ADVARSEL!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:

http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-A.htm

Indeholder følgende:

Matematik A, STX 18 maj - Løst: Ja
Matematik A, STX 23 maj - Løst: Ja
Matematik A, STX 15 august - Løst: Ja
Matematik A, STX 7 december - Løst: Ja

Matematik A STX 18. maj 2017 Løsningsforslag www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet grafen for tre funktioner, som er defineret ved:

$f(x) = x + 1$
$g(x) = -x + 1$
$h(x) = 1$

Grafen viser *A*, *B* og *C*.

For $f(x)$ har vi, at b-værdien er 1, og hældningskoefficienten er $a = 1$ dvs. positiv, og den graf der opfylder disse betingelser er **grafen for *B***, dvs. den røde.
For $g(x)$ har vi, at b-værdien er 1, og hældningskoefficienten denne gang er negativ, dvs. $a = -1$ og dermed aftagende. Den graf der opfylder disse betingelser er **grafen for *A*** eller den blå graf.
For $h(x)$ har vi, at b-værdien er 1, og $a = 0$, så vi har kun en konstant ret linje, og den eneste graf der viser dette, er **grafen for *C*** dvs. den grønne graf.

Opgave 2

Givet to vektorer i planen, vi har:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ vi ønsker at bestemme arealet af det parallelogram, som vektorerne udspænder, og dette gør vi ved hjælp af formlen for determinanten.

$$\left|det(\vec{a}, \vec{b})\right| = \left|det\left(\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|-1\cdot 2 - 5\cdot 6\right| = \left|-2 - 30\right| = \left|-32\right| = 32$$

Og dermed er arealet af parallelogrammet 32.

Opgave 3

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4$

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$, så vi differentierer $f(x)$ først og får:
$f'(x) = x^2 + 2x - 3$ og dernæst løser vi ligningen $f'(x) = 0$ dvs.
$x^2 + 2x - 3 = 0$ og vi spørger os selv, hvilken to tal lagt sammen giver 2 men ganget sammen giver -3, svaret er 3 og -1 fordi:
$3 - 1 = 2$ og $3 \cdot (-1) = -3$ så vi skifter fortegn på vores gættede tal og har rødderne:
$x = -3 \vee x = 1$.

Jeg viser lige diskriminantmetoden.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Og vi får samme rødder.

Da vi har løst ligningen kan vi nu bruge to metoder til bestemmelse af monotoniforhold.
Metode 1)
Da vi har rødderne $x = -3 \vee x = 1$ så kan vi finde tal forskelligt fra rødderne, og disse kan være $-4; 0; 4$ så vi indsætter i $f'(x)$.

$f'(-4) = (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 = 5$
$f'(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$
$f'(4) = 4^2 + 2 \cdot 4 - 3 = 21$

Vi kan nu lave monotoniskema:

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Og vi kan slutte, at:
$f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; -3]$
$f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; 1]$
$f(x)$ er voksende i intervallet $[1; \infty)$.

Metode 2)
Vi bruger rødderne i den dobbelte afledede funktion.
$f''(x) = 2x + 2$ og vi får:
$f''(-3) = 2 \cdot (-3) + 2 = -4$ og da outputtet er negativt for $x = -3$, dvs. $-4 < 0$, så har vi et lokalt maksimum.
$f''(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ og da outputtet er positivt for $x = 1$, dvs. $4 > 0$, så har vi et lokalt minimum.

Og da $x = -3$ kommer før $x = 1$ så følger det, at vi har:
$f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; -3]$ og $[1; \infty)$
$f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; 1]$

Opgave 4

Givet to udtryk. Vi starter logisk nok med den første.

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b - (a+b)^2$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b - \left(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b\right)$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b - a^2 - b^2 - 2 \cdot a \cdot b$
$= a^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b - b^2$
$= -b^2$

Undervejs brugte jeg første kvadratsætning. (Pas på! Der er negativt fortegn på!)

Vi kigger nu på det andet udtryk.

$\dfrac{x^2 + 2\,x}{x+2}$
$= \dfrac{x \cdot (x+2)}{x+2}$
$= \dfrac{x}{1}$
$= x$

Bemærk, at jeg faktoriserede x ud.

Opgave 5

Givet polynomiet
$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 4$
Samt punkterne $A(2;\,0)$ og $B(4;\,0)$ - gå ikke i panik over punkternes navne. Jeg har navngivet dem det.

Metode 1)
Vi bestemmer tallene a og b ved at bruge vores viden om, at når $c = 4$ så er $x = 0$ og dermed kan vi skrive det om til et faktoriseret polynomium:
$P(x) = a \cdot \left(x - r_1\right) \cdot \left(x - r_2\right)$

Vi bruger alle punkterne til at bestemme a.

$4 = a \cdot (0-2) \cdot (0-4) \Leftrightarrow 4 = 8\,a \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Og da vi har a kan vi nu bestemme hele polynomiet.

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2) \cdot (x-4) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 4\,x - 2\,x + 8\right) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4$$

Hermed har vi $a = \dfrac{1}{2}$ og $b = -3$.
Som er det ønskede polynomium, som gennemløber punkterne A og B.

Metode 2)
Vi kan også løse det ved ligningssystemer.

$$\begin{array}{ll}[1] & 0=a\cdot 4^2+b\cdot 4+4 \\ [2] & 0=a\cdot 2^2+b\cdot 2+4\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}0=16\,a+4\,b+4 \\ 0=4\,a+2\,b+4\end{array}$$

Vi isolerer b i ligning [2].

$0=4\,a+2\,b+4 \Leftrightarrow -4\,a-4=2\,b \Leftrightarrow b=-2\,a-2$ som vi indsætter i [1] og får:

$$0=16\,a+4\cdot(-2\,a-2)+4 \Leftrightarrow 0=16\,a-8\,a-8+4 \Leftrightarrow 0=8\,a-4 \Leftrightarrow 8\,a=4 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Denne værdi af a indsættes i [2] og vi får:

$$0=4\cdot\frac{1}{2}+2\,b+4 \Leftrightarrow 0=6+2\,b \Leftrightarrow -6=2\,b \Leftrightarrow b=-3$$

Og vi kan slutte, at forskriften er:

$$P(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-3\cdot x+4$$

Metode 3)

$$\begin{array}{ll}[1] & 0=a\cdot 4^2+b\cdot 4+4 \\ [2] & 0=a\cdot 2^2+b\cdot 2+4\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}0=16\,a+4\,b+4 \\ 0=4\,a+2\,b+4\end{array}$$

Vi ganger ligning [2] med -2 og får:

$$\begin{array}{ll}[1] & 0=16\,a+4\,b+4 \\ [2] & 0=4\,a+2\,b+4\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}0=16\,a+4\,b+4 \\ 2\cdot 0=2\cdot 4\,a+2\cdot 2\,b+2\cdot 4\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}0=16\,a+4\,b+4 \\ 0=8\,a+4\,b+8\end{array}$$

Ved at trække ligningerne fra hinanden fås:

$$0-0=(16\,a-8\,a)+(4\,b-4\,b)+(4-8) \Leftrightarrow 0=8\,a-4 \Leftrightarrow 4=8\,a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Af denne værdi af $a=\frac{1}{2}$ indsætter vi blot i enten [1] eller [2], man vælger selv. Vi tager [1] og får:

$$0=16\cdot\frac{1}{2}+4\,b+4 \Leftrightarrow 0=12+4\,b \Leftrightarrow -12=4\,b \Leftrightarrow b=-3$$

Og vi kan slutte, at forskriften er:

$$P(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-3\cdot x+4$$

Opgave 6

Betragt integralet:

$$I=\int_0^1 \frac{2\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Vi lader t være x^2+1, dvs. $t=x^2+1$, så er $dt=2\,x\,dx$ hvorfor $dx=\frac{1}{2\,x}dt$, så vi har integralet:

$$I=\int_0^1 \frac{2\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{2\,x}{t}\cdot\frac{1}{2\,x}dt=\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt=[\ln|t|]_0^1=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\ln\left(1^2+1\right)-\ln\left(0^2+1\right)$$
$$=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

Dermed fik vi bestemt integralet.

Vi kan også gøre det sådan:

$$I=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\frac{d(x^2+1)}{2x}=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1=\ln(2)-\ln(1)$$
$$=\ln(2)$$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi definerer tabellens oplysninger.

$P1 := [26, 33, 37, 46, 55, 65]$:

$P2 := [47, 51, 54, 57, 61, 65]$:

Vi laver nu potensregression via Maple.

$f(x) := PowReg(P1, P2, x)$:

$f(x)$

$$15.1390265406370\, x^{0.348393566894605} \quad \textbf{(7.1.1)}$$

Hvor $f(x)$ beskriver radius i nedslagskrateret i mm, og x beskriver nedslagsenergien, målt i *mJ.*

Tallene a og b er bestemt til følgende:

$a = 0.348393566894605$

$b = 15.1390265406370$

Spgm. b

Vi løser ligningen:

$f(x) = 48$

$$15.1390265406370\, x^{0.348393566894605} = 48 \quad \textbf{(7.2.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 27.44353981]] \quad \textbf{(7.2.2)}$$

Vi kan også pr. håndkraft (mat C niveau!):

$$15.1390265406370\, x^{0.348393566894605} = 48 \Leftrightarrow x^{0.348393566894605} = \frac{48}{15.1390265406370} \Leftrightarrow x$$
$$= \sqrt[0.348393566894605]{\frac{48}{15.1390265406370}} = 27.44353982$$

Dvs. ved en radius på 48mm får man energinedslaget på 27.443 *mJ.*

Spgm. c

Hvis nedslagsenergien øges med 40 %, som faktisk er r_x, så skal vi bestemmer $r_{f(x)}$, det gør vi ved formlen:

$F_y = F_x^a$, dvs. $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$, og vi får ligningen:

$\left(1+r_y\right)=\left(1+\frac{40}{100}\right)^{0.348393566894605} \xrightarrow{\text{solve for r[y]}} [[r_y=0.1243721180]]$

Ganges med 100% og vi får 12.44 % dvs. hvis nedslagsenergien øges med 40%, så øges krateret med 12.44%

Hvis man brugte Magic-paper formlen fra hjemmesiden har man:

