Opgave 1 En person indsætter 30 000 kr. på en konto i en bank til en årlig rente på 2 %.

a) Hvor meget står der på kontoen efter 5 år?

På et tidspunkt hæves en del af pengene, så der er 25 000 kr. tilbage på kontoen.

b) Hvor lang tid går der derefter, før der igen står 30 000 kr. på kontoen?

a) Vi aflæser opgavebeskrivelsen og ser, at vi kender $r = 2\%$, $K_0 = 30000$ samt $n = 5$, så vi anvender renteformlen. Vi skal finde ud af, hvad der står efter 5 år på kontoen.:

$$K_5 = 30000 \cdot (1 + 0.02)^5 = 33122.4241$$

Dvs. efter 5 år står der $33122.4241kr$ på kontoen.

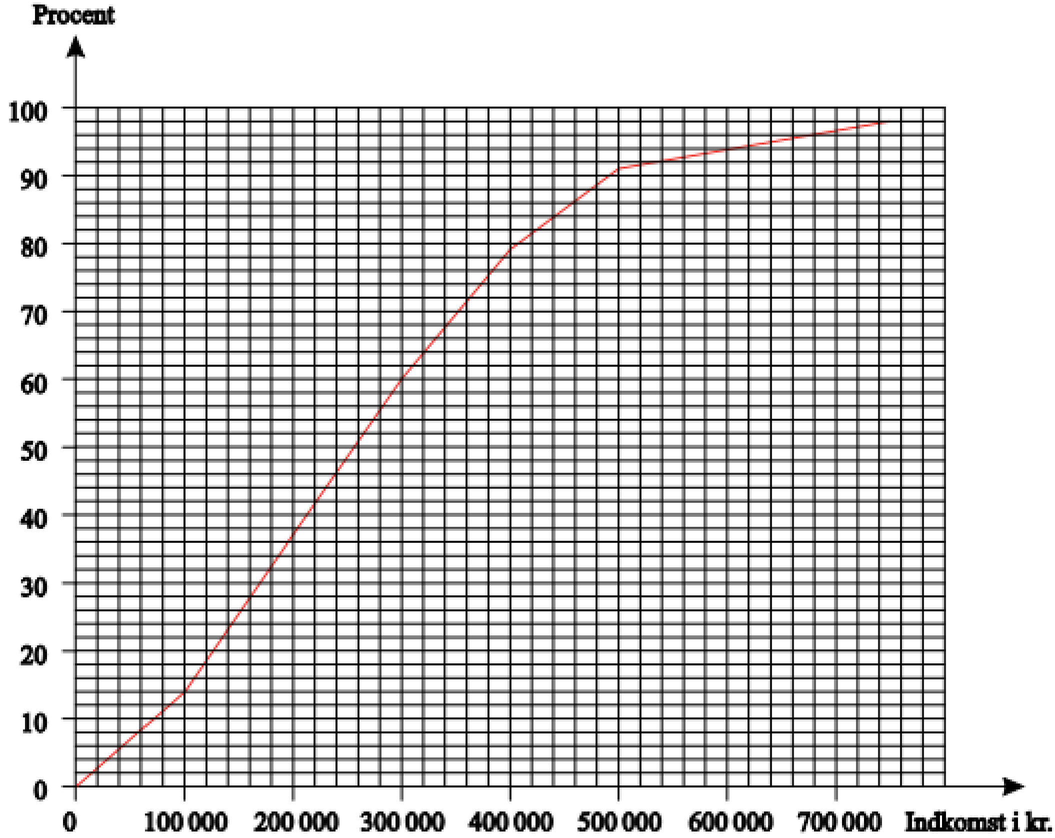
b) Her er $K_n = 30000$, $K_0 = 25000$ og renten er stadig den samme. Vi anvender renteformen og løser ligningen for n.:

$$30000 = 25000 \cdot (1 + 0.02)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{2.5} = 1.02^n \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{3}{2.5}\right) = n \cdot \log(1.02) \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{\log\left(\frac{3}{2.5}\right)}{\log(1.02)} = 9.206$$

Dvs. efter 9 år er beløbet fra $25000kr$ oppe på ca. $30000kr$ igen.

Opgave 2

Bilag vedlagt



Sumkurven på figuren viser fordelingen af indkomsten for kvinder i Region Hovedstaden i 2013.

a) Bestem kvartilsættet.

b) Hvor mange procent af kvinderne havde en indkomst på mere end 400 000 kr.?

Kilde: Statistikbanken.

a) Kvartilsættet aflæses på grafen som er angivet. Kvartilsættet er som følger:

$$25\% = Nedre = 150000$$
$$50\% = Median = 258000$$
$$75\% = Øvre = 380000$$

b) Hvis kvinderne skal tjene mere end $400000kr$ svarende til 79% på grafen, så skal man antage, at:

$$100\% - 79\% = 21\%$$

Dvs. 21% af kvinderne tjener altså mere end $400000kr$ i Region Hovedstaden i år 2013.

