الوحـــدة الثانيـــة

الــدوال الحقيقيـة

تعريف: الدالة الحقيقية هي دالة مجالها ومجالها المقابل(ح أو جزءاً منها)

أنواع الدوال الحقيقية ومجموعة تعريفها .

1- الدالة الصحيحة : م ت = ح .

مثال : $د(س) = س + 3|س| + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ دالة صحيحة ∴ م ت = ح

2- الدالة الكسريه : م ت = ح / { أصغار المقام }

مثال1 : $د(س) = \frac{1}{س-1}$ دالة كسرية لظهور متغير (س) في المقام

∴ م ت = ح / {أصفار المقام } = ح / { 1 }

مثال2 : $ص = \frac{1}{س^2+1}$ دالة كسرية ∴ م ت = ح / { أصفار المقام }

الحل : أصفار المقام $س^2 + 1 = 0 \Leftarrow س^2 = -1$ مستحيل

∴ لا توجد أصفار ∴ م ت = ح

3- الدالة الجذرية التربيعية معرفة لما ما تحت الجذر ≥ 0

أما إذا وقع الجذر في المقام وغطاه ضع ما تحت الجذر > 0

مثال : $ص = \frac{1}{\sqrt{1 - س^2}}$ معرفة لما $1 - س^2 > 0 \Leftarrow 1 > س^2$ أجذر

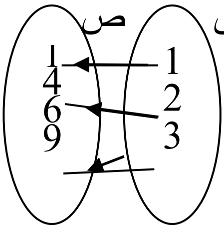
$1 \geq |س| \Leftarrow 1 > س > -1 \Leftarrow س \in]-1 ، 1[$

أنتبه : الجذر التكعيبي لا يؤثر على م ت

لاحظ الدالتين $\frac{1}{\sqrt[3]{س^2}}$ ، $\frac{1}{س^2}$ لهما نفس م ت = ح / { ٠ }

تعريف : مدى الدالة هو مجموعة صور مجال الدالة والتي تنتمي إلـى المجال

المقابل .   مثال: ليكن التطبيق المبين بالشكل :



القاعدة د(س) = س^2 د (1) = 1 ∋ المدى

د (2)= 4 ∋ المدى ، د(3) = 9 ∋ المدى ∴ المدى ={ 4، 1، 9 }

أي عناصر المجال المقابل التي لها مقابلات في المجال.

تمارين ومسائل (2 ، 1)

أولاً : أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

1] د (س) = 2س^3+ 5س^2− س   الحل : دالة صحيحة ⇐ م ت = ح

2] د (س) = $\frac{1}{3\text{س}-2}$ الحل : م ت = ح / { أصفار المقام }

أصفار المقام : 3س−2 = 0 ⇐ 3س = 2 ⇐ س = $\frac{2}{3}$ ∴ م ت = ح / { $\frac{2}{3}$ }

3] د (س) = $\frac{\text{س}+2}{\text{س}^2-81}$ الحل : م ت = ح / { أصفار المقام } .

∴ أصفار المقام : س^2 − 81 = 0 ⇐ س^2 = 81 ⇐ س = ±9

∴ م ت = ح / {± 9} .

4] د (س) = س^2−49   الحل : دالة صحيحة   ∴ م ت = ح .

5] = د (س) = 2س− 1 الحل : دالة صحيحة   ⇐ م ت = ح .

6] د (س) = 4 − س^2 الحل : دالة صحيحة   ⇐ م ت = ح .

7] د (س) = $\frac{1}{\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+6}}$

الحل : معرفة لما س^2 − س + 6 > 0

الخطوات : أصفار − إشارة   اختيار البقة الموجبة .

التنفيذ: Δ = ب^2−4أ جـ = 1 −4×1×6 = 1−24 = −23 < 0

أ = 1 ، ب = −1 ، جـ = 6

∴ المقدار من إشارة واحدة ← +

عوض بأي قيمة للمتغير س

<u>مثلاً</u> : ضع س = 0 ⇐ 0 − 0 + 6 > 0 ∴المحور كله موجب

∴م ت = ح طريقة أخرى بما أن Δ > 0 ∴ الإشارة موافقة لإشارة

أ = 1>0 ∴ موجبة دوماً ∴ م ت = ح

8] د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س^2 - 1}}$ أوجد م ت

الحل : معرفة لما س^2 −1 > 0 ⇐ (س−1) (س+1) > 0

الأصفار : (س−1)(س+1) = 0

⇐ س −1 =0 ⇐ س= 1 أو س +1 = ⇐0 س = −1

\+ −1 − 1 +

نريد الموجب ∴ م ت =] 1 ، +∞[∪] −∞ −1 [.

9] د (س) = $\frac{س}{س^2 - س+6}$ أوجد : م ت

الحـل: دالة كسرية معرفة ∀س ∋ ح / { أصفار المقام }

∴ أصفار المقام : س2− س+6=0 ⇐ أ= 1 ، ب = −1 ، جـ =6

⇐ Δ = ب2−4أجـ = 1−4×1×6= 1−24= −23 > 0

مستحيلة الحل ∴ لا توجد أصفار ∴ م ت = ح

10] د (س) = $\sqrt{\frac{11}{س+2}}$ = $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{س+2}}$

الحل:معرفة لما س +2 > ⇐0 س> −2 ⇐ م ت =] −2+ ∞[

[11] د (س) = $\sqrt{س}$ + $\sqrt{س-1}$ أوجد : م ت

الحل : $\sqrt{س}$ معرفة لما س ≥ 0

$\sqrt{س-1}$ معرفة لما س $-1 \geq 0 \Leftarrow$ س ≥ 1

م ت = $[1 ، \infty[\cap [0 ، \infty[= [1 ، \infty[$

12] د (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ أوجد : م ت

الحل : د كسرية ∴ م ت = ح / { أصفار المقام }

أصفار المقام س$-1 = 0 \Leftarrow$ س$=1$

م ت = ح / { 1 }

13] د (س) = $\frac{5}{3 - \sqrt{س - 1}}$ أوجد: م ت .

الحل: كجذر معرفة لما س$-1 \geq 0 \Leftarrow$ س ≥ 1

ككسر المقام $\neq 0 \Leftarrow 3 - \sqrt{س - 1} \neq 0 \Leftarrow 3 \neq \sqrt{س - 1}$ ربع

$9 \neq$ س $- 1 \Leftarrow 10 \neq$ س ∴ م ت = $[1 + \infty[- \{10\}$

14] د (س) = $\frac{\sqrt{س + 2}}{س - 5}$ أوجد : م ت ؟

الحل : كجذر س + 2 $\geq 0 \Leftarrow$ س ≥ -2

ككسر : المقام $\neq 0 \Leftarrow$ س$- 5 \neq 0 \Leftarrow$ س $\neq 5 \Leftarrow$ م ت= $[-2، +\infty[/\{5\}$

15] د (س) = س × $\sqrt{س - 2}$ أوجد : م ت ؟

الحل : معرفة لما س $- 2 \geq 0 \Leftarrow$ س ≥ 2 ∴ م ت = $[2 ، +\infty[$

16] د (س) = $\sqrt{س - 3} - 1$ أوجد : م ت ؟

الحل : معرفة لما س $- 3 \geq 0 \Leftarrow$ س $\geq 3 \Leftarrow$ م ت = $[3 ، +\infty[$

17] د (س) = 3 الحل : دالة صحيحة (ثابتة) ∴ م ت = ح

18] د (س) = $\begin{cases} -1 ، & س \leq 0 \\ 2 ، & س > 0 \end{cases}$ أوجد : م ت ؟

الحل: م ت =]0 ، +∞[∪]−∞ ، 0] = ح

19] د (س) = $\begin{cases} س + 2 & س \geq 0 \\ -1 & س < 0 \end{cases}$ أوجد : م ت ؟

الحل : م ت =]0 ، +∞[∪]−∞ ، 0] = ح

20] ت (س) = 2س+1 ، هـ (س) = س2 − 16 عين مجموعة تعريف

كلاً من : أ) $\frac{هـ(س)}{ت\,(س)}$ ب) $\frac{\sqrt{هـ(س)}}{\sqrt{ت\,(س)}}$ جـ) $\sqrt{\frac{هـ(س)}{ت\,(س)}}$

الحل: أ) $\frac{هـ(س)}{ت\,(س)} = \frac{16 + س^2}{2\,س + 1}$

الحل : دالة كسرية معرفة لما 2س + 1 ≠ 0 ⇐ 2 س ≠ −1

∴ س ≠ $\frac{-1}{2}$ ⇐ م ت = ح / {$-\frac{1}{2}$} .

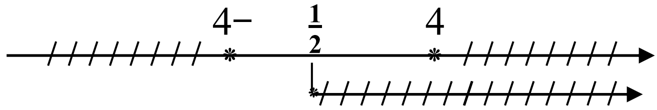
ب) $\frac{\sqrt{هـ(س)}}{\sqrt{ت\,(س)}} = \frac{\sqrt{س^2 - 16}}{\sqrt{2س+1}}$

الحل : البسط معرف لما س^2 − 16 ≥ 0 ⇐ س^2 ≥ 16 ⇐ |س| ≥ 4

قاعدة الأكبر س ≥ 4 أو س ≤ −4

∴ مجموعة تعريف البسط [4 ، +∞[∪]−∞ ، −4] .