$r_y=\left(\left(1+\frac{40}{100}\right)^{0.348393566894605}-1\right)\cdot 100$

$$r_y=12.43721180 \tag{7.3.1}$$

Hvis nedslagsenergien øges med 40%, så øges krateret med 12.44%

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

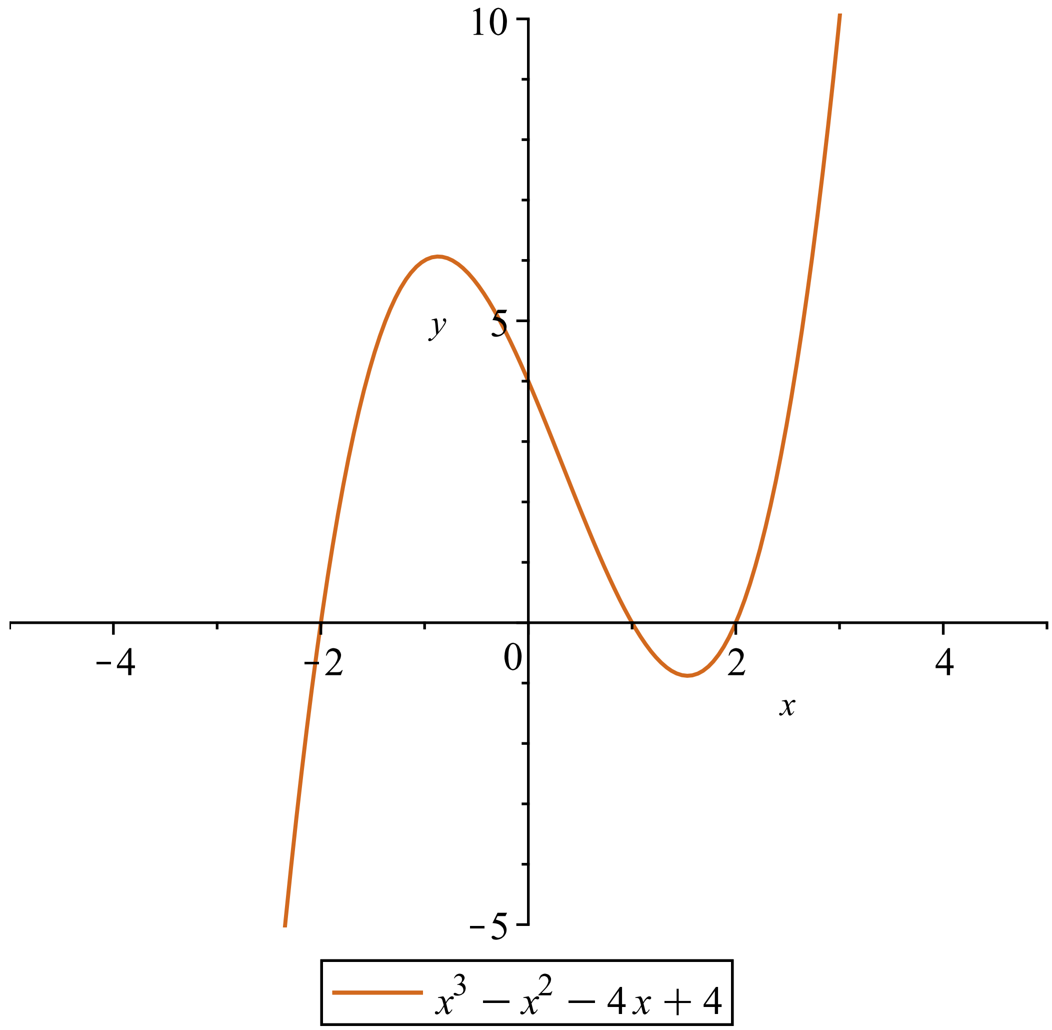
Spgm. a

Vi definerer funktionen.

$f(x) := x^3-x^2-4x+4$:

Vi tegner grafen for $f(x)$ via plot funktionen

plot($f(x)$, x=-5 ..5, y=-5 ..10, *legend* = [$f(x)$], *color* = ["Chocolate"])



Vi kan nu aflæse nulpunkterne til at være:
$x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$ og vi tjekker om det passer:
$f(-2)$

$$0 \tag{8.1.1}$$

$f(1)$

$$0 \tag{8.1.2}$$

$f(2)$

$$0 \tag{8.1.3}$$

Alternativt kunne vi løse ligningen:
$f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{8.1.4}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = 2], [x = -2]] \tag{8.1.5}$$

Vi kan slutte, at koordinatsættene er:
$A(-2; 0)$, $B(1; 0)$ og $C(2; 0)$.

Spgm. b

Vi bestemmer en ligning til tangenten i punktet $P(3, f(3))$, dvs.
$f(3)$

$$10 \tag{8.2.1}$$

$f'(3)$

$$17 \tag{8.2.2}$$

Tangentens ligning er pr. definition: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, så vi indsætter og får:

$y = 17 \cdot (x - 3) + 10$

$$y = 17\,x - 41 \tag{8.2.3}$$

Da vi jo har defineret hele pivtøjet i Maple, dvs. funktionen, så kan vi blot skrive punktet direkte ind i tangentligningen, dvs.:

$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = 17\,x - 41 \tag{8.2.4}$$

Dermed fandt vi en tangentligning i punktet $P(3; 10)$.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi får oplyst arealet, som er $T = 30$. Endvidere ved vi, at $|AB| = 7$ og $|AC| = 10$, og vinkel A er spids. Vi kan derfor bestemme vinkel A ved at bruge ½-appelsinformlen.

$30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot Sin(A)$

$$30 = 35 \sin(0.01745329252\,A) \tag{9.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for A}}$

$$[[A = 58.99728087]] \tag{9.1.2}$$

Vi har dermed fundet vinkel A som tydeligvis er spids.

Spgm. b

Da vi har vinkel A så kan vi bestemme $|BC|$ ved hjælp af cosinusrelationerne.

$|BC| = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot Cos(58.99728087)}$

$$|BC| = 8.768635841 \tag{9.2.1}$$

Omkredsen af trekanten ABC er hermed:

$\mathrm{O}_{ABC} = 7 + 10 + 8.768635841$

$$\mathrm{O}_{ABC} = 25.76863584 \tag{9.2.2}$$

Hvilket er det ønskede.

Vi kunne også bruge trekantsolve, da vi har rigeligt med oplysninger.

trekantsolve$(c = 7, b = 10, A = 58.99728087)$

$$\{B = 77.82552079, C = 43.17719831, a = 8.768635842\} \tag{9.2.3}$$

Her svarer a til $|BC|$, så omkredsen kan bestemmes, hvilket vi har bestemt.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Nulhypotesen er:

$H_0 = \textit{Artsfordelingerne er uafhængige af habiaterne.}$

Vi kan bruge gym-pakken til at løse denne opgave på ingen tid, men det er meget godt at vide, hvordan man kan løse denne type opgave.
Vi bestemmer de forventede værdier, men først indskrives tabellen:

Observerende	Græshoppeart 1	Græshoppeart 2	Sum
Habiat 1	345	112	457
Habiat 2	410	96	506
Sum	755	208	963

De forventede værdier er:

$$Habiat_1\ græs_1 = \frac{457}{963} \cdot 755 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} Habiat_1\ græs_1 = 358.29$$

$$Habiat_2\ græs_1 = \frac{506}{963} \cdot 755 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} Habiat_2\ græs_1 = 396.71$$

$$Habiat_1\ græs_2 = \frac{457}{963} \cdot 208 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} Habiat_1\ græs_2 = 98.708$$

$$Habiat_2\ græs_2 = \frac{506}{963} \cdot 208 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} Habiat_2\ græs_2 = 109.29$$

Skemaet er:

Forventet	Græshoppeart 1	Græshoppeart 2	Sum
Habiat 1	358	99	457
Habiat 2	397	109	506
Sum	755	208	963

Vi kan nu besteme vores teststørrelse ved formlen:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \frac{(O_2 - F_2)^2}{F_2} + \ldots + \frac{(O_n - F_n)^2}{F_n}$$

vi indsætter og får:

$$\chi^2 = \frac{(345 - 358.29)^2}{358.29} + \frac{(410 - 396.71)^2}{396.71} + \frac{(112 - 98.708)^2}{98.708} + \frac{(96 - 109.29)^2}{109.29}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \chi^2 = 4.3442$$

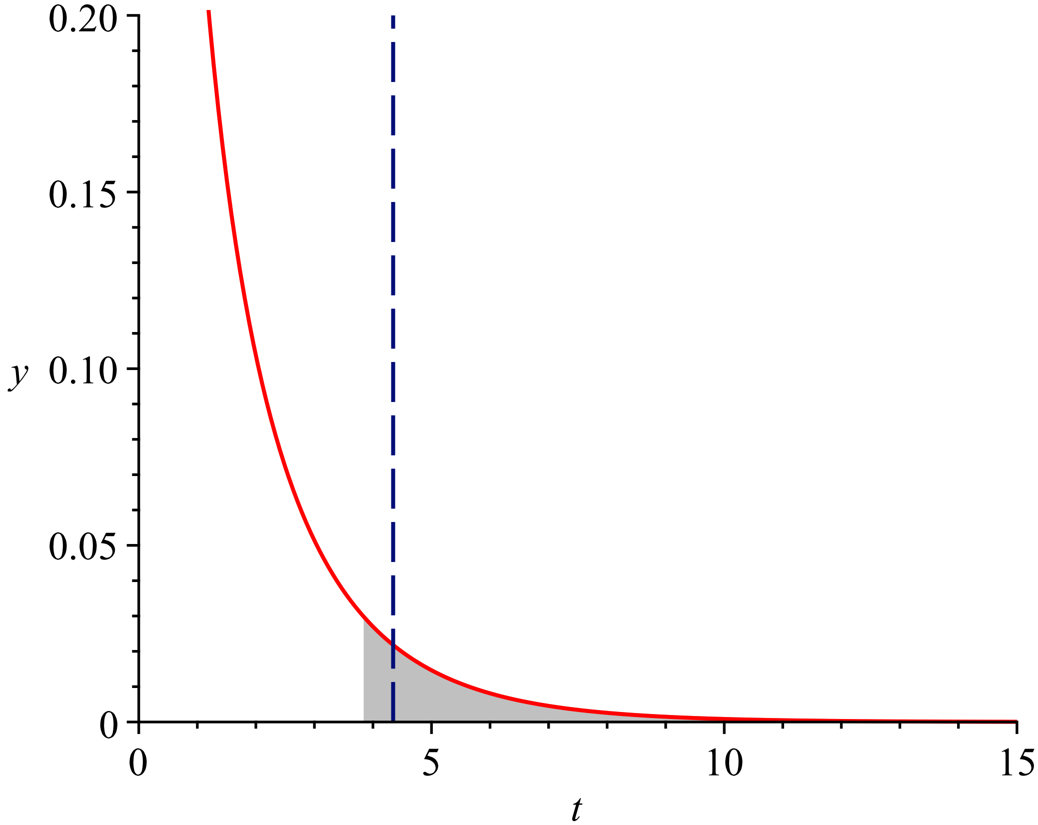
Og inden vi konkluderer, så bruger vi Maple. (det gør det også hurtigere).
$obs := \langle\langle 345, 410 | 112, 96\rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} 345 & 112 \\ 410 & 96 \end{bmatrix} \tag{10.1.1}$$

Og ved et 5% signifikans laver vi en U-test.

ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)

χ^2-teststørrelse = 4.3448
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.037122



Da vores p-værdi er 3.7% og dermed mindre end 5%, så kan vi slutte, at nulhypotesen skal forkastes. Vi har en signifikant forskel på artsfordelingerne af habitaterne.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :**local** O :
Hele pivtøjet defineres.
$O := [0, 0, 0] :; A := [14, 0, 24] :; B := [0, 10, 20] :$

Spgm. a

Arealet af glasfladen *OAB* bestemmes. Vi opstiller to vektorer.

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1)}$$

$\overrightarrow{AO} := \langle O - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} \quad (11.1.2)$$

Vi laver et krydsprodukt. Man kan bruge gym pakken, som vi viser:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}$

$$\begin{bmatrix} -240 \\ -280 \\ 140 \end{bmatrix} \quad (11.1.3)$$

Dermed har vi en normalvektor til en evt. plan, dvs. normalvektoren står vinkelret på den evt. plan.

Hvis man derimod skal læse videre på uni, så kan man bruge pakken:
$with(LinearAlgebra)$ og derfra bruge kommandoen:
$CrossProduct\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$

$$\begin{bmatrix} -240 \\ -280 \\ 140 \end{bmatrix} \quad (11.1.4)$$

Og vi får det samme.

