De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

**Opgave 1** Reducér udtrykket $(p+q)^2+2p\cdot(p-q)$.

a) Udtrykket reduceres.:

$$(p+q)^2+2p\cdot(p-q)$$
$$=p^2+q^2+2pq+2p^2-2pq$$
$$=3p^2+q^2$$

Dermed har man reduceret udtrykket. Undervejs blev første kvadratsætning anvendt.

**Opgave 2** Grafen for en lineær funktion $f(x)=ax+b$ går gennem punkterne $A(3,4)$ og $B(5,10)$.

Bestem tallene $a$ og $b$.

a) Tallene $a$ og $b$ bestemmes.:

$$4=3a+b \quad (1)$$
$$10=5a+b \quad (2)$$

Vi ganger igennem (1) med $-1$:

$$-4=-3a-b$$
$$10=5a+b$$

Ovenstående ligninger lægges sammen.:

$$6=2a \Leftrightarrow a=3$$

Dernæst indsættes $a=3$ i enten (1) eller (2).:

$$4=3\cdot 3+b \Leftrightarrow b=-5$$

Alternativt kunne man bruge formlerne for $a$ og $b$.:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{10-4}{5-3}=\frac{6}{2}=3$$
$$b=y_1-ax_1=4-3\cdot 3=-5$$

Dermed er tallene $a$ og $b$ bestemt.

$$a=3; b=-5$$

Og den lineære funktion er:

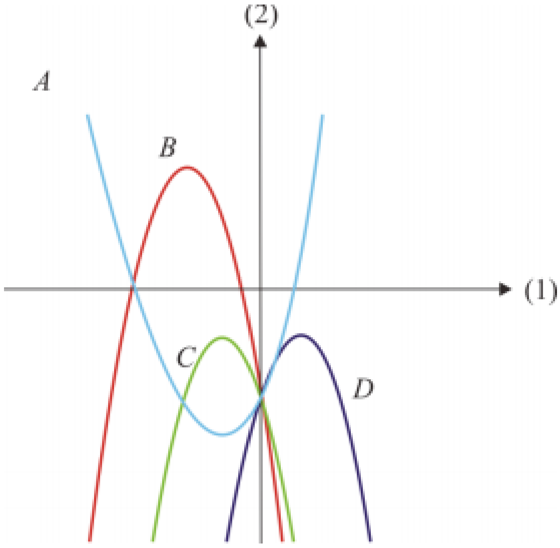
$$f(x)=3x-5$$

**Opgave 3** Om et andengradspolynomium

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

oplyses, at $a$, $c$ og diskriminanten alle er negative. Endvidere oplyses det, at hældningskoefficienten for parablens tangent i parablens skæringspunkt med andenaksen er positiv.
En af de fire grafer $A$, $B$, $C$ og $D$ på figuren er graf for $p$.

Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for $p$.



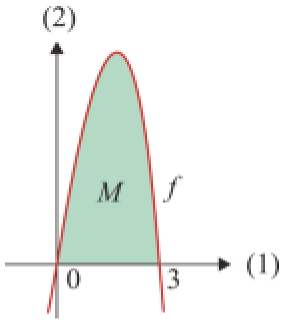

a) For andengradsfunktionen $p(x)$ gælder der, at $a < 0, b < 0$ og $d < 0$. Det oplyses også hvordan hældningskoefficienten for tangenten til grafen for $p(x)$, som oplyses til at være positiv. Hvis den er positiv, så betyder det, at $b > 0$ og den eneste graf der opfylder det, er $D$.

**Opgave 4** En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 9x\,.$$

Grafen for $f$ og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant en punktmængde $M$.

Bestem arealet af $M$.




a) Arealet bestemmes.:

$$M = \int_0^3 -x^3 + 9x\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = -\frac{1}{4}3^4 + \frac{9}{2}3^2 - \left(-\frac{1}{4}0^4 + \frac{9}{2}0^2\right) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2}$$

$$= -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = -\frac{81\cdot 2}{4\cdot 2} + \frac{81\cdot 4}{2\cdot 4} = \frac{-162 + 324}{8} = \frac{162}{8} = \frac{81}{4} = 20.25$$

**Opgave 5** En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = e^x + 7x.$$

Gør rede for, at $f$ er en voksende funktion.

a) Det ses, at der er givet en funktion med eksponentialfunktionen $e$. Funktionen differentieres.:

$$f'(x) = e^x + 7$$

Eftersom den afledede funktion er positiv og ligger på den positive side af $x$-aksen, og da $7$ er lagt til vil grafen for $f(x)$ skærer $y$-aksen i $8$. Endelig vides det, at den afledede aldrig skærer $x$-aksen og pr. definition er det betydningen for, at $f(x)$ altid er voksende.