* المقام معرف لما 2س +1 > 0 ⇐ 2س > −1 ⇐ س > $-\frac{1}{2}$

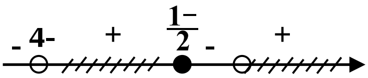


∴ مجموعة التعريف المشتركة = [4 ، +∞[

جـ) $\sqrt{\frac{2س + 1}{س^2 - 16}}$ معرفة لما $\frac{2س + 1}{س^2 - 16} \geq 0 \Leftarrow \frac{2س + 1}{(س - 4)(س + 4)} \geq 0$

الخطوات أصفار – إشارة – اختيار

* أصفار البسط 2س + 1 = 0 ⇐ س = $-\frac{1}{2}$



أصفار المقام
س− 4 =0 ⇐ س = 4
س+4 =0 ⇐ س = −4

لمعرفة الإشارة عوض
س= 0 ∋]− $\frac{1}{2}$ ، 4[⇐ $\frac{2\times0+1}{0-16}$ = $\frac{1}{-16}$ سالب أعكس إشارة الباقي

بما أنني: أريد البقع الموجبة: ∴ م ت =]− 4 ، $\frac{1-}{2}$ [∪] 4 ، ∞[

موجب موجب
* ***قاعدة:*** إذا كان 3 < ص < 5
عند التربيع حافظ على المتراجحة 9< ص2< 25

سالب سالب
* ***قاعدة:*** إذا كان − 5 < ص < −3 ربع وأعكس 25 > ص^2 > 9 .

سالب موجب
* ***قاعدة :*** −5 < ص < 3
ربع ≥0ص^2< أكبر المربعين ((−5)^2 ، (3)^2) ∴ 0≥ ص^2 < 25

مثال داعم : −1≥ ص < 3 ربع وانتبه معك موجب وسالب
∴ 0 ≥ ص^2 < 9

ثانياً : أوجد مجموعة تعريف ومدى الدوال التالية :

21] د (س) = $\frac{س}{س - 1}$ أوجـد : م ت والمدى

1) م ت = ح − { 1 } 2) لإيجاد مدى $\frac{ص}{1}$ = $\frac{س}{س-1}$

الخطوات: أحصل على س بدلالة ص ثم أوجد مجموعة تعريف العلاقة الجديدة فأحصل على المدى .

ص(س−1) = 1× س ⇐ ص س− ص= س ⇐ ص س − س =ص

س (ص− 1) = ص ⇐ س = $\frac{ص}{ص-1}$ ⇐ م ت = ح / { 1 }

∴ المدى = م ت = ح / { 1 }.

22] د (س) = $\frac{5}{س^2+1}$ أوجد : م ت والمدى ؟

1) م ت : أصفار المقام: $س^2+4=0$ ⇐ س2= −4 مستحيل ∴ م ت = ح

2) المدى بطريقة البناء م ت = ح =] −∞ ، +∞ [

−∞ < س < ∞ ربع وانتبه لوجود سالب وموجب

$0 \le س^2 < \infty$ أضف 4

أنتبه ∞ +4= ∞

$4 \le 4+س^2 < \frac{\infty}{1}$ أقلب تقلب

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\frac{1}{4} \ge \frac{1}{4+س^2} > 0$ أضرب بـ 5

$\frac{5}{4} \ge \frac{1}{4+س^2} > 0$ ⇐ $\frac{5}{4} \ge$ ص > 0 ⇐ المدى] 0 ، $\frac{5}{4}$[

23] د (س) = $\sqrt{64 - س^2}$ أوجد م ت والمدى ؟

1) م ت : معرفة لما 64− س$^2 \ge 0$ ⇐ $64 \ge س^2$ أجذر $8 \ge$ |س| قاعدة الأصغر

$-8 \le$ س ≤ 8 ⇐ م ت= [−8 ، 8]

2) المدى : $-8 \le س \le 8$ ربع واطوي . لوجود سالب وموجب

$0 \le س^2 < 64$ اضرب بـ (−) وأعكس المتراجحة .

$0 \ge -س^2 \ge -64$ أضف (64)

$64 \Leftarrow 64 \ge 64 - س^2 \ge 0$

$8 \ge \sqrt{64 - س^2} \ge 0$ ∴د(س)محدودة والمدى[0 ، 8] .

24] د (س) = |س+9| أوجد م ت والمدى ؟

1) م ت = ح دالة صحيحة 2) المدى −∞ < س< ∞ أضف 9

$-\infty <$ س$+9 < \infty$ $\quad 0 \leq |$س$+9| < \infty \Leftarrow$ المدى $[\,0\,،\,\infty\,[$

25] $2|$س$+1| - 5 = 0$

$2|$س$+1| = 5 \Leftarrow |$س$+1| = \frac{5}{2} \Leftarrow$ س$+1 = \pm\frac{5}{2}$

إما س$+1 = \frac{5}{2} \Leftarrow$ س$= \frac{5}{2} - 1 \Leftarrow$ س$= \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{3}{2}}$

أو س $+1 = -\frac{5}{2} \Leftarrow$ س$= -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2} \Leftarrow \boxed{\text{س} = -\frac{7}{2}}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{3}{2}\,،\,-\frac{7}{2}\}$

26] س$^2 - 5\,|$س$| + 6 = 0$ الحل : س$^2 + 6 = 5|$س$| \Leftarrow$

س$^2 + 6 = 5(\pm$ س$) \Leftarrow$ س$^2 + 6 = 5$س $\Leftarrow$ س$^2 - 5$ س$+6 = 0$

$($ س $- 2)$ $($س $- 3) = 0 \Leftarrow$

س $= 2$ $\qquad$ أو س $- 3 = 0 \Leftarrow$ س $= 3$

أو س$^2 + 6 = -5$س $\Leftarrow$ س$^2 + 5$ س $+ 6 = 0 \Leftarrow ($س$+3)($س$+2) = 0$

$\Leftarrow$ س $+ 3 = 0 \Leftarrow$ س $= -3$ $\qquad$ أو س $+ 2 = 0 \Leftarrow$ س $= -2$

$\therefore$ مج $= \{\,2\,،\,3\,،\,-2\,،\,-3\,\}$

27] $[\,1 - 3$س$] = -5$

الحل : $[\,1 - 3$س $] = -5 \Leftarrow 1 + [\,-3$س$] = -5$

$[\,-3$س $] = -6$ $\qquad \Leftarrow -6 \leq -3$س < -5 $\therefore$قسم علـى -3

$\Leftarrow 2 \geq$ س $> \frac{5}{3}$ $\qquad$ مجموعة الحل $]\,\frac{5}{3}\,،\,2\,]$

28] المعادلة $[\,\frac{1}{\text{س}}\,] = -2$ الحل : $-2 \leq \frac{1}{\text{س}} < -1 \Leftarrow$

أقلب تقلب $-\frac{1}{2} \leq$ س < -1 ∴ مج =] -1 ، $-\frac{1}{2}$[

29] [س] − س = 0 الحل: [س] = س أنتبه إذا كان الذي داخل الصحيح = خارجه أفهم أن العدد صحيح ⇐ س ∍ص ∴ مج = ص

30] $\frac{[س-1]}{[س-3]} = \frac{1}{2}$

الحل: 2[س−1] = [س−3] ⇐ 2([س]−1) =[س] −3 ⇐

2[س] −2 = [س] −3 ⇐ 2[س] −[س] =2 −3 ⇐ [س] = −1 ⇐

$-1 \leq$ س < 0 ⇐ مجموعة الحل= [−1 ، 0[

31] د (س)= $\sqrt{-س^2+2س-3}$ أوجد م ت ثم المدى ؟

1) م ت : معرفة لما − $س^2$+2س −3 ≥ 0

Δ = ب2−4أ جـ=4−4×−1×−3 =4−12= −8<0مستحيل لا توجد أصفار

أما الحصول على الإشارة سهل عوض أي قيمة مثلاً س= ⇐0 − $س^2$+2س−3

= −0 +0−3 =سالب

∴ م ت = ∅ سالبـة

∴ المدى غير موجود

32] د (س) = $\sqrt{س^2-2س-3}$

1) معرفة لما س2−2س−3 ≥ 0 ⇐ (س−3)(س+1) ≥ 0

الخطوات:1) أصفار 2) إشارة بالتعويض بقيمة من إحدى الفترات وأعكس إشارة الباقي

3− اختيار البقعة المناسبة + −1 − 3 +

الأصفار س=3 ، س = −1 أريد No أريد

لمعرفة إشارة البقعة الوسطي [−1 ، 3]

ضع س= 0 ∋ [−3،1] في س2−2س−3=0−0−3= سالب

∴ إشارة البقة بين −1 ، 3 هي (−) أعكس الباقي عزيزي الطالب تعمدت شرح هذه الطريقة الرائعة . ∴م ت =]− ∞ ، −1] ∪ [3 ، + ∞ [

2) المدى ص = $\sqrt{س^2 - 2س - 3}$

ربع ص2= $س^2$−2س+3 صفرها ((لاتنسى ص≥ 0 لأنه جذر))

$س^2$−2س+3− $ص^2$ = 0 ⇐ الثوابت أ=1 ، ب=−2 ، جـ=(3− $ص^2$)

شرط وجود حل Δ ≥ 0 ⇐ ب2 − 4 أجـ ≥ 4 ⇐ 0−4×1 (3− $ص^2$) ≥ 0

4 − 12 +4$ص^2$ ≥ 0 ⇐ −8 + 4$ص^2$ ≥ ⇐ 4$ص^2$ ≥ 8 قسم على أربعة؟

⇐ $ص^2$≥ 2 ⇐ |ص| ≥ $\sqrt{2}$ قاعدة الأكبر .

إما (ص ≥ $\sqrt{2}$ مقبول أو ص ≤ −$\sqrt{2}$ مرفوض لأن ص ≥ 0 ∴المدى[$\sqrt{2}$، +∞[

ملاحظـة: (هذه الطريقة أسهل من الإكمال إلى مربع كامل والبناء).

