sqrt{R_0^3}}{\sqrt{2GM}} \frac{\pi}{2}$ idő alatt éri el a test, bár a modell alkalmazhatósági keretein ekkor már kívül vagyunk. Ez a részeredmény viszont pontosan visszaadja Kepler harmadik törvényét elfajult ellipszis esetére.

3.2 Munkavégzés eltérő inerciarendszerekben

Egy ideális autó háromszor annyi munkát végez $10 \frac{km}{h}$ -ről $20 \frac{km}{h}$ -re gyorsulás során, mint $0 \frac{km}{h}$ -ről $10 \frac{km}{h}$ -ra gyorsulás közben. Az autó által elvégzett munka jól mérhető az üzemanyag-fogyasztásából.

Ha azonban az autó gyorsulását egy egygyüttmozgó, $10 \frac{km}{h}$ sebességű mozgó vonat rendszeréből szemléljük, azt látjuk hogy az autó háromszor annyi üzemanyagot fogyaszt, mint amennyit a végzett munka alapján gondolnánk.

Mire fordítódik a többlet-üzemanyagnak az energiája?

Az elsőre meglepő válasz a kérdésre az, hogy a Föld forgási energiáját növeli.

(...)

4 Tömegközéppont, redukált tömeg

Pontrendszerek bármely rendszerére definiálható a tömegközéppont (TKP):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (132)$$

ahol $M = \sum_i m_i$ a rendszer teljes tömege. Folytonos rendszer esetén a TKP-ot összegzés helyett a megfelelő integrál definiálja. A tömegközéppont sebességével kapcsolatos a teljes impulzus

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{P}}{M}. \quad (133)$$

Ez a formula egy szemléletes képet nyújt a rendszerről, mint egy M tömegű testről, amely \mathbf{V} sebességgel mozog. A TKP dinamikáját a külső erők határozzák meg,

$$M\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}, \quad (134)$$

ahol felhasználtuk az (88). egyenletet. Értelemszerűen, egy izolált rendszer tömegközéppontja konstans sebességgel mozog.

Sok esetben kényelmes úgy koordinátázni, hogy az origó a tömegközéppontba essen, mivel ez számítási szempontból egyszerűsítésekhez vezethet. A tömegközépponti rendszerben a rendszer egésze nyugalomban van, a mozgás csak a pontrendszer belső mozgása, ha úgy tetszik alakváltozása lehet. Az egyes részecskék koordináta-vektorait mindig felbonthatjuk a TKP koordinátavektorának és a TKP rendszerében az egyes tömegpontok koordinátáinak összegére:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (135)$$

és a sebességekre azonosan

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}. \quad (136)$$

A tömegközépponti rendszerben a TKP helyvektora definíció szerint a nullvektor,

$$\mathbf{R}' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \mathbf{R} = 0. \quad (137)$$

A rendszer teljes impulzusa ugyanitt szintén nulla,

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0. \quad (138)$$

Az impulzusmomentum az (91) egyenlet definíciója alapján a TKP rendszerében

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \sum_i [\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i] = \sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})] \\ &= \mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{P} - \mathbf{R} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{V} \\ &= \mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{P} - \mathbf{R} \times \mathbf{P} - \mathbf{R} \times \mathbf{P} \end{aligned} \quad (139)$$

ami átalakítható,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (140)$$

Ez azt jelenti, hogy a teljes \mathbf{L} impulzusmomentum a belső \mathbf{L}' impulzusmomentumnak és a rendszer egészét jellemző $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ impulzusmomentumnak az összege. Ez az eredmény egybeesik az (97) egyenlettel, $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{R}$ helyettesítés mellett.

Pontrészecskék mozgási energiája is természetesen felbontható az eddigi gondolatmenettel,

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i{}^2 + \frac{M\mathbf{V}^2}{2} + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{V} = E'_k + \frac{M\mathbf{V}^2}{2} \quad (141)$$

ahol a rendszer teljes impulzusa $\mathbf{P}' = 0$. Emiatt teljesül az a tétel, hogy a mozgási energia felbontható a belső mozgási energiára és a rendszer egészéhez tartozó mozgási energiára.

Két kölcsönható pontszerű részecskéből álló izolált rendszert jellemez az ún. redukált tömeg. Ez abból ered, hogy a két kölcsönható test leírható úgy, mintha egyetlen redukált tömegű test mozogna a rendszer tömegközéppontja körül. A tömegközépponti rendszert választva, az teljesül hogy

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (142)$$

Az egyetlen releváns dinamikai változó ekkor a koordináta-különbség vektora,

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (143)$$

Ezen két egyenlet felhasználásával kifejezhetjük az egyes részecskék helyzetét mint

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (144)$$

Ekkor a rendszer teljes energiája

$$E = \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (145)$$

átírható olyan alakúra, hogy formálisan egyetlen részecske szerepeljen

$$E = \frac{m \mathbf{v}^2}{2} + U(|\mathbf{r}|), \quad (146)$$

ahol $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ és bevezetjük a

$$m \equiv \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (147)$$

redukált tömeget. A rendszer mozgásegyenleteit kifejezhetjük azonos formában írhatjuk az egyes testekre, mint a redukált tömegpontra,

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (148)$$

A redukált tömegű testre vonatkozó mozgásegyenletnek megvan az az előnye, hogy egyetlen változó, így egyetlen egyenlet van.