**Opgave 6** En cirkel har centrum i punktet $(0,0)$ og radius $\sqrt{2}$. Linjen $l$ har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opskriv en ligning for cirklen, og bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen $l$ og cirklen.

a) Ligningen for cirklen er pr. definition $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Med oplysningerne er cirklens ligning:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Der er givet parameterfremstillingen. Indsættes parameterfremstillingen i cirklens ligning har man en ligning med en ubekendt.:

$$\begin{aligned}
&(3+t)^2 + (-3-t)^2 = 2 \Leftrightarrow \\
&3^2 + t^2 + 6t + 3^2 + t^2 + 6t = 2 \Leftrightarrow \\
&2t^2 + 12t + 18 = 2 \Leftrightarrow \\
&2t^2 + 12t + 16 = 0 \Leftrightarrow \\
&t^2 + 6t + 8 = 0
\end{aligned}$$

Dermed har man en andengradsligning. Ligningen kan omskrives til den faktoriseret form, nemlig:

$$(t+2)(t+4) = 0$$

Hermed er værdierne af $t$ fundet. Dernæst kan skæringspunkterne findes.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Indsættes værdierne af $t$ fås:

$$skæringspunkt\ 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$skæringspunkt\ 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er det ønskede fundet.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

**Opgave 7**

*Solarfeld Erlasee bei Arnstein (Kilde: Wikimedia commons)*

Tabellen viser udviklingen i den procentdel af Tysklands elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi.

| År | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Procentdel | 3,1 | 4,5 | 6,5 | 10,4 | 11,8 | 14,5 | 15,2 | 16,6 | 18,1 | 20,0 |

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$P(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor $P(x)$ er procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi, og $x$ er antal år efter 1990.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene $a$ og $b$.

b) Gør rede for betydningen af tallet $a$, og bestem fordoblingstiden.

Tysklands mål er, at i år 2020 skal mindst 35% af landets elektricitetsproduktion komme fra vedvarende energi.

c) Benyt modellen til at vurdere om målet er realistisk.

*Kilde: technology review, July/August* 2012.

a) Der udnyttes eksponentiel regression. Dette udføres i Maple. Bemærk, at $1990$ svarer til $x = 0$.:

```
> with(Gym):
> L1:=[0,5,10,15,16,17,18,19,20,21]:
> L2:=[3.1,4.5,6.5,10.4,11.8,14.5,15.2,16.6,18.1,20]:
> P(x):=ExpReg(L1,L2,x):
> P(x)
```

$$2.88330565068719\ 1.09521699048200^x$$

Hermed blev konstanterne $a$ og $b$ fundet.

b) Tallet $a = 1.09521$ betyder, at for hvert år der går (fra år $1990$), stiger antallet af Tysklands elektricitetsproduktivitet med $9.521\%$. Fordoblingstiden bestemmes.:
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.09521)} = 7.621$$
Dvs. hver gang der går ca. $7 - 8$ år, fordobles Tysklands elektricitetsproduktivitet.

c) Tallet $2020$ svarer til $x = 30$. Dette indsættes i forskriften.:
$$P(30) = 2.88330 \cdot 1.09521^{30} = 44.137$$
Eftersom Tyskland ønsker, at i år $2020$ skal $35\%$ af landets elektricitetsproduktivitet være vedvarende energi, så viser ovenstående beregning, at det snildt kan lade sig gøre, for ifølge modellen ville det være $44.137\%$.

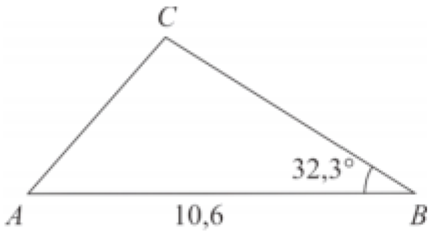
**Opgave 8** En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x) + x^2,\ x > 0.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f$ i punktet $P(5, f(5))$.

a) Ligningen for tangenten bestemmes. Først differentieres funktionen.:
$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$$
Heri indsættes punktet i $f$ og $f'$, dvs.:
$$f(5) = \ln(5) + 5^2 = 26.609$$
$$f'(5) = \frac{1}{5} + 2 \cdot 5 = 10.2$$
Dermed er den rette linje:
$$y = 10.2 \cdot (x - 5) + 26.609 = 10.2x - 24.391$$
Hvilket er det ønskede.