Arealet bestemmes via formlen:
$T = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}\right|$, så vi har:

$T = \frac{1}{2} \cdot \left|\sqrt{(-240)^2 + (-280)^2 + 140^2}\right|$

$$T = 10\sqrt{389} \quad (11.1.5)$$

$evalf[5]($**(11.1.5)**$)$

$$T = 197.23 \quad (11.1.6)$$

Arealet af glasfladen OAB er 197.23 dm^2.

Spgm. b

Vi bestemmer en parameterfremstilling. Vi lader O være et fast punkt og vektor $\overrightarrow{OB}$ være retningsvektor, vi får:

$\overrightarrow{OB} := \langle B - O \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (11.2.1)$$

Da er parameterfremstillingen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10\,t \\ 20\,t \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.2.2)}$$

Man kunne også lade B være et fast punkt og få:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 + 10\,t \\ 20 + 20\,t \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.2.3)}$$

Det er der intet ulovligt i. Bemærk, at parameterfremstillingen er for l.

Spgm. c

Vi bestemmer den spidse vinkel mellem parameterfremstillingen og $xy - planen$. ($z = 0$). Så vi skal faktisk bruge normalvektoren til planen, og den er:

$\overrightarrow{n_{xy-planen}} := \langle 0, 0, 1 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.3.1)}$$

Man kan derfor bruge vinklen mellem retningsvektoren og normalvektoren, som er:

$\overrightarrow{OB} =$ retningsvektor

$\overrightarrow{n_{xy-planen}} =$ normalvektor

Vi får:

$$w := invCos\left(\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{n_{xy-planen}}}{len\left(\overrightarrow{OB}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{xy-planen}}\right)}\right)$$

$$26.56505120 \qquad \textbf{(11.3.2)}$$

Men dette er jo fra normalvektoren, så vinklen mellem parameterfremstillingen og planen er:

$v = 90 - w$

$$v = 63.43494880 \qquad \textbf{(11.3.3)}$$

Og dermed er det den ønskede spidse vinkel mellem parameterfremstillingen l og planen $z = 0$.

Man kan også gøre det ved kommandoen "*vinkel*", som vises.

$v = 90 - vinkel\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{n_{xy-planen}}\right)$

$$v = 63.43494880 \qquad \textbf{(11.3.4)}$$

Eller hvis man gerne vil gøre det pr. håndkraft:

$v = 90 - invCos\left(\frac{0\cdot 0 + 10\cdot 0 + 20\cdot 1}{\sqrt{0^2 + 10^2 + 20^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}\right)$

$$v = 63.43494880 \qquad \textbf{(11.3.5)}$$

Hvor *invCos* er den inverse cosinus.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet differentialligningen:

$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259\cdot(T - 22)$ vi omskriver den, så vi senere kan bruge *dsolve.*

$T'(x) = 1.54 - 0.259\cdot(T(x) - 22).$

Vi bestemmer nu væksthastigheden $T'(x)$ når temperaturen er $26^o C$, så:

$T'(x) = 1.54 - 0.259\cdot(26 - 22)$

$$\frac{d}{dx}\, T(x) = 0.504 \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

Dvs. for hver time der går, stiger temperaturen med $0.504^o C$ når temperaturen har passeret $26^o C$.

NB: Man kan også vise det ved at finde $T(x)$ og bestemme væksthastigheden. (vises efter spgm. b).

Spgm. b

Vi bestemmer $T(x)$. Vi bruger vores "begyndelsespunkt" som er $T(0) = 22$, så den partikulære løsning bestemmes.

dsolve$(\{T'(x) = 1.54 - 0.259\cdot(T(x) - 22), T(0) = 22\}, T(x))$

$$T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220}{37}\,e^{-\frac{259}{1000}x} \qquad \textbf{(12.2.1)}$$

Hvis man dog har problemer med *dsolve*, så kan man højreklikke ved diff ligningen og finde "Solve DE".

$T'(x) = 1.54 - 0.259\cdot(T(x) - 22) \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = \frac{1034}{37} + e^{-\frac{259}{1000}x}\,\_C1$

Hvor $\_C1$ er en konstant (som vi jo kender som *c* eller *k*).

Vi bruger punktet $T(0) = 22$, så:

$22 = \frac{1034}{37} + e^{-\frac{259}{1000}\cdot 0}\,\_C1 \xrightarrow{\text{solve for \_C1}} \left[\left[\_C1 = -\frac{220}{37}\right]\right]$

Indsætter vi denne værdi i den fuldstændige løsning, fås den partikulære løsning:

$T(x) := \frac{1034}{37} + e^{-\frac{259}{1000}x} \cdot \left(-\frac{220}{37}\right)$

$$x \rightarrow \frac{1034}{37} - \frac{220}{37} e^{-\frac{259}{1000}x} \quad \textbf{(12.2.2)}$$

Og vi fik det samme som var det *dsolve*. Vi løser ligningen:
$T(x) = 27$

$$\frac{1034}{37} - \frac{220}{37} e^{-\frac{259}{1000}x} = 27 \quad \textbf{(12.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{1000}{259} \ln\left(\frac{7}{44}\right)\right]\right] \quad \textbf{(12.2.4)}$$

evalf[5]((**12.2.4**))

$$[[x = 7.0977]] \quad \textbf{(12.2.5)}$$

Så der skal gå omtrent ca. 7 timer fra opvarmning til, at man kan lade fisken komme ud i akvariet, for der vil temperaturen være $27^{o}C$.

Fra første del kan vi også bestemme væksthastigheden på denne måde:
$26 = T(x)$

$$26 = \frac{1034}{37} - \frac{220}{37} e^{-\frac{259}{1000}x} \quad \textbf{(12.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{1000}{259} \ln\left(\frac{18}{55}\right)\right]\right] \quad \textbf{(12.2)}$$

evalf[5]((**12.2**))

$$[[x = 4.3127]] \quad \textbf{(12.3)}$$

Dvs. ifølge ovenstående resultat, vil der gå ca. 4.3127 timer før, at temperaturen er 26, dvs. denne x-værdi indsættes i $T'(x)$ og vi får:
$T'(4.3127)$

$$0.5039859523 \quad \textbf{(12.4)}$$

evalf[3]((**12.4**))

$$0.504 \quad \textbf{(12.5)}$$

Som vi også fik i opgave a.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Funktionerne defineres.

$f(x) := 2 \cdot 0.5^{x}$:; $g(x) := 4$:

Vi løser ligningen

$f(x) = g(x)$

$$2\ 0.5^x = 4 \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -1.]] \tag{13.1.2}$$

Arealet af M afgrænses af $x = 1$ og $x = 0$ (dvs. y-aksen).

Arealet af M er så:

$M = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\, \mathrm{d}x$

$$M = 1.114609918 \tag{13.1.3}$$

Fordi $g(x)$ ligger OVER $f(x)$, så derfor er det vores ønskede areal.

Spgm. b

Arealet af M er:
$M = 1.114609918$ og det er også dette areal vi ønsker for N, så det kræver vi får den rigtige værdi af k, hvor $k > 0$, så ligningen bliver:

$1.114609918 = \int_{0}^{k} f(x)\, \mathrm{d}x$

$$1.114609918 = 2.885390082 - 2.885390082\ 2.^{-1.k} \tag{13.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 0.7043812553]] \tag{13.2.2}$$

Dvs. for $k = 0.7043812553$ vil vi få et areal N, som er lige så stort som M, dvs. $M = N$. Vi gør prøve.

$N = \int_{0}^{0.7043812553} f(x)\, \mathrm{d}x$

$$N = 1.114609918 \tag{13.2.3}$$

og vi får det samme tal. Arealet af M og N er lige store når $k = 0.7043812553$.

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi får oplyst to støttepunkter. Vi kan lave regression men da vi kun har to støttepunkter, så bruger vi formlerne for a og b.
$A(0; 721)$ og $B(32; 967)$
Så vi bestemmer en eksponentiel forskrift. Vi definerer punkterne.
$t_1 := 0$:; $t_2 := 32$:; $y_1 := 721.$:; $y_2 := 967$:

$a := \sqrt[t_2 - t_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$

$$1.009215938 \tag{14.1.1}$$

$b := \dfrac{y_1}{a^{t_1}}$

$$721.0000000 \quad (14.1.2)$$

$f(t) := b \cdot a^t$

$$t \rightarrow b\, a^t \quad (14.1.3)$$

$f(t)$

$$721.0000000\ 1.009215938^t \quad (14.1.4)$$

Så dermed fandt vi en funktionsforskrift, der beskriver antallet af rygere efter år 1980 på globalt plan.

Spgm. b

Vi definerer modellen der beskriver befolkningen i verden.

$N(t) := \dfrac{12245}{1 + 1.74 \cdot \exp(-0.0273 \cdot t)}$

$$t \rightarrow \frac{12245}{1 + 1.74\, e^{(-1) \cdot 0.0273\, t}} \quad (14.2.1)$$

Vi bruger ovenstående model til at opstille en ny model over andelen af rygere. Modellen er:

$g(t) := \dfrac{f(t)}{N(t)}$

$$t \rightarrow \frac{f(t)}{N(t)} \quad (14.2.2)$$

$g(t)$

$$0.05888117599\ 1.009215938^t \left(1 + 1.74\, e^{-0.0273\, t}\right) \quad (14.2.3)$$

$g'(t) = 0$

$$0.0005401600322\ 1.009215938^t \left(1 + 1.74\, e^{-0.0273\, t}\right) - 0.002796973622\ 1.009215938^t\, e^{-0.0273\, t} = 0 \quad (14.2.4)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 45.23455515]] \quad (14.2.5)$$

Vi undersøger om dette er et minimum.

$g''(45.23455515)$

$$0.00002233079096 \quad (14.2.6)$$

Da outputtet er positivt, så følger det at vi har et minimum. Dvs. i år 2025 er andelen af rygere på globalt plan mindst.

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) : **local** D

Vi får givet nogle mål, som vi definerer.

$AC := 340 :$
$CF := 340 :$
$AB := 210 :$
$BG := 210 :$
$DF := 210 :$

Bemærk, at Maple IKKE kan lide "|" symbolet når man definerer noget, derfor bruger vi det ikke, men man skal forestille sig, at de er der!

Spgm. a

Vi definerer vinkel C,
$C := 33$:

Her svarer vinkel C også til B og D, så:
$B := 33$:; $D := 33$:

Vi bruger cosinusrelationerne.

$$AG := \sqrt{AB^2 + BG^2 - 2 \cdot AB \cdot BG \cdot Cos(B)}$$

$$119.2864447 \quad (15.1.1)$$

Længden $|AG|$ er 119.286 mm.

Vi gør tilsvarende med AF, så:

$$AF := \sqrt{AC^2 + CF^2 - 2 \cdot AC \cdot CF \cdot Cos(C)}$$

$$193.1304344 \quad (15.1.2)$$

Længden $|AF|$ er 193.130 mm.

Det gyldne forhold er $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ vi prøver at finde det gyldne forhold.

$$evalf[3]\left(\frac{AF}{AG}\right)$$

$$1.62 \quad (15.1.3)$$

Og dermed med 2 decimaler kan man slutte, at det gyldne forhold og $\frac{|AF|}{|AG|}$ passer meget godt.

Spgm. b

Vi har vinkel ABG og ACF hvor $ABG = ACF$. Vi ved, at trekanterne ABG samt ACF begge har vinkel A (se figur), så vil det sige, at trekanterne er ensvinklede. Med andre ord vil vi kunne finde forstørrelsesfaktoren mellem dem og få det gyldne forhold, dvs.

$$\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|DF|} = \frac{340}{210} \approx 1.62$$

Med andre ord, så har vinkel C altså ingen rolle i denne sammenhæng, men derimod længden af linjestykkerne, der gør, at forholdet er uafhængigt alt efter indstillingen af værktøjet.