Opgave 3

De danske folkebibliotekers udlån af bøger kan beskrives ved modellen

$$y = -0{,}90 \cdot x + 32{,}12 \quad ,$$

hvor y er det årlige udlån af bøger (målt i mio.), og x er antal år efter 2009.

a) Hvor stort vil det årlige udlån af bøger være i 2015 ifølge modellen?

b) Hvad fortæller tallene $-0{,}90$ og $32{,}12$ om de danske folkebibliotekers udlån af bøger?

Kilde: Danmarks Statistik.

a) Der er givet en model over udlån af bøger.:

$$y = -0.90x + 32.12$$

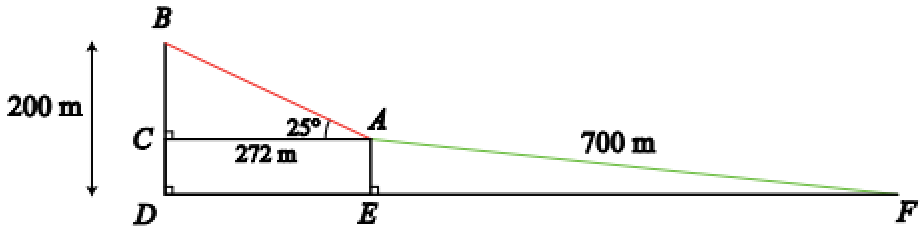
Her oplyses det, at $x = 0$ fordi 2009 er begyndelsesåret. Så svarer 2015 til $x = 6$ så denne værdi indsættes i modellen.:

$$y = -0.90 \cdot 6 + 32.12 = 26.72$$

Dvs. i år 2015 er antallet af udlånte bøger faldet ned til 26.72 mio. bøger.

b) Tallene -0.90 og 32.12 er hhv. a og b, og tallet $a = -0.90$ fortæller, at for hvert år der går fra år 2009, falder antallet af udlånte bøger med 0.90 mio. bøger om året. Tallet $b = 32.12$ fortæller, at i år 2009 var antallet af udlånte bøger ca. 32.12mio. og dette forventes at falde.

Opgave 4



Figuren viser en modeltegning af en 200 m høj skibakke.
Den øverste del af nedfarten er en rød piste BA, der danner en vinkel på 25° med vandret.
Under denne del af nedfarten kommer man 272 m i vandret retning (se figur).
Den nederste del af nedfarten er en 700 m lang grøn piste AF.

a) Hvor lang er den røde piste?

b) Bestem den vinkel, som den grønne piste danner med vandret.

a) Her er det en god idé at fokusere på den lille trekant ABC først. Her er $\angle A = 25^o$, $\angle C = 90^o$ og $|AC| = 272m$, så her anvendes nedenstående formel for at finde ud af længden af den røde piste.:

$$|AB| = \frac{|AC|}{\cos(A)}$$

Heri indsættes de kendte værdier og længden af $|AB|$ er:

$$|AB| = \frac{272}{\cos(25)} = 300.118$$

Dvs. længden af pisten er $300.118m$ lang.

b) Her skal der kigges på trekanten AEF og her kendes $\angle E = 90^o$ og $|AF| = 700m$ her mangler man oplysningen $|AE|$ for at beregne vinkel $A_{grøn}$. Her skal man udnytte den lille trekant, der kan man anvende Pythagoras for at bestemme $|BC|$, således man kan fratrække $|BC|$ fra $|BD|$ og derved få længden $|AE|$. Dette gøres nedenfor:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \Leftrightarrow |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

Oplysningerne indsættes.:

$$|BC| = \sqrt{300.118^2 - 272^2} = 126.833m$$

Så regnes $|AE|$.:

$$|AE| = |BD| - |BC| = 200 - 126.833 = 73.167m$$

Dermed kan man finde vinkel $A_{grøn}$.:

$$\angle A_{grøn} = \arccos\left(\frac{|AE|}{|AF|}\right) = \arccos\left(\frac{73.167}{700}\right) = 84^o$$

Dvs. vinkel $A_{grøn}$ som pisten og vandret danner, er 84^o. Hvis opgaveformuleringen vil have den nederste vandret, dvs. vinkel F, så er den udregnet ved:

$$\angle F = 180^o - 90^o - 84^o = 6^o$$

Men så burde opgavekommissionen formulere spørgsmålet lidt bedre, da det kan skabe forvirring.

Opgave 5 Befolkningstallet i Tanzania var 34,02 millioner i år 2000. Siden da er befolkningstallet med god tilnærmelse vokset med 2,9 % om året.

a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver sammenhængen mellem befolkningstallet i Tanzania og antallet af år efter år 2000.

b) Hvor mange procent vokser Tanzanias befolkning på 10 år ifølge modellen?