**Opgave 9**

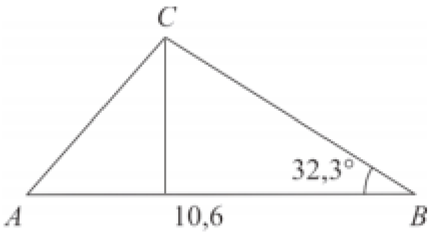



Om trekant $ABC$ oplyses, at arealet er 22,9 samt at $\angle B = 32,3°$ og $|AB| = 10,6$.

a) Bestem højden fra $C$.

b) Bestem omkredsen af trekant $ABC$.

a) Højden fra $C$ indtegnes.:




Dernæst bestemmes den vha. arealformlen.:

$$22.9 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 10.6 \Leftrightarrow 22.9 = 5.3 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{22.9}{5.3} = 4.320$$

Hvilket er højden.

b) Omkredsen ønskes. Længden $|BC|$ bestemmes.:

$$h = |BC| \cdot \sin(B) \Leftrightarrow |BC| = \frac{h}{\sin(B)}$$

Indsættes tallene fås:

$$|BC| = \frac{4.320}{\sin(32.3)} = 8.0845$$

Endelig findes $|AC|$ ved cosinusrelationerne.:

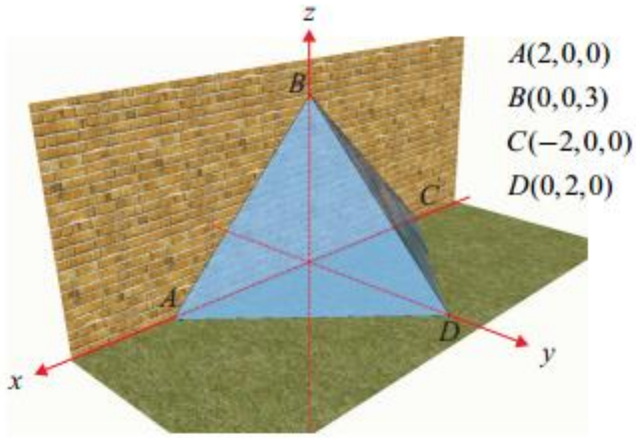
$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(B)}$$
$$= \sqrt{10.6^2 + 8.0845^2 - 2 \cdot 10.6 \cdot 8.0845 \cdot \cos(32.3)} = 5.731$$

Omkredsen er dermed:

$$O = 10.6 + 8.0845 + 5.731 = 24.4155$$

Hvilket var det.

**Opgave 10**




Figuren viser en model af et pyramideformet drivhus bygget op ad en mur. Koordinatsættene for drivhusets hjørner er angivet på figuren. Alle mål er i meter.

a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder glasfladen $ABD$.

Det oplyses, at den plan, der indeholder glasfladen $BCD$, har ligningen

$$-3x+3y+2z=6.$$

b) Bestem vinklen mellem de to glasflader.

a) Ligningen for planen $\alpha$ som indeholder glasfladen $ABD$ bestemmes. Der bestemmes to vektorer for efter at man kan lave et krydsprodukt.:

$$\boldsymbol{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AD} = D - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hermed blev der bestemt to vektorer[1] således man kan tage krydsproduktet af dem.:

$$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

I Maple kan det skrives sådan, alt efter om man bruger worksheet eller document:

```
> with(Gym):;with
  (LinearAlgebra):
> AB:=<-2,0,3>:
> AD:=<-2,2,0>:
> CrossProduct(AB,AD);
```

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

```
with(Gym) :
AB := ⟨−2, 0, 3⟩ :
AD := ⟨−2, 2, 0⟩ :
AB × AD
```

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

[1] Bemærk, at notationen i dette dokument for vektorer er $\boldsymbol{AB}$ og ikke $\overrightarrow{AB}$