Matematik A STX 23. maj 2017
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet parablen
$y = 2x^2 - 4x + 3$

Vi bestemmer koordinatsættet på to måder.

Metode 1)
Vi bruger formlerne for toppunktet, dvs.
$T_x = -\frac{b}{2a}$; $T_y = \frac{-d}{4a}$ og vi får:

$T_x = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$
$d = b^2 - 4ac$, så $(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8$
$T_y = \frac{-(-8)}{4 \cdot 2} = \frac{8}{8} = 1$

Koordinatsættet er $T(1; 1)$

Metode 2)
Vi differentierer parablen og får:
$y' = 4x - 4$ og sætter vi $y' = 0$ får vi $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ og denne værdi indsættes i y så:
$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2 - 4 + 3 = -2 + 3 = 1$

Koordinatsættet er $T(1; 1)$

Opgave 2

Givet to vektorer
$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ t \end{bmatrix}$ vi skal finde tallet t, således at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$2 \cdot 6 + 3 \cdot t = 0 \Leftrightarrow 12 + 3t = 0 \Leftrightarrow 12 = -3t \Leftrightarrow t = \frac{12}{-3} = -4$

Dvs. for $t = -4$ har man, at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Opgave 3

Givet to trekanter ABC og DEF, så først bestemmer vi $|BC|$.
$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ så:
$|BC| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$

Størrelsesforholdene mellem trekanterne bestemmes.
$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

Så bestemmes $|EF|$,

$|EF| = |BC| \cdot k = 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5$
Som er den ønskede længde.

Opgave 4

Givet funktionen $f(x) = 3x^2 + 4x$. Vi bestemmer stamfunktionen i punktet $P(2; 4)$.
$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1} + 4\cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1} + k = x^3 + 2x^2 + k$ hvor $k \in \mathbb{R}$.
Vi indsætter punktet P i $F(x)$ og løser k.
$4 = 2^3 + 2\cdot 2^2 + k \Leftrightarrow 4 = 16 + k \Leftrightarrow k = -12$ så forskriften er:
$F(x) = x^3 + 2x^2 - 12$

Hvilket er den ønskede stamfunktion.

Opgave 5

Givet ligningen for cirklen i planen.
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 - 13 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$
Dermed er koordinatsættet til centrum:
$C(2;-3)$ og radius er $r = 1$

Opgave 6

Givet differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = 3x + 2y$$

Vi bestemmer tangenten for f i punktet $P(1, f(1))$. Vi ved, at hældningskoefficienten er 9. $\frac{dy}{dx}$ er $f'(x)$ og da hældningstallet er 9, så kan vi erstatte $f'(x)$ med 9 og vi får:
$9 = 3\cdot x + 2\cdot y$, vi udnytter nu punktet P, så:
$9 = 3\cdot 1 + 2\cdot y \Leftrightarrow 9 = 3 + 2\cdot y \Leftrightarrow 6 = 2\cdot y \Leftrightarrow y = 3$, så vi bestemmer tangenten i punktet $P(1; 3)$ og får:
$y = (3\cdot 1 + 2\cdot 3)\cdot(x-1) + 3 = 9\cdot(x-1) + 3 = 9x - 9 + 3 = 9x - 6$ så tangenten er:
$y = 9x - 6$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :
Givet tabellen med oplysninger. Vi definerer oplysningerne.
$E1 := [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28]$:
$E2 := [278, 206, 138, 110, 81, 58, 49, 32]$:

Spgm. a

Vi udfører eksponentiel regression hvor vi bestemmer tallene a og b samt en forskrift. Dvs.:
$C(t) := ExpReg(E1, E2, t)$:

$C(t)$

$$270.505047229079\ 0.927688433385637^{t} \quad \mathbf{(22.1.1)}$$

Hvor $C(t)$ beskriver koncentrationen af pesticidet i søen målt i ppm, og t angiver tiden, målt i døgn efter første måling.

Tallene a og b er bestemt til følgende:
$a = 0.927688433385637$
$b = 270.505047229079$

Spgm. b

Vi løser ligningen
$C(t) = 5$

$$270.505047229079\ 0.927688433385637^{t} = 5 \quad \mathbf{(22.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 53.16930197]] \quad \mathbf{(22.2.2)}$$

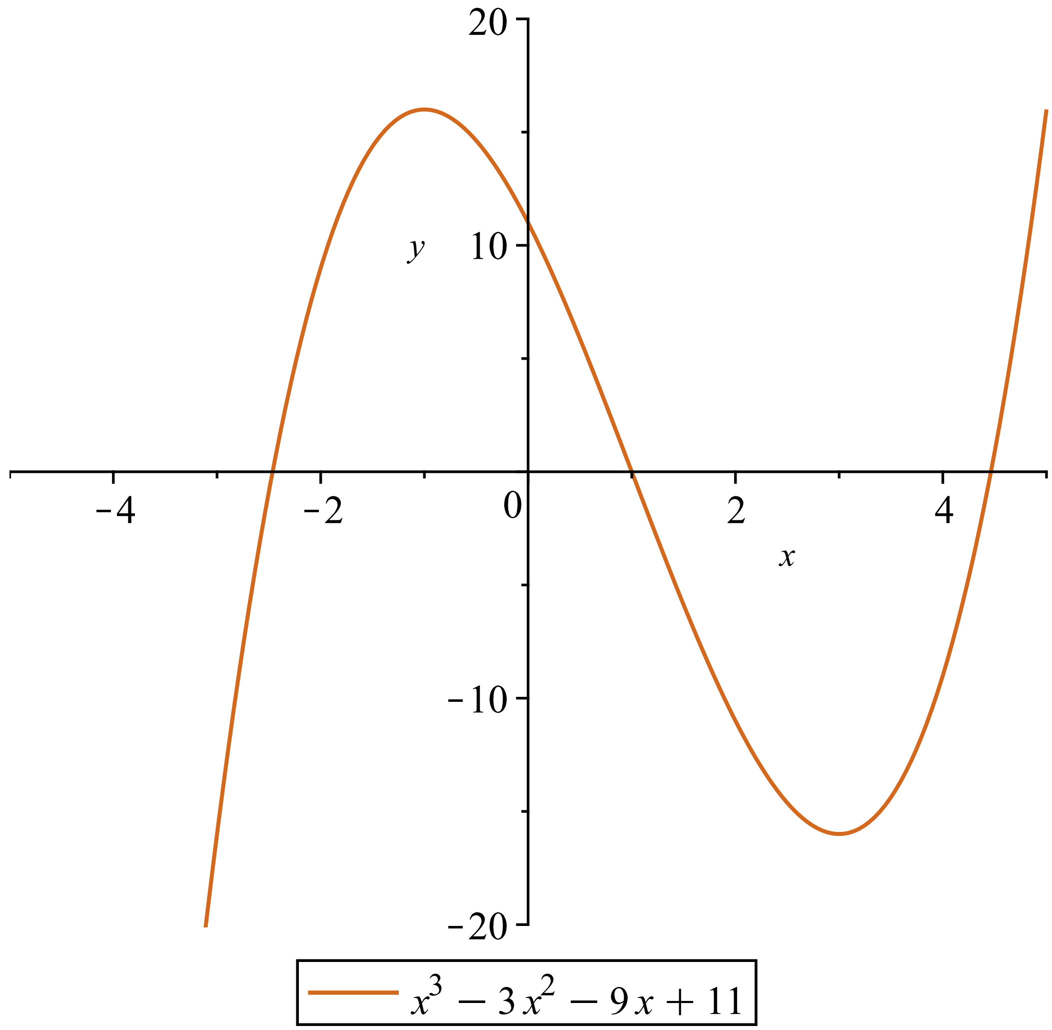
Dvs. der skal gå ca. 53 døgn før, at man kan bade i søen.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi definerer den oplyste funktion:
$f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11$:
Vi tegner grafen for $f(x)$ via plot funktionen
plot($f(x)$, $x = -5..5$, $y = -20..20$, *legend* = [$f(x)$], *color* = ["Chocolate"])



Da det ikke er nemt at aflæse nulpunkterne, så løser vi ligningen:
$f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \tag{23.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = 1 - 2\sqrt{3}], [x = 1 + 2\sqrt{3}]] \tag{23.1.2}$$

Vi kan slutte, at koordinatsættene er:
$A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$, $B(1; 0)$ og $C(1 + 2\sqrt{3}; 0)$.

Spgm. b

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$, så vi løser ligningen $f'(x) = 0$ og får:
$f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \tag{23.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 3], [x = -1]] \tag{23.2.2}$$

Vi får rødderne:
$x = -1 \vee x = 3$.

Da vi har løst ligningen kan vi nu bruge to metoder til bestemmelse af monotoniforhold.

Metode 1)

Da vi har rødderne $x=-1 \vee x=3$ så kan vi finde tal forskelligt fra rødderne, og disse kan være $-2; 0; 4$ så vi indsætter i $f'(x)$.

$f'(-2)$

$$15 \tag{23.2.3}$$

$f'(0)$

$$-9 \tag{23.2.4}$$

$f'(4)$

$$15 \tag{23.2.5}$$

Vi kan nu lave monotoniskema:

x	-1 3
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$f(x)$	↗ ↘ ↗

Og vi kan slutte, at:

$f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; 1]$ og $[3; \infty[$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $[-1; 3]$

Metode 2)

Vi bruger rødderne i den dobbelte afledede funktion.

$f''(-1)$

$$-12 \tag{23.2.6}$$

og da outputtet er negativt for $x=-1$, dvs. $-12 < 0$, så har vi et lokalt maksimum.

$f''(3)$

$$12 \tag{23.2.7}$$

og da outputtet er positivt for $x=1$, dvs. $12 < 0$, så har vi et lokalt minimum.

Og da $x=-1$ kommer før $x=3$ så følger det, at vi har:

$f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; 1]$ og $[3; \infty[$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $[-1; 3]$

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet funktionerne:

$f(x) := 0.25 \cdot \sqrt{9-16x^2}$: afgrænset i $-0.75 \leq x \leq 0$

$g(x) := -0.055 \cdot x + 0.75$: afgrænset i $0 \leq x \leq 11$

Da vi har symbolerne "mindre eller lig med" og "større eller lig med" så kan vi sagtens få to ens sande udtryk, dvs.

$f(0)$

$$0.75 \tag{24.1.1}$$

$g(0)$

$$0.75 \quad \textbf{(24.1.2)}$$

Og de vil være identiske på begge sider af lighedstegnet. Vi bestemmer dernæst arealet af *M*.

$$M = \int_{-0.75}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{11} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M = 5.364286467 \quad \textbf{(24.1.3)}$$

Arealet af M er bestemt til 5.364286467.