31] د(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^2 - 1}}$ أوجد : م ت ثم المدى ؟

1) م ت: معرفة لما $س^2$ −1 > 0 ⇐ $س^2$ > 1 ⇐ |س| > 1 ⇐ س > 1 أو س< −1

⇐ م ت =] 1 ، + ∞ [∪] − ∞ ، −1 [

المدى: ص = $\frac{س}{\sqrt{س^2 - 1}}$ ربع $\frac{ص^2}{1}$ = $\frac{س^2}{س^2 - 1}$ لنوجد س بدلالة ص ثم نوجد

م ت للعلاقة الجديدة : $ص^2$($س^2$−1)= 1×$س^2$ ⇐ $ص^2$ $س^2$ − $ص^2$ = $س^2$

∴ $ص^2$ $س^2$ − $س^2$ = $ص^2$ ⇐ $س^2$ ($ص^2$−1) = ص ⇐ $س^2$ = $\frac{ص^2}{ص^2 - 1}$

س = $\frac{\pm\ |ص|}{\sqrt{ص^2 - 1}}$ معرفة لما $ص^2$ − 1 > 0

$ص^2$ > 1 ⇐ |ص| > 1

∴ ص > 1 أو ص< −1 ∴ المدى=] 1 ، + ∞ [∪] − ∞ ، −1 [

33] ص= $\frac{2س - 1}{(س-1)(س+2)}$

1) م ت = ح / { أصفار المقام } = ح / { 1 ، − 2 }

2) المدى : $\frac{ص}{1}$ = $\frac{2س - 1}{س^2 + س - 2}$ ⇐ ص (س^2+ س − 2) = 2س − 1

ص س^2 + ص س − 2ص −2س +1 = 0 ⎫ أ = ص

ص س^2 + (ص−2) س + 1 − 2ص = 0 ⎬ ب= ص−2

Δ ≥ 0 ⇐ ب2 − 4 أ جـ ≥ 0 ⎭ جـ= 1−2ص

(ص− 2)^2− 4 × ص (1− 2ص) ≥ ⇐0ص^2−4ص+4−4ص+8ص^2≥ 0

9ص^2 − 8 ص + 4 ≥ 0

Δ = ب^2 − 4 أ جـ = 64 − 4 × 9 × 4 < 0 لا توجد أصفار

والإشارة ضع ص=⇐ 0 0− 0+4 موجب ∴ موجبة على كل ح المدى ح

34] د (س) = $\frac{س^2 + 5}{س + 6}$

1) م ت =ح/{ − 6 } 2) المدى $\frac{ص}{1}$= $\frac{س^2 + 5}{س + 6}$⇐ص(س+6)= س^2+5

صفرها

ص س + 6 ص = س2 + 5

س^2− ص س − 6 ص + 5 = 0 ⇐ Δ ≥ ⇐0 ص^2 − 4 (6−5ص) ≥ 0

ص^2+24ص −20 ≥ 0 أحسب Δ مرة أخرى ... أكمـل ؟

35] د (س) = ⎧ س + 1 عندما س ≥ 0

⎩ −2 س < 0

1) م ت = ح المدى بالبناء أولاً

⎧ لما 0 ≤ س

⎨ 0 ≤ س < ∞ أضف 1

⎩ 1 ≤ س +1 < ∞ ⇐ 1≤ د(س) <∞

ثانياً: لما س < 0 ⇐ د(س) = −2 ∴ المدى] 1 ، ∞ [∪ {−2}

36] ص = س^2 + 9

1) م ت = ح 2) أنتبه ص > 0

المدى − ∞ < س < ∞ ⇐ 0 ≤ س2 < ∞ أضف ⇐ 9

9 ≤ س2 + 9 < ∞ المدى [9 ، + ∞ [

37] د (س) = 3 − س2

1) م ت = ح 2) ص= 3− س ⇐ س^2 =3− ص ⇐ س= ± $\sqrt{3-}$ ص

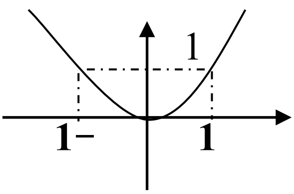
معرفة لما 3 − ص ≥ 0 ⇐ 3 ≥ ص ⇐ المدى =]− ∞ ، 3]

بعض أنواع الدوال وتمثيلها

1) الدالة الزوجية : د (− س) = د (س) لاحظ أكلت السالب

من صفاتها تماثلية حول محور الصادات من أهم الدوال الزوجية :

د (س) = س^2 دالة منحنية لرسمها نحتاج بعض النقاط : ص = س^2



ضع س = 0 ⇐ ص = 0 (0 ، 0)

ضع س = 1 ⇐ ص =(1)^2−1 (1 ، 1)

ضع س = 0 ⇐ ص = 0 (−1، 1)

لاحظ التماثل حول الصادات .

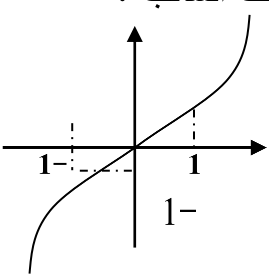
مثال : د (س)= جتا س زوجية جتا (− س) = جتا س

2) الدالة الفردية : د (− س) = − د(س) لاحظت خرجت السالب .

من صفاتها تماثلية حول المبدأ .

من أهم الدوال الفردية د(س) = س^3

لرسمها نحتاج بعض النقاط :ص= س^3



ضع س= 0 ⇐ ص = 0(0,0) ضع س = 1 ⇐

ص= $(1)^3$ =1 ∴ (1,1)

ضع س = −1 ⇐ ص =$(-1)^3$ = −1 ∴ (−1 , −1)

مثال : د(س)= جا س داله فردية لأن جا (− س) =− جا س

وبالمثل الظا , الظتا.

3) دالة المقياس (المطلق) . | |

لكي نتعامل مع دالة المقياس لازم إعادة تعريفها

الخطوات: (1) اصغار المقياس (2) اشارتة (3) في البقعة الموجبة نبعد المقياس وفي البقعة السالبة نستبدله بـ(−)

مثال : د(س) = |س| = $\begin{cases} \text{س} & \text{لما س} \geq 0 \\ -\text{س} & \text{لما س} < 0 \end{cases}$

لاحظ |− س| = |س| ∴د(س) = |س| دالة زوجية .

(4) دالة الصحيح د(س) = [س] من خواصها : (1) [س] = ن ⇐

ن ≤ س > ن + 1 (2) ∀هـ∍ ص ⇐ [س + هـ] = [س] +هـ.

مثال : [س + 5] = [س] + 5

(3) عند رسمها نجزئ مجموعة التعريف إلى فترات بين عددين صحيحين متتالين . (4) رسمها قطع مستقيمة على كل فترة .

(5) الدالة الدورية : نقول عن الدالة د (س) دورية أذا وجد عدد ر >0 بحيث د(س+ ر)= د(س) حيث ر أصغر عدد موجب يحقق العلاقة ويدعى دور الدالة من الدوال الدورية الدوال المثلثة وبعض دوال الصحيح .

مثال : * جا (س+2 л)= جا س الجا دورية ودورها (2 л) .

* طا (л + س) =طا س ∴ الظا دورية ودورها (л) .

تمارين ومسائل (2 - 2)

أولاً : بين نوع الدالة التالية من حيث كونها زوجية أو فردية .

[1] د(س) $=3$س-4س^3 , الحل : د($-$ س)$=3(-$س$)-4$ ($-$س$)^3 =$

-3س$+4$س$^3=-(3$س-4س$^3)=-$د(س) ∴د($-$ س)$=-$ د(س) أفهم أن د فردية .

[2] د(س)$=$ س$^4-5$س$^2-1$, الحل: د($-$ س)$=(-$ س$)^4-5(-$س$)^2-1=$ س$^4-$

5س$^2-1=$د(س) ∴ د($-$ س)$=$ د(س) أفهم أن د زوجية .

[3] د(س)$=\dfrac{\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}$ الحل: د($-$ س) $=\dfrac{(-\text{س})^3+2}{2(-\text{س})-3}=$

$\dfrac{-\text{س}^3+2}{-2\text{س}-3}\neq$ د(س) ∴ ليست زوجية .

ولو حسبنا $-$ د(س) $=-\left(\dfrac{\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}\right)=\dfrac{-\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}$

لوجدنـا د ($-$ س) $\neq -$ د(س) ∴ ليست فردية .

[4] د(س) $=2$س $-$ جا 3س , الحل: د($-$ س)$=2(-$ س$)-$جا$3(-$ س$)$

$=-2$س$+$جا3س$=-(2$س$-$جا3س$)=-$ د(س) ∴د($-$ س)$=-$ د(س) ∴د فردية.

[5] د(س)$=\dfrac{\text{س}^2+\text{جتا}2\text{س}}{\text{س}^4+1}$ الحل: د($-$ س)$=\dfrac{(-\text{س})^2+\text{جتا}(-2\text{س})}{(-\text{س})^4+1}$

$=\dfrac{\text{س}^2+\text{جتا}2\text{س}}{\text{س}^4+1}=$ د (س) $\Leftarrow$ د زوجية .

[6] د(س) $=\begin{cases} 2\text{س} & \text{س} > 0 \\ -2\text{س} & \text{س} < 0 \end{cases}$

الحل : د($-$ س) $=\begin{cases} -2\text{س} & -\text{س} > 0 \\ 2\text{س} & -\text{س} < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2\text{س} & \text{لما س} < 0 \\ 2\text{س} & \text{س} > 0 \end{cases}$

$=$ د(س) ∴ د زوجيــة .