Planen har ligningen $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ og indsættes resultaterne fra krydsproduktet (dvs. normalvektoren) samt et vilkårligt punkt, er planen altså:

$$\alpha: \quad -6(x-2)-6(y-0)-4(z-0)=0$$

Kan også skrives som:

$$\alpha: \quad -6x-6y-4z+12=0$$

Dermed er denne plan en der ligger i glasfladen $ABD$.

b) Der er givet endnu en plan for glasfladen $BCD$.:

$$\beta: \quad -3x+3y+2z-6=0$$

Vinklerne mellem planerne bestemmes udelukkende ved deres normalvektorer.:

$$\boldsymbol{n_\alpha} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n_\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

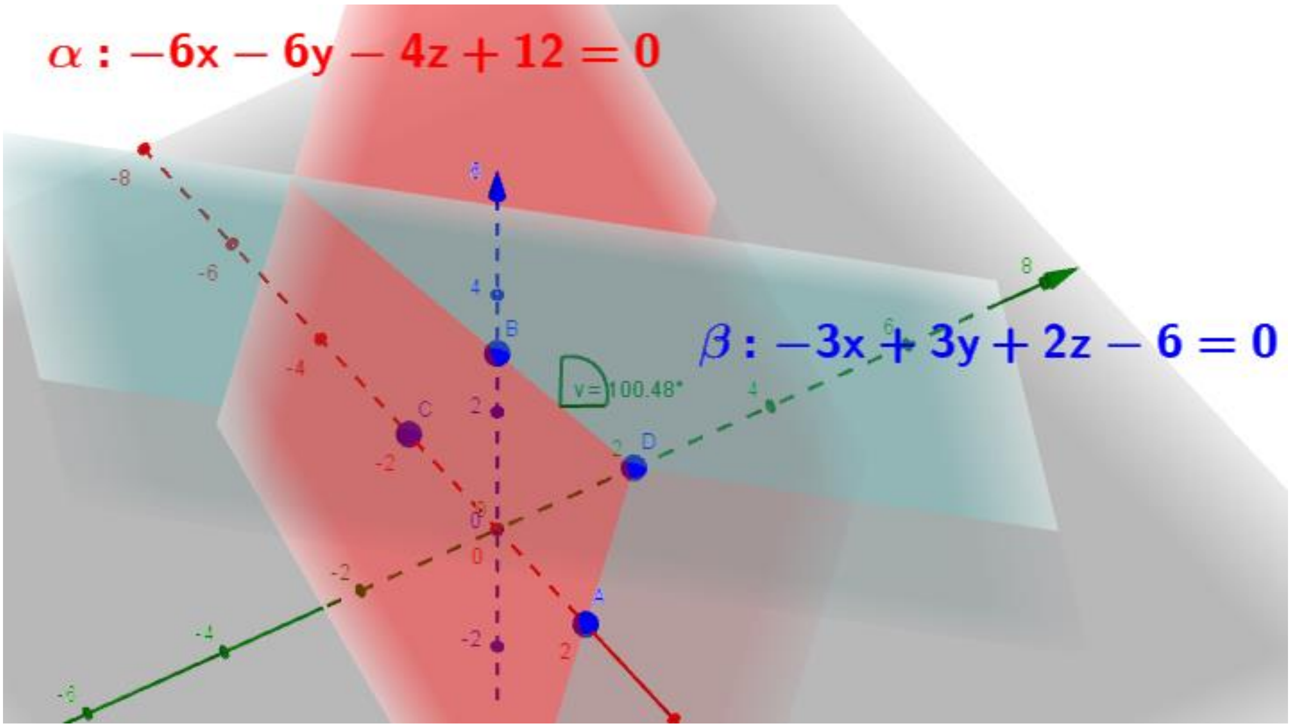
Vinklen bestemmes.:

$$v = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n_\alpha} \cdot \boldsymbol{n_\beta}}{|\boldsymbol{n_\alpha}| \cdot |\boldsymbol{n_\beta}|}\right)$$

Indsættes tallene fås:

$$v = \arccos\left(\frac{-6\cdot(-3)+(-6)\cdot 3+(-4)\cdot 2}{\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+2^2}}\right) \approx 100.475^o$$

Hermed er den ønskede vinkel mellem glasfladen $ABD$ og $BCD$ fundet. I GeoGebra vises hele pivtøjet.