Kilde: Worldbank.

a) Vi aflæser opgaveteksten og opstiller en eksponentiel model idet vi har begyndelsesværdien $b = 34.02$, vi har endvidere den årlige rente $r = 2.9\%$. Men vi skal først have fremskrivningsfaktoren a, så denne regnes.:

$$a = 1 + \left(\frac{2.9}{100}\right) = 1.029$$

Så modellen er:

$$y = 34.02 \cdot 1.029^x$$

Som beskriver befolkningsudviklingen i Tanzania fra år 2000.

b) Vi anvender den eksponentielle vækstrate.:

$$r_y = (a^{\Delta x} - 1) \cdot 100\%$$

Heri indsætter vi vores oplysninger og da er:

$$r_y = (1.029^{10} - 1) \cdot 100\% = 33.092\%$$

Dvs. på 10 år er befolkningen i Tanzania steget med 33.092%

Opgave 6 Nedenstående tabel viser oplysninger om udviklingen i kiloprisen på lammekød.

År	2007	2010	2013
kilopris	109 kr.	120 kr.	
Indekstal		122,3	138,1

a) Bestem kiloprisen på lammekød i 2013.
Bestem indekstallet for kiloprisen på lammekød i 2007.

Kilde: Statistikbanken.

a) Denne opgave giver to ligninger. Skemaet nedenfor giver en entydig forståelse:

$År$	2007	2010	2013
$Kilopris$	109	120	x
$Indekstal$	y	122.3	138.1

Opgaven er så at løse følgende ligninger:

$$\frac{109}{y} = \frac{120}{122.3}$$

Og:

$$\frac{120}{122.3} = \frac{x}{138.1}$$

Ligningerne løses.:

$$\frac{109}{y} = \frac{120}{122.3} \Leftrightarrow 109 \cdot 122.3 = y \cdot 120 \Leftrightarrow y = \frac{13330.7}{120} = 111.089$$

$$\frac{120}{122.3} = \frac{x}{138.1} \Leftrightarrow 120 \cdot 138.1 = 122.3 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{16572}{122.3} = 135.502$$

Endelig kan skemaet laves færdigt.:

$År$	2007	2010	2013
$Kilopris$	109	120	135.502
$Indekstal$	111.089	122.3	138.1

Dvs. konklusionen er, at i år 2007 er indekstallet 111.089 og i år 2013 er kiloprisen $135.502kr$ for lammekød.

Opgave 7 Grafen for potensfunktionen $y = b \cdot x^a$ går gennem punkterne $(1, 9)$ og $(16, 18)$.

a) Bestem tallene a og b.

b) Bestem y, når $x = 81$.
Bestem x, når $y = 45$.

a) Opgaven kan løses på to måder. Formlerne for a og b, men også to ligninger med to ubekendte.:

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\log\left(\frac{18}{9}\right)}{\log\left(\frac{16}{1}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{9}{1^{\frac{1}{4}}} = 9$$

Dvs. modellen er:

$$y = 9 \cdot x^{\frac{1}{4}}$$

Vi kunne også løse to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{matrix} 18 = b \cdot 16^a \\ 9 = b \cdot 1^a \end{matrix} \Leftrightarrow 2 = 16^a \Leftrightarrow \log(2) = a \cdot \log(16) \Leftrightarrow a = \frac{\log(2)}{\log(16)} = \frac{1}{4}$$

Vi indsætter a i en af ligningerne. Vi tager $9 = b \cdot 1^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow b = 9$. Så modellen er:

$$y = 9 \cdot x^{\frac{1}{4}}$$

Bemærk, at $x^{\frac{1}{4}}$ faktisk svarer til den fjerde rod af x, dvs. $\sqrt[4]{x}$

b) Her indsættes $x = 81$ i modellen.:

$$y = 9 \cdot \sqrt[4]{81} = 9 \cdot 3 = 27$$

Her indsættes $y = 45$ i modellen.:

$$45 = 9 \cdot \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{45}{9} = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow$$

$$x = \left(\frac{45}{9}\right)^4 = 625$$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 8 Hvilestofskiftet angiver, hvor mange kcal kroppen forbrænder i løbet af et døgn. For en bestemt kvinde kan hvilestofskiftet H (kcal) beregnes ved formlen

$$H = 968 + 9,25 \cdot m - 4,33 \cdot a \,,$$

hvor m er kvindens vægt i kg, og a er kvindens alder i år.

Da kvinden var 20 år, vejede hun 60 kg.

a) Bestem hvilestofskiftet, da kvinden var 20 år.

Det oplyses, at kvindens hvilestofskifte var uændret, da hun blev 30 år.

b) Bestem kvindens vægt som 30-årig.

a) Der er givet en model over hvilestofskiftet for en kvinde. Det oplyses, at når kvinden var 20 år, så var vægten 60kg. Hvilestofskiftet bestemmes vha. modellen for da hun var 20år.:

$$H = 968 + 9.25 \cdot 60 - 4.33 \cdot 20 = 1436.4$$

b) Her løses en ligning. Man kender $H = 1436.4$ og man kender $a = 30$, så man skal bestemme kvindens vægt.:

$$1436.4 = 968 + 9.25 \cdot m - 4.33 \cdot 30 \Leftrightarrow$$
$$1436.4 = 838.1 + 9.25 \cdot m \Leftrightarrow$$
$$598.3 = 9.25 \cdot m \Leftrightarrow$$
$$m = \frac{598.3}{9.25} = 64.681$$

Dvs. kvinden vejer altså 64.681kg når hun er 30år gammel.