[7] د(س) $=$ س^{2}جتا س

الحل: د(− س)= $(-س)^2$ جتا (− س)= $س^2$جتا س = د(س) ∴ زوجية .

[8] د(س) = $\left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3 + \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3$

الحل: د(− س) = $\left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3 + \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3$ = د(س) ∴ زوجية .

[9] د(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^2}+|س|}$

الحل: د(− س) = $\frac{-س}{\sqrt{(-س)^2}+|-س|} = \frac{-س}{\sqrt{س^2}+|س|}$ = − د(س) ⟸ د فردية .

[11] د(س) = $\frac{طا^3 س}{س+جاس}$ أنتبه طا(− س)=− طاس , جا(− س)=− جاس.

د(− س)= $\frac{طا^3(-س)}{-س+جا(-س)} = \frac{-طا^3 س}{-(س+جاس)} = \frac{طا^3 س}{(س+جاس)}$ = د(س) زوجية.

[12] د(س) $\begin{cases} س+5 & س \in [-5,-2] \\ 3 & س \in]-2, 2[\\ 5-س & س \in [2 , 5] \end{cases}$

الحل: د(− س) = $\begin{cases} -س+5 & -س \in [-5,-2] \\ 3 & -س \in]-2, 2[\\ 5+س & -س \in [2 , 5] \end{cases}$

= $\begin{cases} 5-س & س \in [2 , 5] \\ 3 & س \in]-2, 2[\\ 5+س & س \in [-5,-2] \end{cases}$ = د(س) ⟸ د زوجية

ثانياً : أعد تعريف كل من الدوال التالية وعين مداها .

[14] د(س)= |2س−7|

الحل: أتبع الطريقة السهلة أصفار – إشارة – إزالة .

∴ الأصفار $2س-7 = 0 \Leftarrow 2س = 7 \Leftarrow س = \frac{7}{2}$

إشارة داخل المقياس: $+$ ، $\frac{7}{2}$ ، $-$

$|2س-7| = 2س-7$ ، $|2س-7| = -(2س-7)$

$$\therefore \text{إعادة التعريف: } د(س) = \begin{cases} 2س-7 & \text{لما } س \geq \frac{7}{2} \\ -(2س-7) & س < \frac{7}{2} \end{cases}$$

المدى : م ت = ح $\Leftarrow -\infty < س < \infty$ أضرب بـ 2 ,

$-\infty < 2س < \infty$ أضف -7

$-\infty < 2س-7 < \infty$ ربع واطوي

$0 \leq (2س-7)^2 < \infty$

أجذر $0 \leq |2س-7| < \infty$

المدى = $[0, \infty[$.

[16] $د(س) = |\frac{1}{2}س| - 1$ الحل: أصفار – إشارة – إزالة

الأصفار $\frac{1}{2}س = 0 \Leftarrow س = 0$

إشارة داخل المقياس: $+$ ، 0 ، $-$

$|\frac{1}{2}س| - 1 = \frac{1}{2}س - 1$ ، $-\frac{1}{2}س - 1$

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{2}س - 1 & \text{حيث } س \geq 0 \\ -\frac{1}{2}س - 1 & \text{حيث } س < 0 \end{cases}$$

المدى سأبني الدالة الأصلية $د(س) = |\frac{1}{2}س| - 1$ على م ت = ح

∴البناء $-\infty < س < \infty$ أضرب بـ: $\frac{1}{2}$

$-\infty < \frac{1}{2}$ س $< \infty$ ربع واطوي

$\frac{1}{4} \le 0$ س$^2 < \infty$ أجذر $0 \le |\frac{1}{2}$ س$| < \infty$ أضف -1

$-1 \le |\frac{1}{2}$ س$|-1 < \infty$ $-1 \le$ د(س)$< \infty$ $\Leftarrow$ المدى $[-1, \infty[$

ملاحظة: جرب بناء الدالة على س≤ 0 ثم س>0 ستجد نفس الجواب 0

[17] د(س)= |4س$^2-16$| الحل: أصفار إشارة إزالة

الأصفار 4س$^2-16=0$ $\Leftarrow$ 4س$^2=16$ $\Leftarrow$ س$^2=$ $\Leftarrow$4س= $\pm$ 2

إشارة (4س$^2-16$) + 2 − −2 +

|4س$^2-16$|= 4س$^2-16$ −(4س$^2-16$) 4س$^2-16$

إعادة التعريف :

د(س) = $\begin{cases} 4س^2-16 & س \ge 2 \\ -(4س^2-16) & -2 < س < 2 \\ 4س^2-16 & س \le -2 \end{cases}$

المدى سأبني الدالة الأصلية , بما أن م ت = ح ∴البناء $-\infty <$ س$< \infty$ ربع واطوي

≤ 0 س$^2 < \infty$ أضرب بـ4$\le 0 \Leftarrow$ 4س$^2 < \infty$ أضف -16

$-4 \le 16$س$^2-16 < \infty$ ربع واطوي

≤ 0(4س$^2-16)^2 < \infty$ أجذر

≤ 0|4 س$^2-16$|$< \infty$ $\Leftarrow$ المدى $[0 , \infty[$.

[18] =| س−3|+2| س−2|$_3$+ س

2 3

|س−3|	+ س − 3	− −س+3	− −س+3
2|س−2|	+ 2(س−2)=2س−4	+ 2س−4	− −2س+4
س	س	س	س
د(س)	4س−7	2س−1	−2س+7

د(س)= { 4س−7 لما س ≥ 3 ؛ 2س−1 2 < س < 3 ؛ −2س+7 س ≤ 2 }

المدى * على س ≥ 3 ⟸ 4س ≥ 12 أضف −7 ⟸ 4س−7 ≥ 5 ⟸ ص ≥ 5

* على 2 < س < 3 ⟸ اضرب بـ4 ⟸ 2 < 2س < 6 أضف −1

3 < 2س−1 < 3 ⟸ 5 < ص < 5

* على س ≤ 2 ⟸ −2س ≥ −4 أضف 7 ⟸ −2س+7 ≥ 3

المدى [5, +∞[∪]3, 5[∪ [3+, ∞+[= [3, +∞[

[19] د(س)= |2س−1| − 3 + 2س الحل: م ت = ح

لإزالة المقياس: أصفار − إشارة − إزالة

أصفار المقياس: 2س−1=0 ⟸ 2س=1 ⟸ س= $\frac{1}{2}$

إشارة داخل المقياس + $\frac{1}{2}$ −

د(س)=2س−1−3+2س	−(2س−1)−3+2س
= 4س−4	= −2س+1−3+2س = −2

إعادة التعريف: د(س)= { 4س−4 س ≥ $\frac{1}{2}$ ؛ −2 س < $\frac{1}{2}$ }

البناء * $\frac{1}{2} \geq$ س أضرب بـ4 ⇐ 4س ≥ 2 أضف (-4)

$-4 \geq$ 2س -4 ⇐ $-2 \geq$ ص

* س $> \frac{1}{2}$ ⇐ ص $= -2$ ∴ المدى $[-2, +\infty[\cup \{-2\} = [-2, \infty[$

ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف ومدى كل من الدوال التالية:

[20] د(س) = [س+11] الحل: * م ت = ح لأنها دالة صحيحة .

* المدى: ص=[س+11]=[س] +11 يحسب المدى بطريقة التدرج

* على [0,1[يكون [س]=0 ⇐ ص=0+11=11 ∋ ص

* على [1,2[يكون [س] = 1 ⇐ ص=1+11=12 ∋ ص

* على [2,3[يكون [س] = 2 ⇐ ص=2+11=13 ∋ ص

* نستنتج أن ص=[س]+11 ∋ ص ∴ المدى = ص

[21] د(س)=[$\frac{1}{2}$س+1]

الحل: (1)م ت=ح لأنها دالة صحيحة. (2) د(س)=[$\frac{1}{2}$س]+1 نتبع طريقة التدرج.

على [0,2[⇐ $0 \leq$ س < 2 أضرب بـ $\frac{1}{2}$ ⇐ $0 \leq \frac{1}{2}$س < 1 ⇐ [$\frac{1}{2}$س]=0

أضف(1) ⇐ [$\frac{1}{2}$ س]+1=1 ⇐ ص=1

على [2 ,4 [⇐ $2 \leq$ س < 4 ⇐ $1 \leq \frac{1}{2}$س < 2

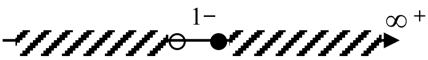
⇐ [$\frac{1}{2}$ س] = 1 ⇐ [$\frac{1}{2}$ س] +1 = 2 ⇐ ص=2

∴ بشكل عام ص ∋ ص ∴ المدى = ص .

[22] د(س) = $\frac{1}{[س]+1}$ الحل: (1) م ت =ح /{أصفار المقام}

∴ ضع [س] +1=0 ⇐ [س]= −1 ⇐ $-1 \leq$ س < 0 ⇐ م ت =ح/[−1, 0[

(2) لإيجاد المدى نتبع طريقة التدرج .



أولاً :على [0, +∞ [من أجل [0 , 1[يكون

[س]=0 ⟸ [س] +1= ⟸ 1 $\frac{1}{[س]+1}= \frac{1}{1}=1$

على[1, 2[⟸ [س] = ⟸ 1[س] +1 = ⟸ 2 $\frac{1}{[س]+1}= \frac{1}{2}$

∴ ص ∈ { 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,......} وعلى]−∞ ,− 1[نتبع طريقة التدرج .