**Opgave 11** Et firma producerer en bestemt type slik, der har forskellige farver. Slikket kan have farverne rød, grøn, gul, orange og blå. Firmaet oplyser, at poserne indeholder lige mange af hver farve.
Hans og Grethe har købt en slikpose af den omtalte type, og de fandt følgende farvefordeling:

| Rød | Grøn | Gul | Orange | Blå |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 19 | 15 | 10 | 7 |

a) Opstil en nulhypotese, som Hans og Grethe kan anvende til at teste, om firmaets oplysninger om farvefordelingen i deres slikpose holder stik, og undersøg på et 5% signifikansniveau, om Hans og Grethe må forkaste nulhypotesen.

a) Først opstilles nulhypotesen.

$$H_0 = Alle\ slikposer\ har\ lige\ mange\ antal\ farver\ slik\ i\ sig$$

Dernæst beregnes de forventede værdier. Eftersom firmaet praler med, at der er lige mange af hver farve, så gøres antallet af observationerne op med det, som Hans og Grethe fandt.:

$$9 + 19 + 15 + 10 + 7 = 60$$

Der er 5 kategorier og dermed er de forventede værdier:

| *Rød* | *Grøn* | *Gul* | *Orange* | *Blå* |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |

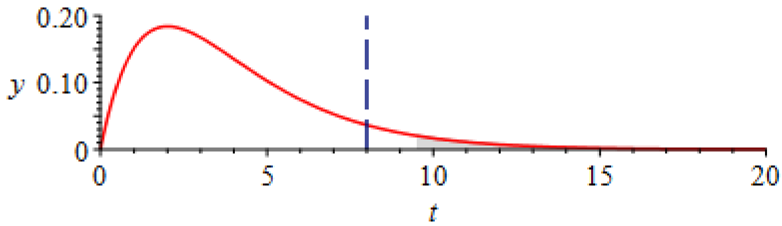
Dermed kan man nu fortsætte og lave en statistisk test. En GOF-test. Signifikansniveauet er valgt til at være 5%. Der er 4 frihedsgrader.:

$$\chi^2 = \frac{(9-12)^2}{12} + \frac{(19-12)^2}{12} + \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(7-12)^2}{12} = 8$$

Dvs. teststørrelsen er 8 og frihedsgraderne er 4. Konklusionen fortsættes efter Maples metode. I Maple kan en sådan test løses sådan:

```
> with(Gym):
> Obs:=[9,19,15,10,7]:
> Forv:=[12,12,12,12,12]:
> ChiKvadratGOFtest(Obs,Forv,level=0.05)
```

$\chi^2$-teststørrelse = 8.0000
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.091578




Dvs. nulhypotesen accepteres, da test størrelsen er mindre end den kritiske værdi. Der er ingen slikposer med lige antal farver.

**Opgave 12** Det store pariserhjul "London Eye" har en diameter på 135 m og en tur rundt i en af gondolerne tager en halv time. I en model for bevægelsen af en af gondolerne kan gondolens højde over jordoverfalden som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 67{,}5 \cdot \sin(0{,}209 \cdot t - 1{,}57) + 70, \quad 0 \leq t \leq 30,$$

hvor $f(t)$ er gondolens højde over jordoverfladen (målt i meter) til tiden $t$ (målt i minutter efter start).

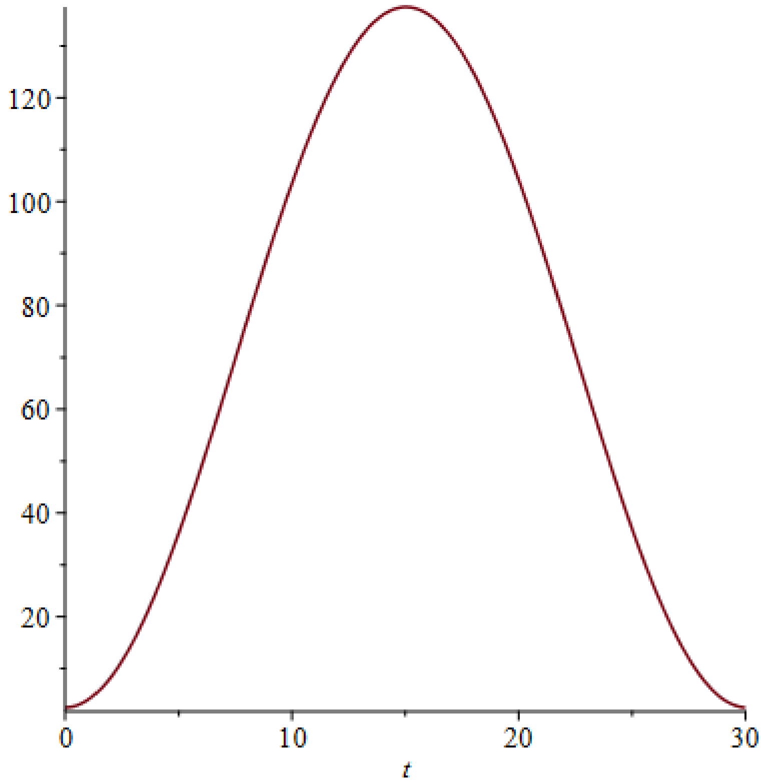
a) Tegn grafen for $f$, og bestem gondolens højde over jordoverfladen efter 7 minutter.