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (149)$$

5 Mozgás egydimenziós időfüggetlen potenciálban

Az elvileg megoldható rendszerek fontos csoportját képezik az egydimenziós konzervatív egytest-rendszerek. Ezekben a rendszerekben a teljes energia megmaradása felhasználható arra, hogy a másodrendű differenciálegyenletet elsőrendű differenciálegyenletre vezessük vissza, amelyet aztán egyszerű módon integrálhatunk. A test energiája ekkor

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x). \quad (150)$$

Legtöbbször a fizikai rendszerek valamilyen kényszerfeltételek hatására viselkednek gyakorlatilag egydimenziósan. Például egy nagyon könnyű, rögzített tengely körül forgatható merev rúdra erősített test (matematikai inga) gyakorlatilag csak egy síkban, pontosabban egy azon lévő körfelület mentén mozoghat. Ha a síkot az xy síknak választjuk, a mozgás leírható egyetlen változóval, a φ szöggel. Ez teszi a matematikai ingát egydimenzióssá. A továbbiakban a változót x -nek jelöljük, ekkor a mozgásegyenlet átírható a $v = \dot{x}$ sebességekre, így kapjuk az alábbi, elsőrendű közönséges differenciálegyenletet

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}. \quad (151)$$

Itt az E paraméter szerepét játssza. Az (151) egyenlet integrálása átrendezés után történik

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (152)$$

Ami $x(t)$ függvényt implicit módon definiálja. Ebben a formában az integráláskor jön még egy integrációs konstans.

A klasszikus mechanikai rendszerek esetén a test mozgása az $E > U$ régiókban lehetséges, itt lehet a mozgási energia nemnegatív. Az $E < U$ régiók elérhetetlenek a testek számára, és az ilyen helyeket *potenciálgát*-nak hívják. A tömegpont eléri a mozgás során, ha eléri egy potenciálgát szélét, megváltoztatja a mozgásának az irányát a *fordulópontnál*, ahol $E = U$ és emiatt $v = 0$. Természetesen a fordulópontok helye függ az energiától. Ha az adott dinamika jobb és baloldali fordulópont által korlátozott, x_1 és x_2

helyeken –amely helyek az $E = U(x)$ egyenlet gyökei – akkor a részecske mozgása e két pont közötti rezgés lesz.

A rezgést jellemző periódusidő kétszerese annak az időnek, ami a fordulópontok közti szakasz megtételéhez kell

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (153)$$

Jól látható hogy általában a periódusidő függ az E energiától. Fontos speciális eset az, amikor E közel van $U(x)$ minimumához, és az utóbbi Taylor-sorba fejtésében a másodrendű tag el nem tűnő,

$$U(x) \cong U_0 + \frac{k}{2} (x - x_0)^2, \quad (154)$$

A rendszer ekkor harmonikus oszcillátornak vehető, a periódusidő pedig függetlenné válik az energiától. A harmonikus oszcillátor mozgását már korábban meghatároztuk. A most tárgyalt módszerrel, $U_0 = x_0 = 0$ -t választva, azt találjuk hogy $x_{1,2} = \pm x_m$, ahol $x_m = \sqrt{2E/k}$. Ekkor az (152) integrált elvégezve

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega_0} \int \frac{\frac{dx}{x_m}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}}} = \frac{1}{\omega_0} \left(\arcsin \frac{x}{x_m} + \varphi_0 \right), \quad (155)$$

ahol $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ az oszcillátor frekvenciája és φ_0 az integrációs konstans. Átrendezve a formulát x -re, azt kapjuk hogy

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (156)$$

ami ekvivalens az (41) -al.

Általában periódusidők kiszámítására alkalmazható ez a módszer, bár természetesen – mint említettük – implicit megoldást is ad.

Utóbbi esetben fontos azonban az előkerülő függvények; mint például az arkuszfüggvények, megfelelő értelmezése.

5.1 Tiszta anharmonikus rezgés periódusideje

A négyzetes, harmonikus potenciális energia nagyon speciális. Ha $U(x)$ szub-harmonikus (lassabban növekszik mint x^2), a frekvencia csökken az amplitúdóval, szuperharmonikus $U(x)$ potenciálra pedig növekszik.