على[−2,− 1[⟸ [س]=− 2 ⟸ [س]+1=− ⟸ 1 $\frac{1}{[س]+1}= \frac{1}{-1}=-1$

على[−3,− 2[⟸ [س]=− 3 ⟸ [س]+1=− ⟸ 2 $\frac{1}{[س]+1}= \frac{-1}{2}$

∴ ص ∈ {−1, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$,......}

∴ المدى{.........− $\frac{1}{3}$,− $\frac{1}{2}$,−1,1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$......}

رابعاً: أوجد مجموع الحل للمعادلات التالية:

[23] |س+4|+2س+5=0

الحل: |س+4|=−2س− ⟸ 5س + 4= ±(−2س−5)

∴إما س+4 = −2س− ⟸ 5 3س= − ⟸ 9 س=−3

أو س+4= −(−2س−5) ⟸ س+4=2س+ ⟸ 5−1= س

∴مجموعة الحل = {−3 ، −1}

[24] 3 $\sqrt{س^2}$ −2|س|−1=0

أنتبه $\sqrt{س^2}$ =|س|

الحل: 3| س | −2 | س |−1 = ⟸ 0 |س|−1= ⟸ 0|س|=1

⟸ س= ±1 ∴ مجموعة الحل {+1, −1}

[25] 2 | س+1| − 5 = 0

2 | س+1| = 5 ⟸ | س+1| = $\frac{5}{2}$ ⟸ س+1 = ± $\frac{5}{2}$

إما س+1 = $\frac{5}{2}$ ⇐ س= $\frac{5}{2}$−1 ⇐س= $\frac{5-2}{2}$ = $\frac{3}{2}$ ⇐ س= $\frac{3}{2}$

أو س+1 = − $\frac{5}{2}$ ⇐ س= − $\frac{5}{2}$ −1= $\frac{-7}{2}$ ⇐ س= $\frac{-7}{2}$

∴ مجموعة الحـل = $\{\frac{3}{2}, \frac{-7}{2}\}$

[26] س^2−5|س|+6=0 الحل: س^2+6=5|س| ⇐س^2+6= 5(± س)

أماس^2+6=5س ⇐ س^2−5س+6 =0 ⇐ (س−2) (س−3)= ⇐ 0 س=2 أو

س−3=0 ⇐ س=3 أو س^2+6=−5 س ⇐ س^2+5س+6= ⇐ 0(س+ 3)

(س + 2)= ⇐ 0 س + 3= ⇐ 0 س = −3

أو س+2= ⇐ 0 س=−2 ∴مج={3,2,−2,−3}

[27] [1−3س]=−5 الحل: [3−1س]=− 1 ⇐ 5+ [−3س]= − 5

[−3س]=− ⇐ 6−6 ≤−3س <−5 قسم على − ⇐ 2≥ 3س> $\frac{5}{3}$0

∴ مجموعة الحل]$\frac{5}{3}$, 2]

[28] المعادلة [$\frac{1}{س}$]= −2 الحل: −$\frac{1}{س}$≥ 2>−1 ⇐ أقلب−$\frac{1}{2}$≤س>−1

∴ مج =]−1, $\frac{-1}{2}$]

[29] [س]− س = ⇐ 0

الحل: [س]= س أنتبه إذا كان الذي داخل الصحيح = خارجه

أفهم أن العدد صحيح , ∴ س ∍ ص ∴مجموعة الحل = ص

[30] $\frac{[س-1]}{[س-3]}$ = $\frac{1}{2}$

الحل: 2[س−1] = [س−3] ⇐ 2([س]−1) = [س] − 3

⇐ 2[س]−2=[س]−3

2 [س] − [س] = 3−2 ⇐ [س]=−1 ⇐ −1≤ س<0 ⇐ مج=[−1, 0[

خامساً: مثل الدوال التالية بيانياً ومن الرسم أوجد :

مجموعة التعريف و المدى . وبين فيما إذا كانت زوجية أو فردية

ملاحظة: (1) لرسم المستقيم يكفي نقطتين .

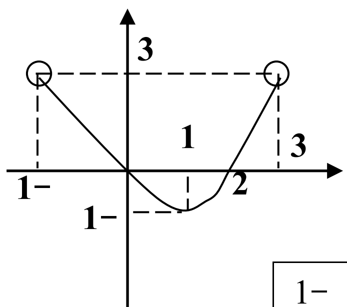
(2) لرسم المنحني نأخذ عدة نقاط ونصل بينهم بصورة منحنية .

[31] د(س)= س^2 −2س , س ∈]−1, 3]

الدالة من الدرجة الثانية ∴ تمثل بمنحنى نتعرف عليه بأخذ نقاط من الفترة

* لما س=−1 ⇐ص=(−1)^2 −2(−1) =2+1=3 ∴(−1, 3)

ملاحظة : طالما س=−1 ∉]−1 , 3] ∴رسمها في الشكل دائرة مفرغة .



* لما س=0 ⇐ص=(0)^2−2×0=0 (0 ,0)

* لما س=1 ⇐ص= 1−2×1=−1 (1, −1)

* لما س=2 ⇐ص=4−4 =0 (2 , 0)

* لما س=3 ⇐ص=9−2×3=3 (3,3)

س	0	1	2	3	1−
ص	0	1−	0	3	3

الاستنتاج: (1) م ت =]−1, 3] (2) المدى=[−1, 3] (3) د ليست زوجية ولا فردية.

[32] د(س) = $\begin{cases} 2س & , س<1 \\ 3 & س \geq 1 \end{cases}$

الحل: **أولاً على الفترة:** س<1 ⇐ ص=2س لرسمه أختار نقطتين .

لما س=1 ⇐ص=2 ⇐ (1 , 2) نفرغها في الشكل

لما س=0 ⟸ ص=2×0=0 ⟸ (0,0)

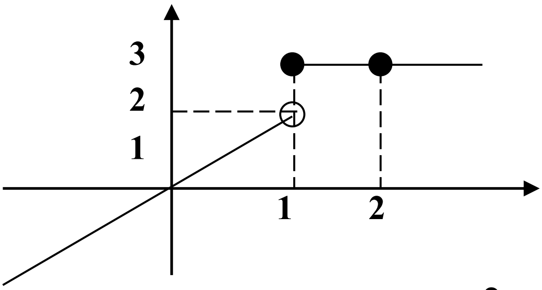
س	1	0
ص	2	0

ثانياً: على الفترة: س ≤ 1 ⟸ ص=3

لاحظ دالة ثابتة تمثل بمستقيم أفقي // السينات

لما س=1 ⟸ ص=3 النقطة (1, 3)

لما س=2 ⟸ ص=3 (2, 3)



الاستنتاج (1) م ت=ح

(2) المدى =]−∞ , 2[∪ {3}

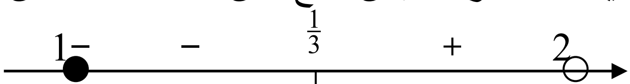
(3) لا زوجيـة ولا فرديـة .

[33] د(س) =|3س−1| , −1≤ س < 2

الحل: الخطة للتخلص من المقياس (1)أصفار (2) إشارة (3) إزالة المقياس

حيث أذا عرفنا أن إشارة داخل المقياس موجبة نبعد المقياس وإذا كانت إشارة داخل المقياس سالبة نبعد المقياس ونضرب بـ(−)

التنفيذ : أصفار المقياس ضع 3س−1= 0 ⟸ س= $\frac{1}{3}$



|3س−1|=−(3س−1) | |3س−1|=3س−1

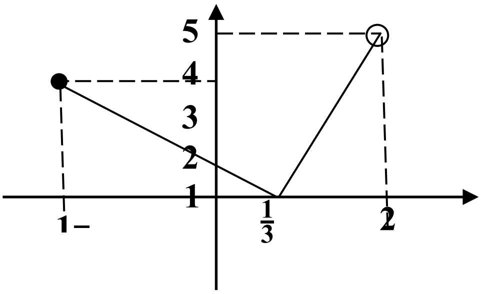
=−3س+1

أولاً: على [−1, $\frac{1}{3}$[⟸ ص= −3س+1 لرسمه نحتاج إلى نقطتين ويفضل عند أطراف الفترة: لما س =−1 ⟸ ص= −3×−1+1=4

لما س = $\frac{1}{3}$ ⟸ ص= −3× $\frac{1}{3}$+1=0

س	1−	$\frac{1}{3}$
ص	4	0

ثانياً على ا , 2[⇐ ص=3 س −1



الاستنتاج:

س	$\frac{1}{3}$	2
ص	0	5

(1) م ت =[−1, 2]

(2) المدى [0, 5]

(3) لا زوجيـــة ولا فرديـــة

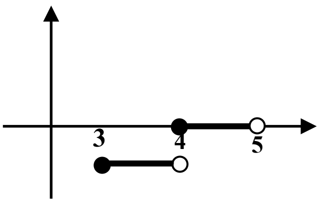
[34] د(س)= [س−4] , 3 ≥ س >5

الحل: د(س)=[س] − 4 أنتبه دالة الصحيح تدرس على فترات بين عدديين صحيحين متتاليين * على [3 , 4[⇐ [س]=3 ⇐ ص=3−4=−1 ⇐

دالة ثابتة تمثل بمستقيم ص= −1

* على [4, 5[⇐ [س] = 4 ⇐ ص =4−4 =0

∴ تمثل بمستقيم منطبق على السينات .