Spgm. b

Vi bruger omdrejningslegemer og får:

$$V = \pi \cdot \int_{-0.75}^{0} (f(x))^2\,\mathrm{d}x + \pi \cdot \int_{0}^{11} (g(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$V = 8.858008468 \quad \textbf{(24.2.1)}$$

Volumen af skulpturen er $8.858\ m^3$

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet trekanten *ABC*. Vi bestemmer x ved at udnytte vinklen, de to sidelængder $|AB| = x$ og $|AC| = 2\,x$ samt oplysningen om $|BC| = 5$, vi bruger cosinusrelationerne.

$$5 = \sqrt{x^2 + (2\,x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2\,x \cdot Cos(35)}$$

$$5 = 1.312780188\,\sqrt{x^2} \quad \textbf{(25.1.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$3.808710739 \quad \textbf{(25.1.2)}$$

Vi tog den numeriske værdi da den negative ikke vil give mening, så for $|BC| = 5$ får man $|AB| = 3.808710739$ og $|AC| = 3.808710739 \cdot 2 = 7.617421478$

Spgm. b

Vi bruger ½-appelsinformlen og får:

$$20 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2\,x \cdot Sin(35)$$

$$20 = 0.5735764363\,x^2 \quad \textbf{(25.2.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = -5.904992457], [x = 5.904992457]] \quad \textbf{(25.2.2)}$$

Så for at få et areal på 20, så skal $x = 5.904992457$ og $2\,x = 5.904992457 \cdot 2 = 11.80998491$

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Nulhypotese: Der er uafhængighed mellem kæledyr og antal hjemmeboende børn i husstanden.

Vi bestemmer de forventede værdier ved at bestemme dem i tabellen:

Observerende	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr	Sum
Ingen hjemmeboende børn	133	202	335
Et hjemmeboende barn	24	28	52
To eller flere hjemmeboende børn.	46	37	83
Sum	203	267	470

Forventede	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr	Sum
Ingen hjemmeboende børn	$\frac{203}{470} \cdot 335 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 144.69	$\frac{267}{470} \cdot 335 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 190.31	335
Et hjemmeboende barn	$\frac{203}{470} \cdot 52 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 22.460	$\frac{267}{470} \cdot 52 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 29.540	52
To eller flere hjemmeboende børn.	$\frac{203}{470} \cdot 83 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 35.849	$\frac{267}{470} \cdot 83 \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 47.151	83
Sum	203	267	470

Dermed fandt vi de forventede værdier via formlen:

$$forv = \frac{vandret\ sum}{sum} \cdot lodret\ sum$$

Spgm. b

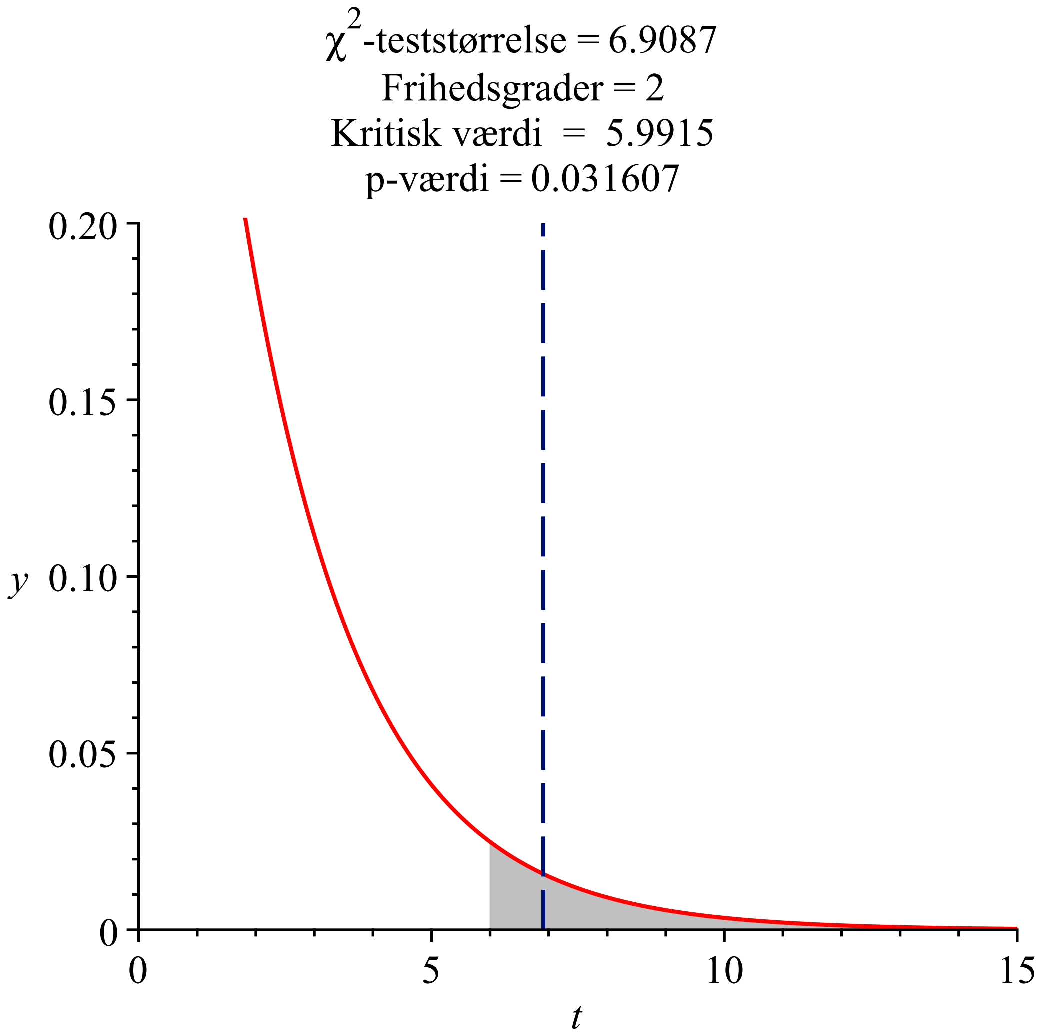
Vi definerer oplysningerne i en matrix og bruger Maple til at finde teststørrelsen og p-værdien.

$obs := \langle \langle 133, 24, 46 | 202, 28, 37 \rangle \rangle$

$$\begin{bmatrix} 133 & 202 \\ 24 & 28 \\ 46 & 37 \end{bmatrix} \quad (26.2.1)$$

Vi laver en U-test med et 5% signifikansniveau, så:

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



Da p-værdien er mindre end de 5% vi testede med, så forkastes nulhypotesen. Der er ingen uafhængighed på, om man har kæledyr og om man vælger at bo hjemme.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet funktionen

$P(x) = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{a}{M}$,

Hvor M er kvindens vægt og a er antal genstande.

Anne vejer 70kg og Bente vejer 50kg. Begge indtager 4 genstande. Vi løser ligningerne:

$0.5 = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{70} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 4.285714286]]$

$0.5 = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{50} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.333333333]]$

Differensen er:

$7.333333333 - 4.285714286$

$$3.047619047 \tag{27.1.1}$$

Dvs. der vil gå ca. 3 timer længere for Bente at nå en promille på 0.5.

Spgm. b

Anne vejer stadig 70kg, og tiden er 3 timer og promillen er 0. Ligningen løses:

$0 = -0.15 \cdot 3 + 20 \cdot \frac{a}{70} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 1.575000000]]$

Dvs. Anne kan kun indtage 1.575 genstande for, at hendes promille er 0 efter 3 timer.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

local D

Warning, A new binding for the name \`D\` has been created. The global instance of this name is still accessible using the :- prefix, :-\`D\`. See ?protect for details.

Punkterne defineres.

$A := [0, 0, 4]$:

$B := [0, 3, 3]$:

$C := [3, 3, 1]$:

Spgm. a

Ligningen for planen α bestemmes.

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{28.1.1}$$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{28.1.2}$$

Vi laver et krydsprodukt og får:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} \tag{28.1.3}$$

Og indsætter vi dette i planens ligning med A som udgangspunkt, så fås:

$-6(x-0) - 3(y-0) - 9(z-4) = 0$

$$-6x - 3y - 9z + 36 = 0 \tag{28.1.4}$$

Ved at dele ligningen med 3 på begge sider af lighedstegnet fås:

$\frac{-6x - 3y - 9z + 36}{3} = \frac{0}{3}$

$$-2x - y - 3z + 12 = 0 \tag{28.1.5}$$

Og ved at rykke 12 på højresiden og gange med -1 fås:
$2x + y + 3z = 12$

$$2x + y + 3z = 12 \tag{28.1.6}$$

Som er ligninge for planen. Vi bestemmer koordinatsætte til D ved at indsætte punktet i planen og isolere z.

$2\cdot 3 + 0 + 3z = 12$

$$6 + 3z = 12 \tag{28.1.7}$$

$\xrightarrow{\text{solve for z}}$

$$[[z = 2]] \tag{28.1.8}$$

Så koordinatsættet til D er:
$D := [3, 0, 2]:$

Spgm. b

xz-planen svarer til en normalvektor $\overrightarrow{n_{xz}} := \langle 0, 1, 0\rangle$:
Normalvektoren til α er $\overrightarrow{n_{\alpha}} := \langle -6, -3, -9\rangle$:

Vinklen mellem de to vektorer er:
$vinkel\left(\overrightarrow{n_{xz}}, \overrightarrow{n_{\alpha}}\right)$

$$105.5013596 \tag{28.2.1}$$

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Teksten aflæses og da proportionalitetskonstanten er 0.025, så må differentialligningen være $f'(t) = 0.025\cdot f(t)$ hvor t er tiden og $f(t)$ er daglige antal solgte kopper kaffe.

Spgm. b

Forskriften bestemmes på baggrund af den oplyste differentialligning. Bemærk, at det er en logistisk ligning, så den fuldstændige løsning er

$N(t) = \dfrac{200}{1 + c\cdot \exp(-0.00017\cdot 200\cdot t)}$

$$N(t) = \frac{200}{1 + c\,e^{-0.03400\,t}} \tag{29.2.1}$$

Vi udnytter oplysningen om at den første dag er $t = 0$ hvor $N(t) = 50$, så:
$50 = \dfrac{200}{1 + c\,e^{-0.03400\cdot 0}} \Leftrightarrow 50 = \dfrac{200}{1 + c} \Leftrightarrow 50\cdot(1 + c) = 200 \Leftrightarrow 1 + c = 4 \Leftrightarrow c = 3$ og indsætter vi denne konstant i den fuldstændige løsning, så har vi en partikulær løsning:

$N(t) := \dfrac{200}{1 + 3\cdot e^{-0.03400\cdot t}}$

$$t \to \frac{200}{1 + 3\,e^{(-1)\cdot 0.03400\,t}} \tag{29.2.2}$$

30 dage efter svarer til $t = 30$ så:

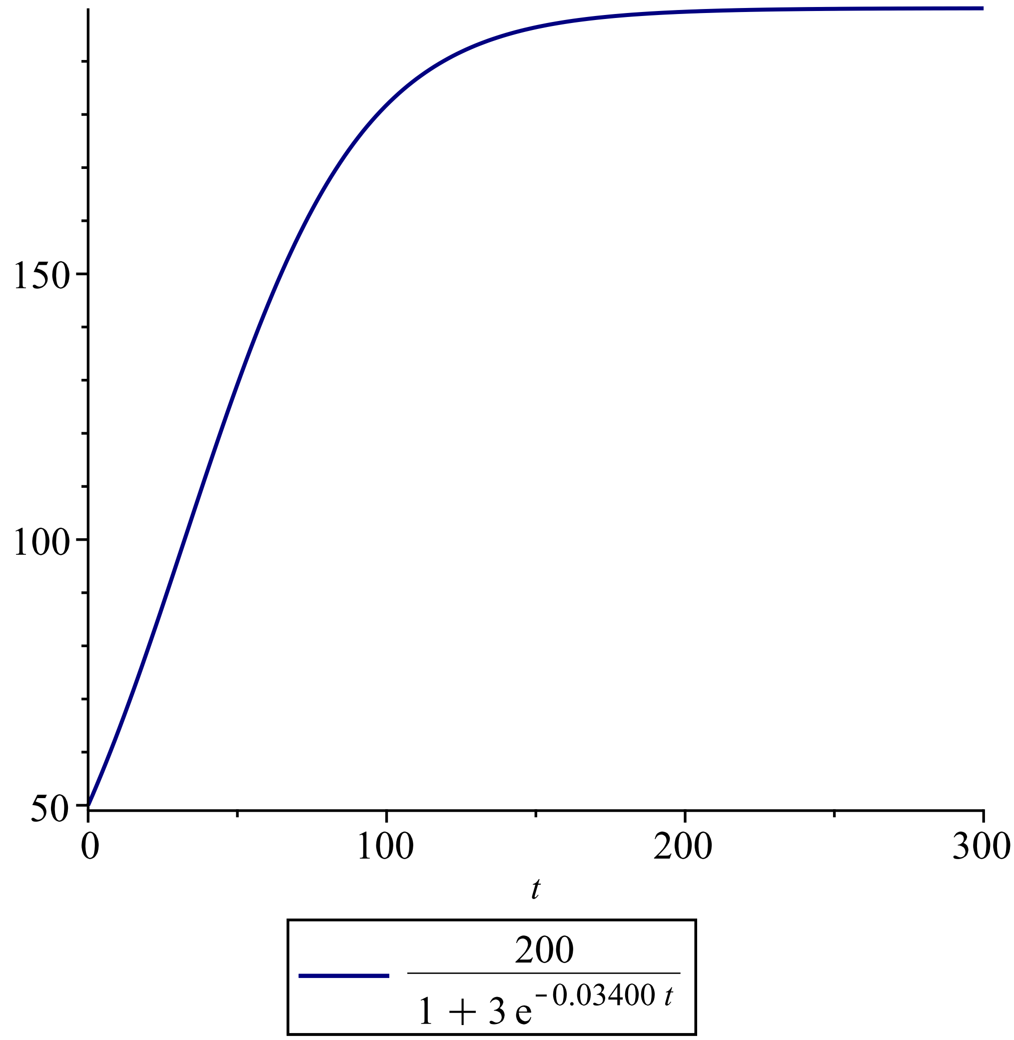
$N(30)$

$$96.07140852 \quad \textbf{(29.2.3)}$$

Dvs. der vil være solgt 96 kopper kaffe.

Spgm. c

Vi laver et plot, fra $t = 0$ til eksempelvis $t = 300$ og får:
plot$(N(t), t = 0..300, legend = [N(t)], color = [\text{"Navy"}])$



Den øvre grænse er 200 eftersom linjen $y = 200$ er asymptote med $N(t)$, vi kan også bestemme den via limit, så:
$\lim_{t \to \infty} (N(t))$

$$200. \quad \textbf{(29.3.1)}$$

Når $t \to \infty$ så går $N(t) \to 200$.

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Arealet for R er:

$A = l \cdot b$ her er $l = y$ og $b = (x - y)$, så:
$A(x, y) = y \cdot (x - y) = x \cdot y - y^2$
Hvilket er arealet udtrykt ved x og y.

Spgm. b

Bredden er $\frac{3}{5}$ af længden $(x + y)$ og her er bredden x, så er ligningen

$$\frac{3}{5} \cdot (x + y) = x \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{3}{2}\, y\right]\right]$$

Bruger vi vores oplysning om arealet af $A(x, y) = 1800$ så er ligningen
$x \cdot y - y^2 = 1800$ hvoraf vi indsætter $x = \frac{3}{2} y$ og får:

$$\left(\frac{3}{2}\, y\right) \cdot y - y^2 = 1800 \xrightarrow{\text{solve for y}} [[y = 60], [y = -60]]$$

Med den positive værdi af y indsættes denne i første ligning og vi får:

$$\frac{3}{5} \cdot (x + 60) = x \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 90]]$$

Dermed er $x = 90$ og $y = 60$.

Matematik A STX 15. august 2017 Løsningsforslag www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Den retvinklede trekant har vinkel C til 90 grader (hvilket gør at vi ved den er retvinklet), dernæst er længden af BC 5 og arealet af trekanten er 15, så vi bestemmer længden af AC.

Arealformlen bruges: $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, her er $h = |AC|$ og $g = |BC|$, samt $T = 15$, dermed har vi

$$15 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot 5 \Leftrightarrow 30 = |AC| \cdot 5 \Leftrightarrow |AC| = \frac{30}{5} = 6$$

Altså er længden $|AC| = 6$.

Opgave 2

Betragt udtrykket
$(x + y)^2 + (x - y) \cdot (x + y)$

På første led ser vi, at første kvadratsætning kan anvendes, på andet led kan vi se at tredje kvadratsætning kan anvendes, det giver os

$$x^2 + y^2 + 2\cdot x\cdot y + x^2 - y^2$$
$$= 2\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y$$
$$= 2\cdot x\cdot (x + y)$$

Hvis ikke man fik gennemskuet det, så kan man også bare regne det ud sådan:

$$(x + y)^2 + (x - y)\cdot(x + y)$$
$$= (x + y)\cdot(x + y) + (x - y)\cdot(x + y)$$
$$= x^2 + x\cdot y + y\cdot x + y^2 + x^2 + x\cdot y - y\cdot x - y^2$$
$$= x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2 + x^2 - y^2$$
$$= 2\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y$$
$$= 2\cdot x\cdot (x + y)$$

Altså er svaret $2\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y$ eller $2\cdot x\cdot (x + y)$ om man vil.

Opgave 3

Der er givet tre funktioner:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Grafen for *A* er en aftagende potensfunktion, hvoraf den ikke har skæring med første- eller andenaksen. Den eneste funktion der giver dette er $\boldsymbol{h(x)}$.

Grafen for *B* er en voksende potensfunktion der ligger mellem $0 < a < 1$. Den eneste funktion der giver os dette er kvadratrodsfunktionen eller $\boldsymbol{f(x)}$.

Grafen for *C* tilhører $\boldsymbol{g(x)}$ fordi dette er en voksende andengradsfunktion, hvor $x \in \mathbb{R}_+$.

Opgave 4

Givet funktionen $f(x) = 2\cdot\ln(x) - x$, hvor $x > 0$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$, og det forudsætter vi differentierer $f(x)$ så vi får

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 1, \text{ hvor } x > 0.$$

Vi bestemmer nulpunkterne for $f'(x)$, dette vil give maksimum og minimum for $f(x)$. Så vi løser ligningen

$$\frac{2}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow 2 = x \Leftrightarrow x = 2$$

Vi fik kun en løsning (ikke overraskende). Da vi har løst ligningen kan vi nu bruge to metoder til bestemmelse af monotoniforhold.

Metode 1)

Eftersom vi fik $x = 2$, så kan vi vælge tallene 1 og 3 (som jo opfylder at $x > 0$), så

$f'(1)=\frac{2}{1}-1=2-1=1$

$f'(3)=\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

Vi kan nu lave monotoniskema:

x	2
$f'(x)$	$+$ 0 -
$f(x)$	$\nearrow$ $\searrow$

Og vi kan slutte, at:
$f(x)$ er voksende i intervallet $(0;2]$
$f(x)$ er aftagende i intervallet $[2;\infty)$

Metode 2)
Vi benytter os af den dobbelte afledede funktion, den giver os

$f''(x)=-\frac{2}{x^2}$

Og vi indsætter $x=2$, som giver os

$f''(2)=-\frac{2}{2^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Eftersom vi får et negativt output, så har vi et maksimum, og det viser jo, at funktionen er:
$f(x)$ er voksende i intervallet $(0;2]$
$f(x)$ er aftagende i intervallet $[2;\infty)$

Opgave 5

Givet andengradsligningen
$4x^2-4x+k=0$

Vi søger en værdi af k, for hvilket andengradsligningen har een løsning. Hvis den skal have een løsning, så ved vi pr. definition, at diskriminanten skal være 0. Derfor skal vi løse ligningen $b^2-4\cdot a\cdot k=0$, vi kender a og b, så vi får

$(-4)^2-4\cdot4\cdot k=0 \Leftrightarrow 16-16\cdot k=0 \Leftrightarrow 16\cdot k=16 \Leftrightarrow k=1$

Så for $k=1$ får vi en andengradsligning, som giver os een løsning. (og man kan jo altid prøve at løse ligningen så...)

Opgave 6

Cirklen er givet ved ligningen
$x^2-4x+y^2-2y=20$

Vi skal først vise, at punktet $P(5,5)$ ligger på cirklen. Dette kan nemt gøres ved at indsætte det i ligningen ovenfor og se om den giver 20.

$5^2-4\cdot5+5^2-2\cdot5=20 \Rightarrow 20=20$ og dermed passer pengene. **Punktet P ligger på cirklen.**

Tangenten til cirklen kan vi finde nemt ved at omskrive ligningen for cirklen.
$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

Dermed har vi centrum til cirklen $C(2, 1)$. Vi opstiller derfor en vektor, så

$$PC = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi udnytter linjens ligning, så
$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) = 0$ så vi får
$3 \cdot (x-5) + 4 \cdot (y-5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 15 + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{3x + 4y - 35 = 0}$
Og dermed fik vi vores ønskede tangentligning.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Der er givet en tabel med oplysninger, og disse defineres nedenfor:
$tid := [1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11] :$
$træer := [24500, 13600, 3020, 1800, 1150, 440, 270, 166] :$

Vi bestemmer forskriften vha. eksponentiel regression. I Maple 2017 bruger vi så vores oplysninger.
$N(t) := ExpReg(tid, træer, t) :$
$N(t)$

$$37322.7216338046\ 0.609614518120447^t \qquad \textbf{(37.1.1)}$$

Dermed fandt vi vores ønskede forskrift til at være $N(t) = 37322.721 \cdot 0.60961^t$.

Spgm. b

14 år efter tørlægningen svarer til $t = 14$ og vi indsætter i modellen og får:
$N(14)$

$$36.5382315505869 \qquad \textbf{(37.2.1)}$$

Dvs. 14 år efter tørlægningen vil der være ca. 37 træer tilbage i området. (approksimeret til de hele tal!).

Spgm. c

Halveringstiden bestemmer vi ved formlen

$T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$, så vi indsætter vores tal a og får

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.609614518120447)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T_{\frac{1}{2}} = 1.4005$$

Dvs. når der går ca. 1.4 år så halveres mængden af træerne i området.

Tallet a er fremskrivningsfaktoren, og vi ønsker den udtrykt i procent, så $a = 1 + r$ giver os
$r = a - 1$ så
$r = (0.609614518120447 - 1) \cdot 100$

$$r = -39.03854819 \quad \textbf{(37.3.1)}$$

Dvs. for hvert år der går, falder mængden af træer i området med 39%.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Her kan man vælge at bruge regression eller formlerne for tallene a og b i en potensfunktion. Sidstenævnte tilfælde er en øvelse til læseren.

$P1 := [3, 5] :; P2 := [17, 102] :$

$f(x) := PowReg(P1, P2, x) :$
$f(x)$

$$0.360503985352342\, x^{3.50757555675707} \quad \textbf{(38.1.1)}$$

Som er vores model. Dermed blev tallene a og b fundet til:
$\boldsymbol{a = 3.507}$
$\boldsymbol{b = 0.360}$

Spgm. b

Her bruges formlen $r_y = \left((1 + r_x)^a - 1\right) \cdot 100\ \%$.