b) Bestem den tid, der går før gondolen første gang befinder sig 40 meter over jordoverfladen.

Foto: commons.wikimedia.org

a) Grafen for $f(t)$ tegnes i Maple.:

```
> with(Gym):
> f(t):=67.5*sin(0.209*t-1.57)+70:
> plot(f(t),t=0..30)
```




Dernæst indsættes 7 i $f(t)$ (husk radianer).:

$$f(7) = 67.5 \cdot \sin(0.209 \cdot 7 - 1.57) + 70 = 62.791$$

Dvs. efter 7 minutter er gondolen i 62.791 meters højde.

b) Ligningen løses.

$$f(t) = 40$$

Dvs.:

$$67.5 \cdot \sin(0.209 \cdot t - 1.57) + 70 = 40 \Leftrightarrow$$
$$67.5 \cdot \sin(0.209 \cdot t - 1.57) = -30$$
$$\sin(0.209 \cdot t - 1.57) = -\frac{30}{67.5} \Leftrightarrow$$
$$\arcsin(\sin(0.209 \cdot t - 1.57)) = \arcsin\left(-\frac{30}{67.5}\right) \Leftrightarrow$$
$$0.209 \cdot t - 1.57 = \arcsin\left(-\frac{30}{67.5}\right) \Leftrightarrow$$
$$0.209 \cdot t = \arcsin\left(-\frac{30}{67.5}\right) + 1.57 \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{\arcsin\left(-\frac{30}{67.5}\right) + 1.57}{0.209} \approx 5.308$$

Altså ca. 5 minutter og 30 sekunder efter start er gondolen ca. 40 meter over jorden.

**Opgave 13** I en model betegner $N$ antal traner i en tranebestand i Hokkaido-området i Japan. I modellen antages det, at $N$ som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt}=0{,}00029N\cdot(1500-N),$$

hvor $t$ er antal år efter 1975.

*Foto: commons.wikimedia.org*

a) Bestem tranebestandens væksthastighed, da der var 500 traner i bestanden.

Det oplyses, at tranebestanden i 1975 var 194 traner.

b) Bestem en forskrift for $N$.

c) Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for tranebestanden var størst.

*Kilde: A simple population viability analysis of Tancho (Grus japonensis) in southeastern Hokkaido, Japan, Yoshiyuki Masatomi, Seigo Higashi and Hiroyuki Masatomi, 2007.*

a) Denne type differentialligning er en logistisk vækst.:

$$N'(t)=0.00029\cdot N(t)\cdot\big(1500-N(t)\big)$$

Her indsættes $N(t)=500$, så:

$$N'(t)=0.00029\cdot 500\cdot(1500-500)=145$$

Dvs. da der var $500$ traner er væksthastigheden $145$ traner pr. år.

b) Forskriften bestemmes. Den fuldstændige løsning er:

$$N(t)=\frac{1500}{1+c\cdot \mathrm{e}^{-0.00029\cdot 1500\cdot t}}$$

Der kan findes en partikulær løsning ved at benytte punktet $N(0)=194$:

$$194=\frac{1500}{1+c\cdot \mathrm{e}^{-0.00029\cdot 1500\cdot 0}}\Leftrightarrow 194=\frac{1500}{1+c}\Leftrightarrow c=6.731$$