الاستنتـاج :

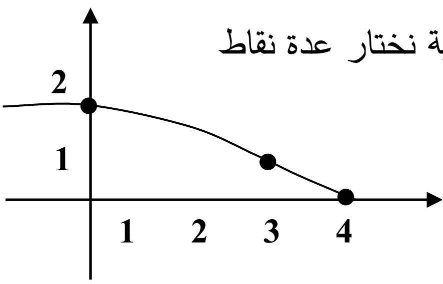
(1) م ت =[3, 5[

(2) المدى ={−1, 0}

(3) لا زوجية ولا فردية

[35] د(س)= $\sqrt{4-س}$ الحل: معرفة لما4− س ≥ 0 ⇐

≤4 س ⇐ م ت =]−∞ , 4] الدالة منحنية نختار عدة نقاط



نبدأ بـ س=4 ⇐ ص= $\sqrt{4-4}$ = 0 (4, 0)

لما س=3 ⇐ ص = $\sqrt{4-3}$ = 1 (3, 1)

لما س=0 ⇐ ص= $\sqrt{4-0}$ = 2 (0, 2)

الاستنتاج (1) م ت =] −∞ , 4] (2) المدى: [0, +∞[

(3) لا زوجية ولا فردية .

[36] د(س)=–|س–11| الحل: أصفار – إشارة – إزالة المقياس من خلال الإشارة ∴ س–11=0 ⇐ س =11

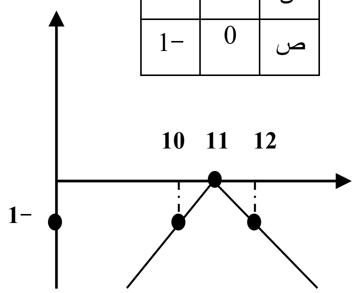
إشارة داخل المقياس +	11	–
–|س–11|=–(س–11)		ص=–×–(س–11)
=– س + 11		= س–11

* على [11, +∞[⇐ ص=– س+11 لرسمه نحتاج نقطتين

س	11	12
ص	0	–1

لما س=11 ⇐ص = –11+11= 0 (11, 0)

لما س=12 ⇐ص= –12+11=–1 (12, –1)



* على]–∞, 11] ص= س –11

س	11	10
ص	0	–1

الاستنتاج :

(1) م ت =ح

(2) المدى] –∞, 0]

(3) لا زوجية ولا فردية .

[39] **د(س)** = { –|س| ، س ≥0 ؛ [س]–3 ، –4 < س<0 }

س	0	1
ص	0	–1

الحل: على الفترة]0, ∞ + [⇐

ص= – |س | = – س لرسمه نقطتان مبينتان في الجدول

على الفترة]–4, 0[⇐ص =[س]–3 ندرسه على فترات جزئية

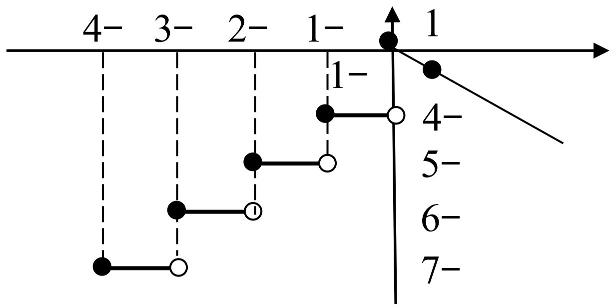
* على]–4, –3[⇐ [س] =–4 ⇐ص=–4–3 =–7 دالة ثابتة .

* على]–3, –2[⇐ [س] =–3 ⇐ص=–3–3 =–6 دالة ثابتة .

* على]−2, −1] ⇐ [س] =−2 ⇐ص=−2−3 =−5 دالة ثابتة .

* على]−1, 0] ⇐ [س] =−1 ⇐ص=−1−3 =−4 دالة ثابتة .

الاستنتـاج:



(1) م ت=]−4, +∞[.

(2) المدى]−∞, 0] .

(3) لا زوجية ولا فردية .

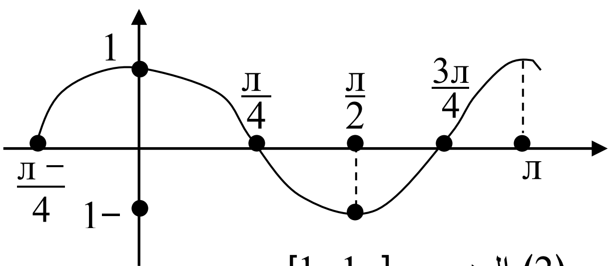
[40] د(س) = جتا 2س

الحل : الدالة دورية ودورها $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ∴.نرسمها على[0, π]

نقسمها إلى أربعة أقسام طول كل قسم $\frac{\pi}{4}$ تم نكرر الرسم على ح

للتأكد من الدور لاحظ د(س+ π)=جتا2 (س+ π) =جتا(2س+2π)=جتا2س

س	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2س	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2 π
جتا2س	1	0	1-	0	1



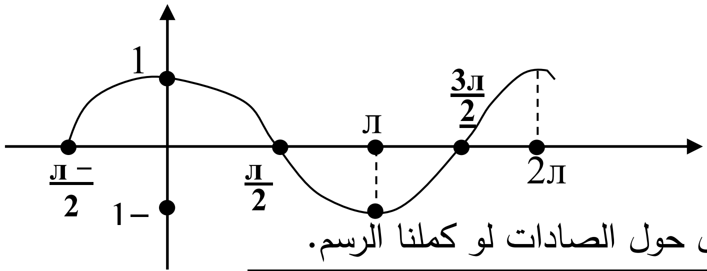
الاستنتاج: (1) م ت = ح (2) المدى = [−1, 1]

(3) زوجية (تماثلية حول محور الصادات)

[41] د(س) =جتا س مثل الدالة تم بين أنها دورية وعين دورهـا ؟

الحل: د دورية ودورها 2 π لأن د(س+2 π) = جتا(س+2 π) = جتا س = د(س)

∴الدور =2 π ∴ نقسم الدور إلى أربعة أقسام



الاستنتاج :

(1) م ت = ح

(2) المدى $[-1, 1]$

(3) زوجية لاحظ التماثل حول الصادات لو كملنا الرسم.

س	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جتا س	1	0	-1	0	1

تحــديد الدالـــة

(1) د محدودة من الأعلى إذا وجد ل بحيث د(س) $\leq$ ل .

(2) د محدودة من الأسفل إذا وجد ك بحيث ك$\leq$ د(س) .

(3) محدودة إذا كان ك $\leq$ د(س) $\leq$ ل .

تمارين ومسائل (2 - 3)

[1] أدرس إطراد الدوال التالية : (1) د(س) =3س-1 .

الحل: $\forall$ س$_2$, س$_1 \in$ ح لنفرض س$_2 >$ س$_1$ أضرب بـ(3)

3س$_2 >$ 3س$_1$ أضف (-1) 3س$_2-1 >$ 3 س$_1-1$

$\Leftarrow$ د(س$_2$)> د(س$_1$) $\Leftarrow$ د تزايدية فعـلاً .

---

[2] د(س)= س$^2-1$ الحـل: م ت = ح .

* قاعدة الصفر التربيعي ضع س^2=0 $\Leftarrow$ س=0$\in$ ح

$\therefore$ عالج المسألة على فترتين أولاً: قبل الصفر أي على $]-\infty, 0]$

ثانياً بعد الصفر أي على $[0,+\infty[$

$\therefore$ على $]-\infty$, $0]$ بفرض س$_2 <$س$_1$ ربع واعكس لأن القيم سالبة.

س$_2^2$ > س$_1^2$ أضف -1 ⟸ س$_2^2-1$ > س$_1^2-1$ ⟸

د(س$_2$) > د(س$_1$) ⟸ د تناقصية فعلاً .

على $[0, +\infty[$ بفرض س$_2$ > س$_1$ ⟸ س$_2^2$ > س$_1^2$ ⟸

س$_2^2-1$ > س$_1^2-1$ ⟸ د(س$_2$) > د(س$_1$) ⟸ د تزايدية فعلاً .

(3) د (س) = س$^2-4$س-5

الحل: م ت =ح أنتبه ظهر أكثر من س لابد من الإكمال إلى مربع كامل.

∴ ص= س$^2-4$س$+4-4-5$= (س$-2)^2-9$

<u>قاعدة الصفر التربيعي:</u> (س$-2)^2=0$ ⟸ س$-2=0$ ⟸ س$=2$ ∈ ح

أقسم ح إلى فترتين $]-\infty, 2]$, $[2, \infty[$

<u>أولاً</u> : على $]-\infty, 2]$ بفرض س$_2$ > س$_1$ ⟸ أضف -2 ⟸

س$_2-2$ > س$_1-2$ ربع وأعكس ⟸ (س$_2-2)^2$ < (س$_1-1)^2$ أضف (-9)

⟸ (س$_2-2)^2-9$ < (س$_1-1)^2-9$ ⟸ د(س$_2$) < د (س$_1$) ⟸ د تناقصية .

ثانياً: على $[2, +\infty[$ الحل: بفرض س$_2$ > س$_1$ أضف -2 ⟸

س$_2-2$ > س$_1-2$ ربع ⟸ (س$_2-2)^2$ > (س$_1-1)^2$ أضف (-9) ⟸

(س$_2-2)^2-9$ > (س$_1-1)^2-9$ ⟸ د(س$_2$) > د (س$_1$) ⟸ د تزايدية .

---

(4) د(س) = $\sqrt{\text{س}^2+1}$ الحل: م ت: معرفة لما س$^2+1 \geq 0$ وهذا محقق دوماً لأنها مجموع مربعين ⟸ م ت = ح.

<u>قاعدة الصفر التربيعي:</u> س$^2=0$ ⟸ س$=0$ ∈ ح ∴أقسمها إلى فترتين.