Vi kender a og r_x, så vi finder r_y.

$$r_y = \left(\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{3.50757555675707} - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = 39.69728660 \quad \textbf{(38.2.1)}$$

Dvs. når x vokser med 10%, så vokser $f(x)$ med 39.697 %.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet parameterfremstillingen

$l: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ hvor t ligger i de reelle tal.

Linjen er givet
$m: 5x - y + 4 = 0$

Og vi bestemmer vinklen mellem l og m ved at benytte normalvektorerne for linjerne. Derfor tages retningsvektoren og den tager vi hat af, så

$\vec{n}_l = \hat{\vec{r}}_l = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vi finder normalvektoren af m, så

$\vec{n}_m = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem normalvektorerne bestemmes ved formlen

$\cos(v) = \dfrac{\vec{n}_l \cdot \vec{n}_m}{|\vec{n}_l| \cdot |\vec{n}_m|}$ så

$\cos(v) = \dfrac{-1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}}$

$$\cos(v) = -\frac{7\sqrt{5}\sqrt{26}}{130} \tag{39.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$\cos(v) = -0.61395 \tag{39.1.2}$$

$invCos\left(-\dfrac{7\sqrt{5}\sqrt{26}}{130}\right)$

$$127.8749837 \tag{39.1.3}$$

Men da vi søger den spidse vinkel, så tages resultatet ovenfor fratrukket med 180, så
$180 - 127.8749837$

$$52.1250163 \tag{39.1.4}$$

Dermed er den spidse vinkel mellem l og m 52.125^o.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

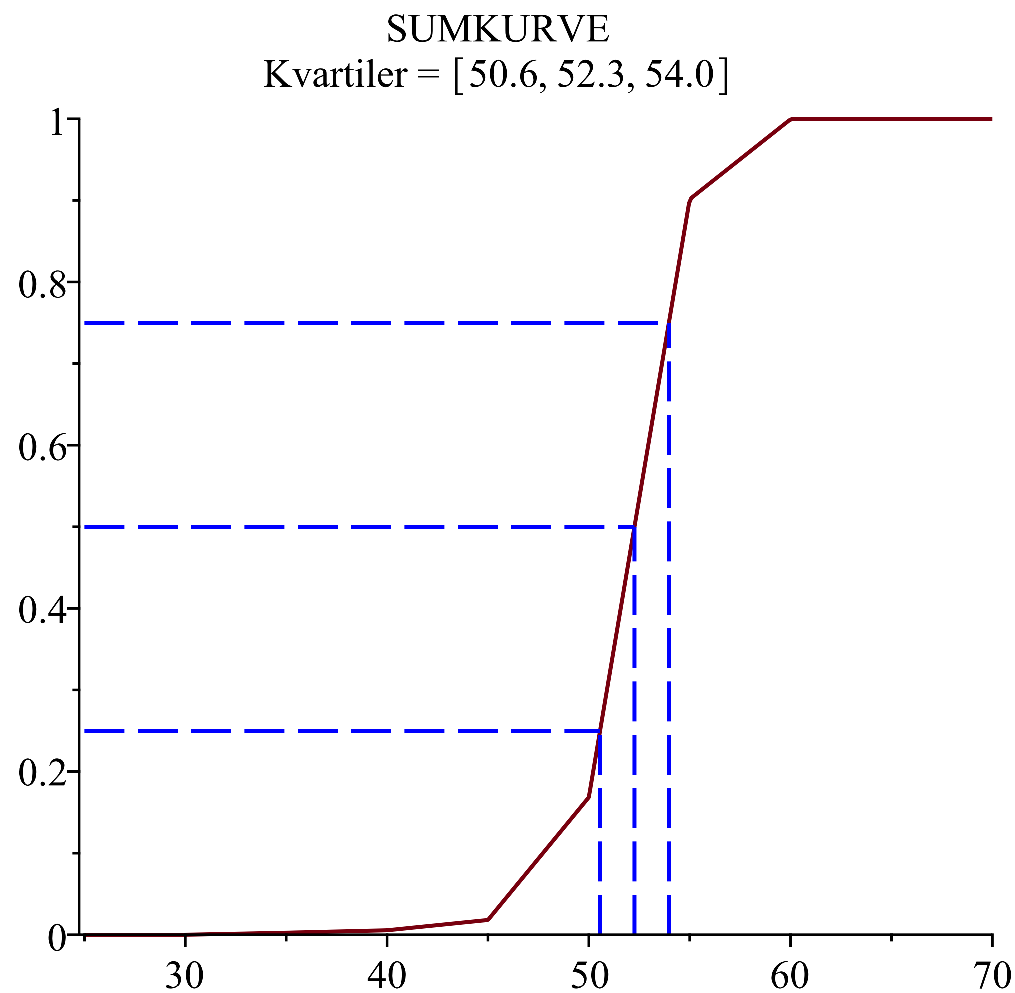
Vi er så heldige at Maple kan regne statistik opgaver meget nemt for os. Vi definerer hele pivtøjet i en matrix.

$$M := \begin{bmatrix} 30..35 & 138 \\ 35..40 & 166 \\ 40..45 & 699 \\ 45..50 & 8333 \\ 50..55 & 40611 \\ 55..60 & 5433 \\ 60..65 & 29 \end{bmatrix}:$$

frekvensTabel(M)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
30 .. 35	138	0.2491	0.249
35 .. 40	166	0.2996	0.549
40 .. 45	699	1.262	1.81
45 .. 50	8333	15.04	16.8
50 .. 55	40611	73.29	90.1
55 .. 60	5433	9.805	99.9
60 .. 65	29	0.05234	100

Dermed fik Maple altså udregnet de kumulerede frekvenser for os. Dette kunne vi jo også selv have gjort, men dette overlades til læseren. Dernæst kan vi plotte en sumkurve ved kommandoen *plotSumkurve*(M)



Spgm. b

Kvartilsættet blev allerede bestemt i spgm. a, men dette kan alene også findes ved at aflæse grafen eller bruge kommandoen

kvartiler(*M*)

$$[50.556, 52.262, 53.967] \qquad \textbf{(40.2.1)}$$

Dvs. 25% af børnene har en længde på 50.556cm eller mindre, 50% af børnene har en længde på 52.262cm eller mindre. 75% af børnene har en længde på 53.967 eller mindre.

Vi bestemmer den procentdel af børnene der har højst 48cm i længde. Vi skriver kommandoen.

sumkurve(*M*, 48)

$$0.108336190871519 \qquad \textbf{(40.2.2)}$$

Dvs. ca. 10.833% af børnene har en længde på højst 48 cm.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

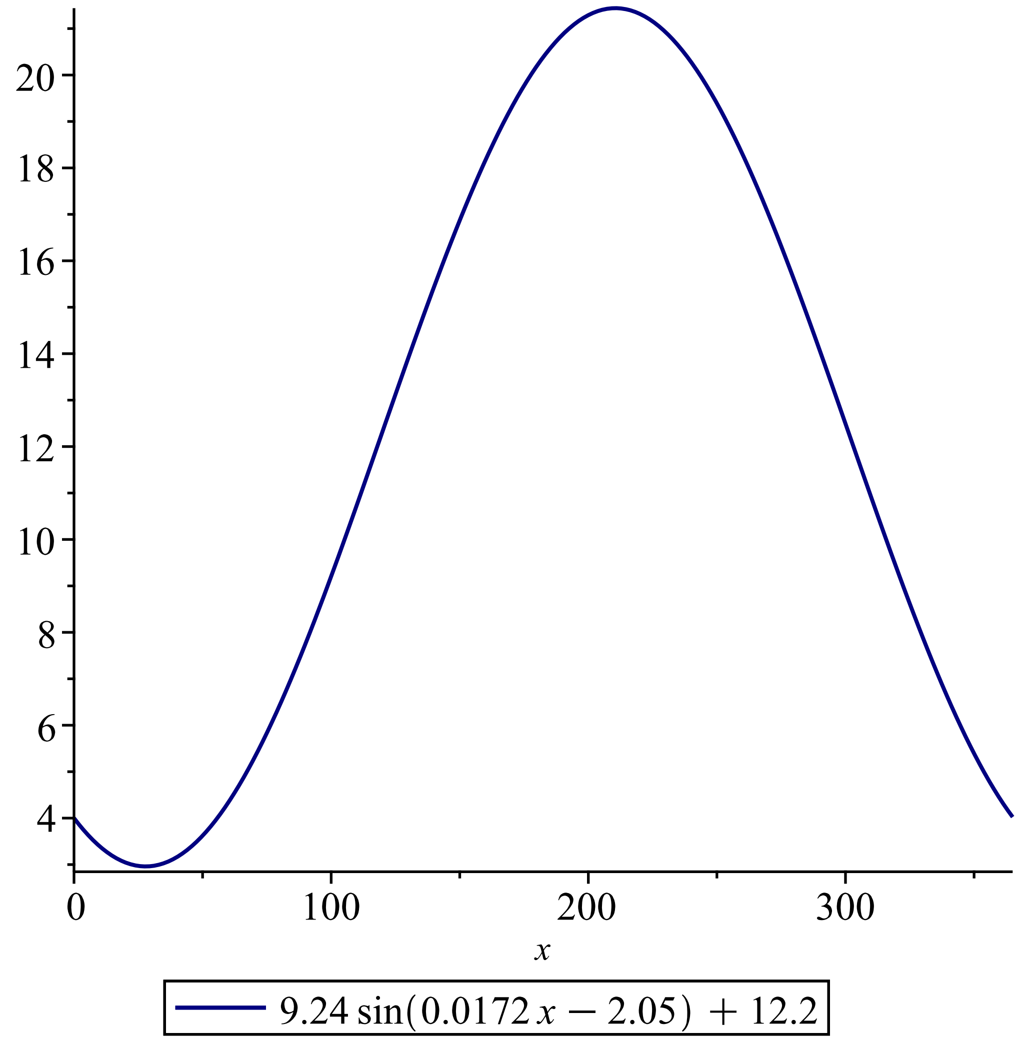
Givet den lange funktion der beskriver dagstemperaturen i Danmark.

$f(x) := 9.24 \cdot \sin(0.0172 \cdot x - 2.05) + 12.2$

$$f := x \mapsto 9.24 \sin(0.0172\, x - 2.05) + 12.2 \qquad \textbf{(41.1.1)}$$

Intervallet strækker sig fra $x \in [0; 365]$. (det må jo være et år der ikke er skudår i...)

Vi tegner grafen i løbet af et år vha. kommandoen:
plot$(f(x), x = 0..365, legend = [f(x)], color = [\text{"Navy"}])$



Vi kan bestemme de tidspunkter hvor temperaturen er størst og mindst ved at tage den afledede og løse i intervallet.
intervalsolve$(f'(x) = 0, x = 0..365)$

$$[27.86067867, 210.5114143] \qquad \textbf{(41.1.2)}$$

Vi tjekker om hvad der er hvad vha. den dobbelte afledede (selvom det nu er ret indlysende for os. ..)
$f''(27.86067867)$

$$0.0027335616 \qquad \textbf{(41.1.3)}$$

Positivt output giver os et minimum.

$f''(210.5114143)$

$$-0.0027335616 \qquad \textbf{(41.1.4)}$$

Negativt output giver os et maskimum.

Altså kan vi sige, at 28 dage efter årsskifte har vi den koldeste dag, men 211 dage efter årsskifte, så har vi den varmeste dag. Temperaturforskellene er så
$f(210.5114143) - f(27.86067867)$

$$18.48 \tag{41.1.5}$$

Så 18.48^oC angiver forskellen mellem den koldeste og varmeste dag i løbet af et år.