Dermed er forskriften:

$$N(t)=\frac{1500}{1+6.731\cdot \mathrm{e}^{-0.00029\cdot 1500\cdot t}}$$

c) Denne opgave kan besvares på to måder. Ligningen:

$$N(t)=\frac{1500}{2}$$

Kan løses eller man bestemmer den dobbelte afledede og løser $N''(t)=0$. Begge metoder vises.:

$$N(t)=\frac{1500}{2}$$

Svarer til at løse:

$$\frac{1500}{1+6.731\cdot \mathrm{e}^{-0.00029\cdot 1500\cdot t}}=\frac{1500}{2}$$

Og i Maple er udregningen af ligningen:

```
> with(Gym):
> N(t):=1500/(1+6.731*exp(-0.00029*1500*t)):
> N(t)=1500/2
```

$$\frac{1500}{1+6.731\,\mathrm{e}^{-0.43500\,t}}=750$$

```
> solve(%)
```

$$4.383272922$$

Inden konklusionen, så vises den dobbelte afledede også:

$$N(t) := \frac{1500}{1+6.731\,\mathrm{e}^{-0.43500\,t}}$$

$$t \to \frac{1500}{1+6.731\,\mathrm{e}^{(-1)\cdot 0.43500\,t}}$$

$$N''(t)=0$$

$$\frac{25719.28848\left(\mathrm{e}^{-0.43500\,t}\right)^2}{\left(1+6.731\,\mathrm{e}^{-0.43500\,t}\right)^3}-\frac{1910.510212\,\mathrm{e}^{-0.43500\,t}}{\left(1+6.731\,\mathrm{e}^{-0.43500\,t}\right)^2}=0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

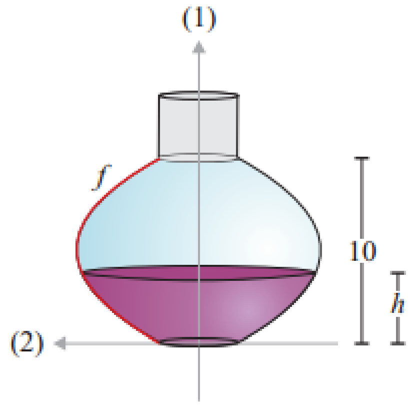
$$[[t=4.383272923]]$$

Dvs. da år 1975 er begyndelsesåret, så må væksthastigheden være størst i løbet af år 1979.

**Opgave 14** En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = -0{,}2x^2 + 2x + 2{,}5.$$

I en model af en karaffel har karaflens nedre del form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f$ roteres 360° omkring førsteaksen i intervallet [0; 10] (se figur). Enheden på akserne er cm. Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren.




a) Bestem maksimum for $f$, og benyt dette til at bestemme bredden af karaflen, der hvor den er bredest.

Der fyldes væske i karaflen, så højden af væsken er $h$ cm fra karaflens bund.

b) Bestem volumen af væsken udtrykt ved $h$, og bestem væskehøjden, når der fyldes 500 cm³ væske i karaflen.

a) Maksimum for $f(x)$ bestemmes. Bemærk hvordan koordinatsystemet er på tegningen. Bredden ved karaflen er faktisk der hvor toppunktet er for $f(x)$.:

$$f'(x) = -0.4x + 2$$

Løses ligningen $f'(x) = 0$ fås:

$$-0.4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-0.4} = 5$$

Dernæst bestemmes bredden af karaflen.:

$$2 \cdot f(5) = 2 \cdot (-0.2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2.5) = 15cm$$

b) Man anvender volumeformlen. Volumen bestemmes således:

$$V = \pi \cdot \int_0^h (-0.2x^2 + 2x + 2.5)^2 \, dx$$

Indsættes ovenstående i Maple kan man udtrykke en formel for $h$.:

$$evalf[4]\left( V(h) = \pi \cdot \int_0^h \left(-0.2x^2 + 2x + 2.5\right)^2 \mathrm{d}x \right)$$

$$V(h) = 19.64\,h + 0.02514\,h^5 - 0.6284\,h^4 + 3.142\,h^3 + 15.71\,h^2$$

Endelig oplyses det, at $V = 500cm^3$. Her er $h$ ubekendt, da er ligningen:

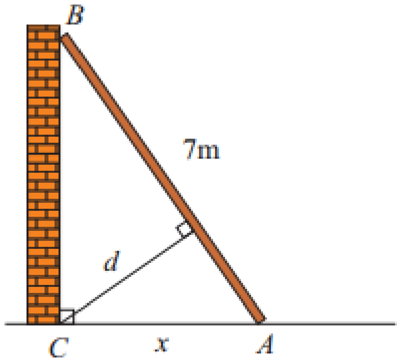
$$500 = \pi \cdot \int_0^h (-0.2x^2 + 2x + 2.5)^2 \, dx$$

Og i Maple 2016 løses ligningen for $h$.:

$$500 = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^h \left(-0.2x^2 + 2x + 2.5\right)^2 \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{solve}} 4.606113937$$

Dermed fandt man det ønskede.

**Opgave 15** En 7 m lang stige er placeret op ad en lodret mur. Stigens røringspunkt med jorden benævnes $A$, og stigens røringspunkt med muren benævnes $B$. Afstanden mellem stigen og murens fod benævnes $d$. Afstanden mellem murens fod og stigens fod benævnes med $x$, og det oplyses, at $0<x<7$.




a) Gør rede for, at $|BC|=\sqrt{49-x^2}$, og benyt dette til at vise, at $d=\dfrac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}$.

b) Bestem $x$, så $d$ bliver størst mulig.

a) Ved at se på tegningen er konklusionen at trekanten er retvinklet. Endelig er $|AC|=x$, $|AB|=7$ og $|BC|$ har ikke fået nogen oplysninger. Man kan give $|BC|$ nogle oplysninger ved udnyttelse af Pythagoras.:

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

Indsættes oplysningerne fås:

$$x^2+|BC|^2=7^2 \Leftrightarrow |BC|=\sqrt{49-x^2}$$

Dernæst bruges resultatet til at vise det næste i opgaveformuleringen.
Man har to retvinklede trekanter, en stor og en lille. Derfor må dette kunne skrives som:

$$\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{d}{x}$$

Indsættes oplysningerne er:

$$\frac{\sqrt{49-x^2}}{7}=\frac{d}{x}\Leftrightarrow x\cdot\sqrt{49-x^2}=7\cdot d\Leftrightarrow d=\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}$$

Og dermed er det ønskede vist.

b) Opskrives $d$ som en funktion mht. $x$, er den givet som følger:

$$d(x) = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$$

Da er den afledede givet ved:

$$d'(x) = \frac{1}{7} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{49 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{49 - x^2}}\right) = \frac{\sqrt{49 - x^2}}{7} - \frac{x^2}{7 \cdot \sqrt{49 - x^2}}$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$, dvs.:

$$\frac{\sqrt{49 - x^2}}{7} - \frac{x^2}{7 \cdot \sqrt{49 - x^2}} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -4.949747 \quad \vee \quad x = 4.949747$$

Da $x$ ikke kan være negativ forkastes den negative værdi. Dvs. vi bestemmer monotoniforhold for at bekræfte at $x = 4.949747$ er den værdi, der er størst. Den dobbelte afledede bestemmes og deri indsættes løsningen fra $d'(x) = 0$.:

$$d(x) := \frac{1}{7} x \sqrt{-x^2 + 49}$$

$$x \to \frac{1}{7} x \sqrt{49 - x^2}$$

$$d''(4.949747)$$

$$-0.5714284093$$

Da outputtet er mindre end 0, er konklusionen, at $x = 4.949747$ må være størst.

**Opgave 16** En steg sættes til langtidsstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur $T$ (målt i °C) en funktion af tiden $x$ (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet $x$, er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur. Det oplyses, at ovnens temperatur er 150°C, og at proportionalitetskonstanten er 0,011.

a) Opstil en differentialligning, som $T$ må opfylde.

*Foto: commons.wikimedia.org*

a) Alle ingredienserne opskrives. Man har at $x$ er tid, og $T$ er stegens indre temperatur. Temperaturen er $150^o C$ og proportionalitetskonstanten er $0.011$. Ovnens temperatur og stegens temperatur er $(150 - T)$Derved er differentialligningen givet ved:

$$\frac{dT}{dx} = 0.011 \cdot (150 - T)$$

Som er det ønskede.

NB: Flere af ovenstående opgaver har jeg vist pr. håndkraft. Mest af alt fordi folk har efterspurgt hvordan diverse ligninger mv. kunne løses uden brug af CAS.