أولاً: على $]-\infty, 0]$ بفرض س$_2$<س$_1$ ⟸ س$_2^2$> س$_1^2$ ⟸ س$_2^2+1$> س$_1^2+1$

⟸ $\sqrt{\text{س}_2^2+1}$ > $\sqrt{\text{س}_1^2+1}$ ⟸ د(س$_2$)> د(س$_1$) ⟸ د تناقصية .

ثانياً: على $[0, \infty[$ بفرض س$_2$>س$_1$ ⟸ س$_2^2$> س$_1^2$ ⟸ س$_2^2+1$> س$_1^2+1$

⇐ $\sqrt{}$س$_2^2$+1 < $\sqrt{}$س$_1^2$+1 ⇐د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐ د تزايدية .

(5) د(س)= $\sqrt{\dfrac{1}{س^3+1}}$ = $\dfrac{1}{\sqrt{س^3+1}}$

الحل: م ت معرفة لما س^3+1> 0 ⇐ س^3 >−1 ⇐ س>−1

∴ م ت =]−1, ∞[بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ س$_2^3$ > س$_1^3$ ⇐

س$_2^3$+1 > س$_1^3$+1 ⇐ $\sqrt{}$س$_2^3$+1 > $\sqrt{}$س$_1^3$+1

أقلب تقلب ⇐ $\dfrac{1}{\sqrt{س_2^3+1}}$ < $\dfrac{1}{\sqrt{س_1^3+1}}$ ⇐ د(س$_2$) <د(س$_1$) ⇐ د تناقصية.

---

(6) د(س) = |س−3| الحل: أصفار − إشارة − إزالة

+	3	−
د(س)= س−3		د(س)= − س+3

الأصفار س−3=0 ⇐ س=3

أولاً على]−∞, 3] يكون ص= − س+3

∴ بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ − س$_2$ <− س$_1$ ⇐ − س$_2$+3<− س$_1$ +3

⇐د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐ د تناقصية .

ثانياً على]3, +∞[يكون ص=س− 3 ∴بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐

س$_2$−3 > س$_1$−3 ⇐د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐د تزايدية.

---

(7) د(س)= 1−|س| الحل: أولاً على]−∞, 0] تكون د(س) =1+س

بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ 1+ س$_2$ >1+ س$_1$ ⇐ د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐د تزايدية.

+	0	−
1− س		1+ س

ثانياً: على [., +∞[تكون د(س) =1− س

بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ − س$_2$ <− س$_1$ ⇐ 1−س$_2$ <1−س$_1$ ⇐

د(س$_2$) < د(س$_1$) ⇐ ∴د تناقصيـة.

---

(8) د(س) = 2+[س] الحل: م ت = ح

∴على [0, 1[يكون [س] = ⇐ 0 ⇐ د(س)=0+2=2 ⇐ د ثابتة على كل [0, 1[

على [1, 2[يكون [س] =1 ⇐ د(س)= 1+2 =3 ⇐ د ثابتة على كل [1, 2[

∴د تزداد من 2 إلى 3 إلى 4 إلى ....

∴ على ح بفرض $س_2 > س_1$ ⇐ $د(س_2) \geq د(س_1)$ ⇐ ∴ د تزايدية.

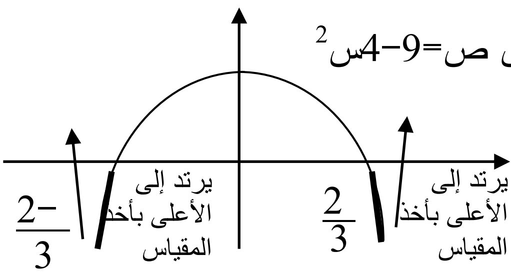
(9) د(س) = $|9-4س^2|$ (سأحلها بطريقة الرسم البياني)

أولاً: بدون مقياس ⇐ د(س) =$9-4س^2$. دالة زوجية

لما س= ⇐ 0 ⇐ ص=4 (0, 4)

لما ص=4 ⇐ 0−9$س^2$=4 ⇐ 0=9س ⇐ $س^2$ =$\frac{4}{9}$ ⇐ س= $\pm$ ($\frac{2}{3}$, 0) ($\frac{2}{3}$

($-\frac{2}{3}$, 0) ∴ الرسم بدون مقياس ص=$9-4س^2$



الاستنتـاج :

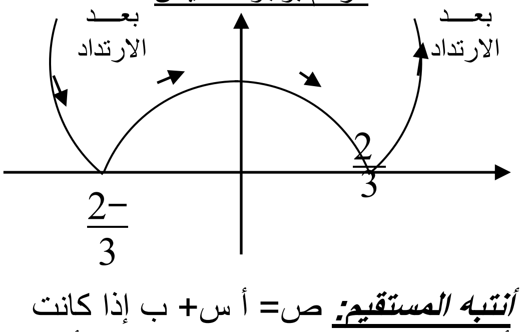
(1) على]−∞ , $-\frac{2}{3}$] ⇐ د تناقصية.

(2) على [$-\frac{2}{3}$, 0] ⇐ د تزايدية.

(3) على [0, $\frac{2}{3}$] ⇐ د تناقصية.

(4) على [$\frac{2}{3}$, +∞[⇐ د تزايدية.

الرسم بوجود المقياس



[10] د(س)=|س+2|+|1− س|+3

الحل: 1 −2

|س+2|	+ س+2	+ س+2	- -س-2
|1- س|	- -1+ س	+ 1- س	+ 1-س
3	3	3	3
د(س)=	2س+4	6	-2س+2

أنتبه المستقيم: ص= أ س+ ب إذا كانت أ >0 فإن د تزايدية وإذا كانت أ<0 تناقصية.

أولاً على $]-\infty , -2]$ يكون ص= -2س$+2$ تناقصية لأن أ $=-2<0$

على $]-2, 1]$ د(س)= 6 ثابتة لا تزايدية ولا تناقصية.

على $[1, +\infty[$ تكون

د(س) = 2س+4

لاحظ أ=$2>0$ ∴ تزايديـة.

[11] د(س) =(س$-2)^2$ الحـل: م ت = ح

قاعدة الصفرالتربيعي ضع (س$-2)^2=0$ ⇐س$-2=0$⇐س$=2$

∴ س = $2 \in$ ح ∴ اقسمها إلى فترتين

∴على$]-\infty , 2]$ بفرض س$_2$<س$_1$ ⇐ س$_2-2$ < س$_1-2$ ⇐

(س$_2-2)^2$>(س$_1-2)^2$ ⇐د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐ د تناقصية.

على $[2, +\infty[$ بفرض س$_2$>س$_1$ ⇐ س$_2-2$ > س$_1-2$ ⇐ (س$_2-2)^2$>(س$_1-2)^2$

⇐د(س$_2$) > د(س$_1$) ⇐ د تزايدية.

---

[12] د(س) = $\begin{cases} \text{س}-2 & \text{س} \geq 2 \\ 2-\text{س} & \text{س}<2 \end{cases}$

أولاً: على $[2, +\infty[$ تكون د(س) = س-2 بفرض س$_2$>س$_1$ ⇐

س$_2-2$ > س$_1-2$ ⇐ د(س$_2$) > د(س1)⇐د تزايدية [أو أ=$1>0$ تزايدية]

ثانياً: على $]-\infty ، 2[$ تكون ص = 2 – س

بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ – س$_2$< – س$_1$ ⇐ 2– س$_2$ < 2– س$_1$

⇐ د (س$_2$) < د (س$_1$) ⇐ د تناقصيـة .

---

[3] مثل الدوال التالية ومن الرسم أوجد المدى وابحث اطراد الدوال.

(1) د(س) = س$^2-2$س-3 الحل: ص=(س-3) (س$+1$) دالة منحنية لرسمها نحتاج

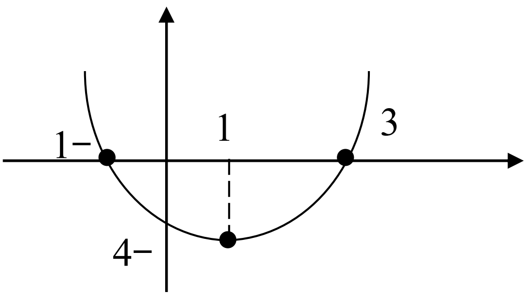
عدة نقاط   لما س=−1 ⇐ ص=0

لما س=3 ⇐ ص=0

لما س=1 ⇐ ص=1−2−3=−4

لما س=2 ⇐ ص=4−4−3=−3

س	−1	3	1	2
ص	0	0	−4	−3



الاستنتاج :

1) م ت = ح

2) المدى [−4, +∞[

3) على]−∞, 1] تناقصية.

4) على [1, +∞[تزايدية.

---

[5] د(س) = (س+1)|س|

− 0 +

الحل: على [0, +∞[د(س)= س(س+1)= س^2+س | د(س)= −س(س+1)= −س^2−س

ضع ص=0 ⇐ س(س+1)=0 ⇐ س=0   ∴ (0, 0)

أو س=−1 مرفوض خارج الفترة ولمعرفة قمته أكمل إلى مربع كامل

ص=س^2+س+$\frac{1}{4}$−$\frac{1}{4}$=(س+$\frac{1}{2}$)^2−$\frac{1}{4}$

لاحظ لما س = $\frac{-1}{2}$ ⇐ ص=−$\frac{1}{4}$ لكنها بكل أسف مرفوضة لأن س<0

ثانياً: على]−∞, 0] ص= −س^2−س= −س (س+1)

ضع ص=0 ⇐ إما −س=0 ⇐ س=0 (0, 0) أو س+1=0 ⇐ س=−1 (−1, 0)

ضع ص=−(س^2+س+$\frac{1}{4}$−$\frac{1}{4}$)=−(س+$\frac{1}{2}$)^2+$\frac{1}{4}$

لما س=−$\frac{1}{2}$ ⇐ ص=$\frac{1}{4}$ (−$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$) تدعى القمة (الذروة).