Tekintsük az $U(x) = A|x|^n$ potenciált ($n > 0$). Ebben a fordulópont $x_{1,2} = \pm x_m$, ahol $x_m = (E/A)^{1/n}$. Az (153) egyenletben szereplő periódust egyszerűbb úgy kifejezni, mint a negyed-úthossz megtételéhez szükséges idő négyszeresét

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{2m}{A}} \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{x_m^n - x^n}}. \quad (157)$$

Átváltva az $y \equiv x/x_m$ változóra, azt kapjuk hogy

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{2m}{A}} x_m^{1-n/2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}} = 2\sqrt{\frac{2m}{A}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n-1/2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}, \quad (158)$$

ahol az integrál eredménye valamilyen szám lesz, de végeredménytől függetlenül fennáll, hogy a frekvencia függésére

$$\omega_0(E) \propto 1/T \propto E^{(n-2)/(2n)} \quad (159)$$

írható. Ez bizonyítja a korábbi állításunkat.

A konkrét érték meghatározásához természetesen meg kell határozni az integrált, amelyet egy speciális függvény, az úgynevezett Gamma-függvény segítségével fejezhetünk ki. A Gamma-függvények bizonyos értelemben a faktoriális általánosításának tekinthetők.

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{2m}{A}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n-1/2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})} \quad (160)$$

5.2 Mozgás ciklois mentén

Történetileg fontos speciális esetet jelent a ciklois mentén mozgó test. A pontos időméréshez szükséges volt olyan ingák készítése, amelyek periódusideje jó közelítéssel stabil, nagy kitérésekre is független az energiától.

Az ilyen testek ciklois mentén mozognak, az xy síkot a mozgás síkjának választva, a mozgás pályája

$$\begin{aligned} x(t) &= R[\theta(t) - \sin \theta(t)] \\ y(t) &= R[\cos \theta(t) - 1]. \end{aligned} \quad (161)$$

Illetve a sebességek:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= R\dot{\theta}(t)[1 - \cos \theta(t)] \\ \dot{y}(t) &= -R\dot{\theta}(t)[\sin \theta(t)]. \end{aligned} \quad (162)$$

Ebből az energiát kifejezzük:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2(t)[2 - 2\cos \theta(t)] + mgR[\cos \theta(t) - 1]$$

Így a dinamikát egydimenziósra vezettük vissza, ezt a korábbiak mintájára átalakíthatjuk,

$$\begin{aligned} \frac{E - mgR[\cos \theta(t) - 1]}{mR^2[1 - \cos \theta(t)]} &= \dot{\theta}^2(t) \\ \frac{d\theta}{dt}(t) &= \sqrt{\frac{E - mgR[\cos \theta(t) - 1]}{mR^2[1 - \cos \theta(t)]}} \\ t = \int dt &= \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E - mgR[\cos \theta(t) - 1]}{mR^2[1 - \cos \theta(t)]}}} \end{aligned} \quad (163)$$

Használjuk fel, hogy $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, illetve hogy rezgést vizsgálunk, vagyis a teljes energia felírható mint egy maximális potenciális energia, vagyis $E = mgR[\cos \theta_0(t) - 1] = -2mgR \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$

$$t = \sqrt{2m}R \int \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{E + 2mgR \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \sqrt{2m}R \int \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2mgR \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2mgR \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{(\sin^2 \frac{\theta}{2} - 1) + (1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2})}}$$

Az integrál elvégezhető a megfelelő változóval, legyen $u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}$, $du = \frac{-\sin \frac{\theta}{2}}{2\cos \frac{\theta_0}{2}} d\theta$, az integrálást $u = 1$ -től $u = 0$ -ig végezzük

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = -8\sqrt{\frac{R}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -8\sqrt{\frac{R}{g}} (\arcsin 0 - \arcsin 1) = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

A megoldás is felírható a következő tömör alakban, a $\theta(t)$ időfüggéséhez az arkuszkoszinusz-függvény megfelelő értelmezésével fejezhetjük ki.

$$t = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin u$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta_0}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t\right)$$

5.3 Véges méretű test

6 Geometriai kényszerek, és speciális koordinátarendszerek alkalmazása

Bizonyos mechanikai rendszerek *kényszerek*-nek vannak kitéve, amelyek a mozgásukat jelentős mértékben befolyásolhatják. Részletesebb vizsgálatukra később térünk vissza, de a legegyszerűbb geometriai kényszerekre példát látunk az alábbi speciális problémák formájában. Egyszerű példák a geometriai kényszerekre a rögzített lejtőn mozgó test, az elhanyagolható tömegű merev rudakkal összekötött tömegek, vagy a matematikai inga (elhanyagolható tömegű merev rúd, egyik végén tömeghez rögzítve, a másik vége forgást megengedően rögzített).

6.1 Matematikai inga

6.2 Gömbi koordinátarendszer, gömbinga

7 Mozgás centrális erőterekben

7.1 A Kepler-probléma

7.2 Szórás centrális erőtérben

7.3 Kis-szögű szórás