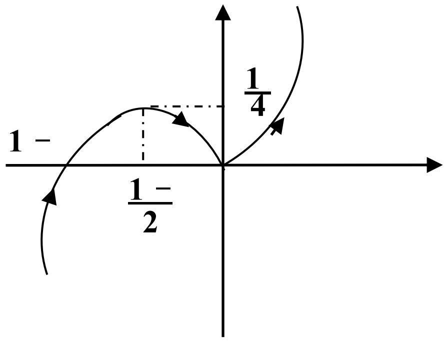
الاستنتاج: 1) م ت = ح

2) المدى = ح

3) على $]-\infty , -\frac{1}{2}]$ د تزايدية .

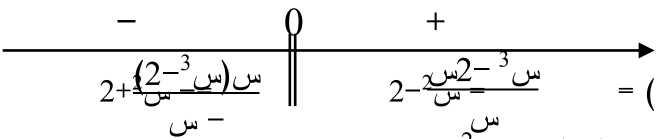
4) على $[-\frac{1}{2} , 0]$ د تناقصية .

5) على $[0, +\infty[$ د تزايدية .



[7] د(س) = $\frac{س^3 - 2س}{|س|}$

الحل: م ت = ح   د(س) =



* أولاً على $]0, +\infty[$ تكون د(س) = $س^2 - 2$

ضع س=0 $\Leftarrow$ ص=-2 $(0, -2)$ ممنوعة لأن الصفر ممنوع

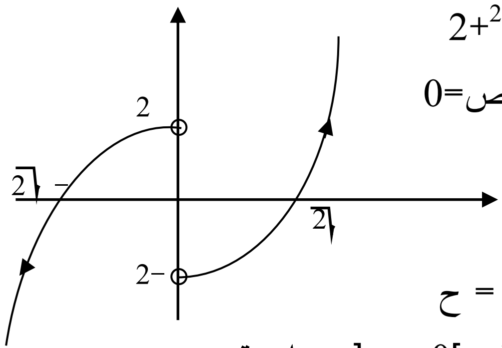
ضع ص = 0 $\Leftarrow$ $س^2-2=0$ $\Leftarrow$ $س^2=2$

$\Leftarrow$ س=$\pm\sqrt{2}$ $(\sqrt{2} , 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ مرفوض لأنها خارج الفترة.

ثانياً: على $]-\infty, 0[$ تكون ص= $-س^2+2$

لما س=0 $\Leftarrow$ ص=2 $(0, 2)$ ممنوعة ضع ص=0

$\Leftarrow$ $-س^2=-2$ $\Leftarrow$ $س^2=2$



$\Leftarrow$س= $\pm\sqrt{2}$ $\therefore$ $(-\sqrt{2}, 0)$ مقبولة.

الاستنتاج: (1) م ت=ح/{0} (2) المدى = ح

(3) على $]-\infty, 0[$ د تزايدية. (4) على $]0, \infty[$ د تزايدية .

---

[8] د(س) = س | س | + 2س − 3   الحل: أصفار المقياس: س= 0

أولاً: د(س) =$س^2+2س-3$ على $[0, +\infty[$

ضع ص=0 $\Leftarrow$ $س^2+2س-3=0$ $\Leftarrow$ (س+3) (س−1) =0 $\Leftarrow$

أما س+3=0 $\Leftarrow$ س=−3 $\notin [0 , \infty[$ مرفوض أو س−1=0 $\Leftarrow$ س=1 مقبول

−	+
− س^2+2س−3	س^2+2س−3

∴ لما س=1 ⇐ ص=1+2−3=0 (1, 0)

لما س=0 ⇐ ص=0+0−3=−3 (0, −3)

لما س=2 ⇐ ص=4+4−3=5 (2, 5)

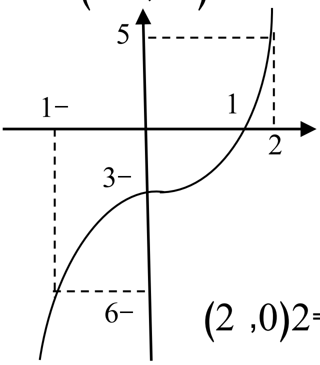
س	0	1	2
ص	−3	0	5

ثانياً: على]−∞, 0] د(س) = −س^2+2س−3.

س	0	−1
ص	−3	−6

ضع س=0 ⇐ ص=0+0−3=−3 (0, −3).

ضع س=−1 ⇐ ص=−(−1)^2+2(−1) −3 = −3−2−1=−6 (−1, −6).



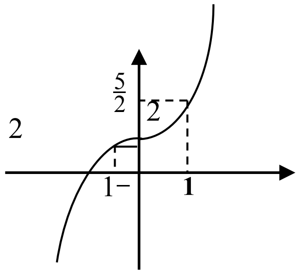
الاستنتاج: (1) م ت = ح (2) المدى = ح

(3) تزايدية فعلاً على كل ح.]

[10] د(س)= $\frac{1}{2}$س^3+2 الحل: ضع س=0 ⇐ ص=2 (0, 2)

ضع س=−1 ⇐ ص=−$\frac{1}{2}$+2 = $\frac{3}{2}$ (−1, $\frac{3}{2}$)

ضع س=−1 ⇐ ص=$\frac{1}{2}$+2 = $\frac{5}{2}$ (1, $\frac{5}{2}$)



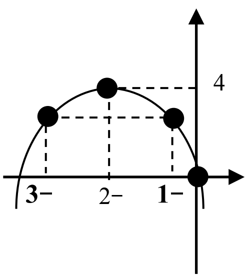
الاستنتاج: (1) م ت = ح , (2)المدى = ح .

(3) د تزايدية على كل ح .

(4) الدالة غير محدودة .

[11] د(س=4−(س+2)^2 الحل: ضع س=−2

⇐ ص=4−(2−2)^2 =4 (−2, 4)



ضع س=−3 ⇐ ص=4 −(−2+3)^2=4−(1) =3 (−3, 3)

ضع س=−1 ⇐ ص=4 −(−2+1)^2=4−1 =3 .(−1, 3)

ضع س=0 ⇐ ص=4 −(2+0)^2=4−4 =0(0, 0)

الاستنتاج: (1) م ت =ح .   (2) المدى =] −∞, 4]

(3) على] −∞, −2] تزايدية . (4) على=] −2, +∞] تناقصية .

(5) (−2, 4)نهاية عظمى محلية وهي عظمى مطلقة.

(6) د محدودة من الأعلى .

[12] د(س) =|س^3|−4   انتبه |س^3|=|س|^3

أولاً: على [0, +∞ [د(س)= س^3 −4

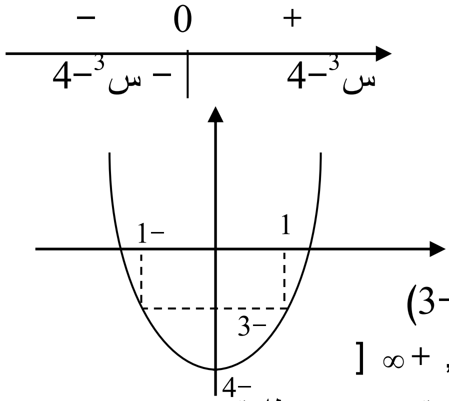
ضع س=0 ⇐ص=0−4 =−4(0,− 4).

ضع س=1 ⇐ص=1−4 =−3(1, −3).

ثانياً: على]− ∞, 0] ص= − س^3−4 .

ضع س=0 ⇐ ص=−4 . (0, −4)

ضع س=−1 ⇐ ص=+1−4= −3 (−1, −3)



الاستنتاج: (1) م ت=ح . (2) المدى =[−4, +∞ [

(3)[محدودة من الأسفل . (4) (0, −4) نهاية صغرى مطلقة .

(5) على]−∞, 0] تناقصية وعلى [0, +∞[تزايدية .

[13] د(س) = $\frac{س^4 - 2س}{|س|}$ الحل: أولاً : على]0, +∞ [

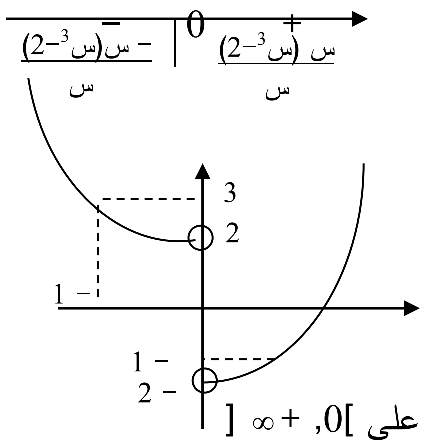
ص=س^3−2 لما س=0⇐ ص=0−2=−2 (0, −2)

لما س=1⇐ص=1−2=−1 (0, 2)

ثانياً: على]− ∞, 0[ص=−س^3+2

ضع س=0⇐ ص=2   (0, 2)

ضع س=1⇐ص=+1+2=3



الاستنتاج: (1) م ت=ح =ح/ {0} .

(2) المدى =]−2, +∞[

(3) محدودة من الأسفل .

(4) د تناقصية على]− ∞, 0[د تزايدية على]0, +∞ [