Spgm. b

Vi indsætter $x = 90$ i $f'(x)$ og får
$f'(90)$

$$0.1393197743 \tag{41.2.1}$$

Dvs. 90 dage efter årsskiftet stiger temperaturen dagligt med 0.14^oC.

Opgave 12

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Givet funktionen

$f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$

$$f := x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \tag{42.1.1}$$

Vi bestemmer først de grænseværdier vi skal bruge i intergralet for at finde arealet.
$f(x) = 0.2$

$$\frac{1}{x^2+1} = 0.2 \tag{42.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -2.], [x = 2.]] \tag{42.1.3}$$

Således fandt vi de grænseværdier vi skal bruge. Arealet er så

$M = \int_{-2}^{2} (f(x) - 0.2)\, \mathrm{d}x$

$$M = 1.414297436 \tag{42.1.4}$$

Så arealet af M er 1.414297436.

Spgm. b

Ved at bruge formlen

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_a^b (f(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x$ fås vores volumen, dvs.

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_{-2}^{2} (f(x))^2\, \mathrm{d}x - \mathrm{Pi} \cdot \int_{-2}^{2} (0.2)^2\, \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{at 5 digits}} V = 4.2320$

Hermed fandt vi den ønskede volumen, nemlig **4.2320, når $f(x)$ drejes 360 grader om førsteaksen.**

Opgave 13

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Givet differentialligningen

$M'(t) = 123 - 0.06 \cdot M(t)$

$$D(M)(t) = 123 - 0.06\, M(t) \tag{43.1.1}$$

Her er $M(t)$ vægtens af stegen og t er antal døgn. Vi bestemmer stegens vægttab pr. døgn, ved at indsætte 2500 i $M(t)$, så vi får

$M'(t) = 123 - 0.06 \cdot 2500$

$$D(M)(t) = -27.00 \tag{43.1.2}$$

Stegen bliver 27g mindre for hver dag der går.

Spgm. b

Vi løser differentialligningen.

$M'(t) = 123 - 0.06 \cdot M(t) \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = 2050 + e^{-\frac{3t}{50}}\, \_C1$

Dette er også en standard differentialligning, som man kan løse i hånden.

$2650 = 2050 + e^{-\frac{3 \cdot 0}{50}}\, \_C1 \xrightarrow{\text{solve for \_C1}} [[\_C1 = 600]]$

Dermed er vores partikulære løsning givet ved

$M(t) := 2050 + 600 \cdot e^{-\frac{3t}{50}}$

$$M := t \mapsto 2050 + 600\, e^{-\frac{3t}{50}} \tag{43.2.1}$$

Så indsættes $t = 30$ i modellen og vi får

$M(30) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2149.2$

Stegens vægt efter 30 dage i køleskabet er faldet til 2149g.

Opgave 14

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Vi bestemmer h udtrykt ved x og y. Eftersom der nu er to retvinklede trekanter i den ligebenede trekant, så kan vi splitte det op i to mindre trekanter. Vi får så (hvis vi ser på den venstre trekant) ABM hvor M jo er midtpunktet. Afstanden $|AM| = y$, $|BM| = h$ og $|AB| = x$, så ved brug af Pythagoras får vi

$y^2 + h^2 = x^2$ og da vi nu ønsker at bestemme h udtrykt ved x og y, så er det h vi isolerer i ligningen.

Derfor har vi $y^2 + h^2 = x^2 \Leftrightarrow h^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Dette er jo kun for den ene trekant.

Tilsvarende gælder dette også for den anden trekant, så vi får også $h = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Arealet af hele trekanten svarer til at man bestemmer arealet af den ene af de retvinklede trekanter som vi jo skrev om før, dernæst ganger man med 2 eftersom der jo er to retvinklede trekanter.

Mere generelt skriver vi

$T_{retvinklet} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ hvor $h = \sqrt{x^2 - y^2}$ og $g = y$, så for den ene trekant får vi

$T_{retvinklet} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \cdot y$. Eftersom der jo nu er to trekanter for at dække hele den ligebenede trekant, så ganger vi blot resultatet med 2, så

$\boldsymbol{T = 2 \cdot T_{retvinklet} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \cdot y = y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}$ **som jo er det vi skulle redegøre for.**

Spgm. b

Vi får oplyst, at omkredsen af trekanten ABC sammenlagt er 10. Dermed har vi

$10 = 2 \cdot y + 2 \cdot x \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 5 - x$

Vi bruger svaret fra spgm. a omkring arealet, dvs.

$T = y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$. Vi indsætter $y = 5 - x$ og får

$T(x) := (5 - x) \cdot \sqrt{x^2 - (5 - x)^2}$

$$T := x \mapsto (5 - x)\sqrt{x^2 - (5 - x)^2} \tag{44.2.1}$$

Differentieres ovenstående og løses ligningen $T'(x) = 0$ fås

$T'(x) = 0$

$$-\sqrt{x^2 - (5 - x)^2} + \frac{5(5 - x)}{\sqrt{x^2 - (5 - x)^2}} = 0 \tag{44.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{10}{3}\right]\right] \tag{44.2.3}$$

Denne værdi af x opfylder betingelsen om, at $2.5 < x < 5$, så vi eftertjekker, om denne værdi giver det største areal.

$T''\left(\frac{10}{3}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -5.1963$

Da outputtet er negativt, så har vi et maksimum i $\boldsymbol{x = \frac{10}{3}}$ **og dermed er det altså den værdi af $\boldsymbol{x}$, der giver det største areal til trekanten $\boldsymbol{ABC}$.**

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Det ses umiddelbart på figuren, at vi har en rumlig terning med alle sidelængder som er kantlængde 2, hvor vi kun arbejder på de positive sider af x-,y-, og z-akserne. Derudover vides det, at A, B, C og D er midtpunkter. Dermed kan vi bestemme koordinatsættene til hvert af følgende punkter.

$\boldsymbol{A(1, 0, 0)}$
$\boldsymbol{B(1, 2, 0)}$
$\boldsymbol{C(2, 1, 2)}$
$\boldsymbol{D(0, 1, 2)}$

Spgm. b

Arealet af trekanten ABC bestemmes ved at opstille nogle vektorer.

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{bmatrix}:$$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{bmatrix}:$$

Dernæst krydser vi vektorerne så vi får en normalvektor på $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{45.2.1}$$

Arealet af trekanten bestemmes så.

$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T = 2.2361$

Dermed fandt vi det areal $T = 2.2361$, som vi skulle.

Spgm. c

Vi bruger resultatet af normalvektoren fra spgm. b til at opstille en ligning for planen, som trekanten ABC er en del af.

$4 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-0) - 2 \cdot (z-0) = 0$

$$4x - 4 - 2z = 0 \tag{45.3.1}$$

Vi bruger normalvektoreren samt punktet D til at lave en parameterfremstilling, så vi får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingen indsætter vi så i planen hvoraf vi løser ligningen for t.

$4 \cdot (4 \cdot t) - 4 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = \frac{2}{5}\right]\right]$

Denne værdi af t indsættes i parameterfremstillingen, deraf får vi det ønskede koordinatsæt til projektionen af D på trekanten ABC

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ 1 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(45.3.2)}$$

Dermed fik vi det ønskede nemlig projektionen af $D_{ABC}(1.6, 1, 1.2)$. på ABC.

Matematik A STX 7. december 2017 Løsningsforslag www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet udtrykket

$(p+2\cdot q)^2 - 2\cdot q\cdot(q+2\cdot p)$

$= p^2 + 4\cdot q^2 + 2\cdot p\cdot 2\cdot q - 2\cdot q^2 - 2\ \cdot q\cdot 2\cdot p$

$= p^2 + 4\cdot q^2 + 4\cdot p\cdot q - 2\cdot q^2 - 4\cdot p\cdot q$

$= p^2 + 2\cdot q^2$

Bemærk, at første kvadratsætning blev anvendt.

Opgave 2

Tre parabler er givet:

Parabel A:

Vi ser, at a-værdien i den første parabel gør, at parablen fylder mere i anden kvadrat. Det må betyde, at a-værdien er mindst.

Vi ser, at b-værdien i denne faktisk er mindst. Dette kan nemt undersøges ved at se på punktet $(0, c)$ hvor hældingskoefficienten for den rette linje der kan tegnes, er mindst, for hver x den vokser med.

Parabel B:

Vi ser, at a-værdien her er større end den fra parabel A, og mindre end den fra parabel C, så denne har ingen indflydelse på konklusionen.

Tilsvarende for b. Denne er større end b-værdien fra parabel A og mindre end b-værdien fra parabel C. Denne har ingen indflydelse på konklusionen.

Parabel C:

Vi ser, at a-værdien i denne parabel er stor, da grafen for parablen C er lille ift. parablen for A. Jo smallere den er, jo større er a.

Vi ser, at b-værdien i denne er modsat parabel A. Denne er størst, da hældningskoefficienten her er væsentlig større end de foregående parabler.

Konklusion på det hele:
Størst a-værdi: Parabel C.
Mindste b-værdi: Parabel A.

Opgave 3

Længden af $|AB|$ kan bestemmes vha. Pythagoras.
$|AB| = c$, $|AC| = b = 8$ og $|BC| = a = 6$, så

$$6^2 + 8^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Som så er længden af $c = |AB| = 10$.

Da trekanterne er ensvinklede, så ser vi, at $|BC|$, dvs højden i trekanten ABC er grundlinje i trekanten BCD, så forholdet bestemmes.

$$k = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Og dermed kan $|CD|$ som er højden i trekanten BCD. Ved at udnytte højden fra ABC fås

$$|CD| = \frac{|BC|}{k} = \frac{6}{\frac{4}{3}} = \frac{6\cdot 3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Opgave 4

Givet andengradsligningen
$(x+3)^2 - 1 = 0$
kan løses på mange måder.

$$(x+3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 1 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 - 3 \Rightarrow x = \begin{cases} 1-3 = -2 \\ -1-3 = -4 \end{cases}$$

Dermed er løsningerne
$x = -4 \vee x = -2$. (Tjek!)

NB: Havde man ikke haft denne idé, så kunne man anvende kvadratsætningen og så løse andengradsligningen vha. diskriminaten og denne vej rundt.

Opgave 5

Vi skal bestemme punktet hvor l og m har skæring.
Man kan isolere y i linjen l.

$$4x + 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4 - \frac{4x}{3}$$

Hvis to linjer er ortogonale, så er produktat af hældningskoefficienterne lig med -1.

Linjen m er på formen $y = c\cdot x + d$, og da vi kender hældningen for l, så er

$$-\frac{4}{3}\cdot c = -1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\cdot c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

Endelig kan punktet P anvendes for at finde d.

$10 = \frac{3}{4} \cdot 8 + d \Leftrightarrow 10 = 6 + d \Leftrightarrow d = 4$

Forskriften for *m* er

$y = \frac{3}{4} \cdot x + 4$

Skæringen mellem *m* og *l* findes ved at sætte linjerne lig hinanden.

$4 - \frac{4}{3} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x + 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x \Leftrightarrow x = 0$

Den tilhørerende y-koordinat er ikke overraskende 4, dermed er skæringspunktet $Q(0;4)$ for linjen *l* og *m*.

Man kunne også opstille en vektor $\vec{k}$ ud fra linjen *l*.

$\vec{k} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ og finde tværvektoren. $\hat{k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Tværvektoren indsættes i linjens ligning samt punktet for P.

$-3 \cdot (x - 8) + 4 \cdot (y - 10) = 0$

$$-3x - 16 + 4y = 0 \tag{50.1}$$

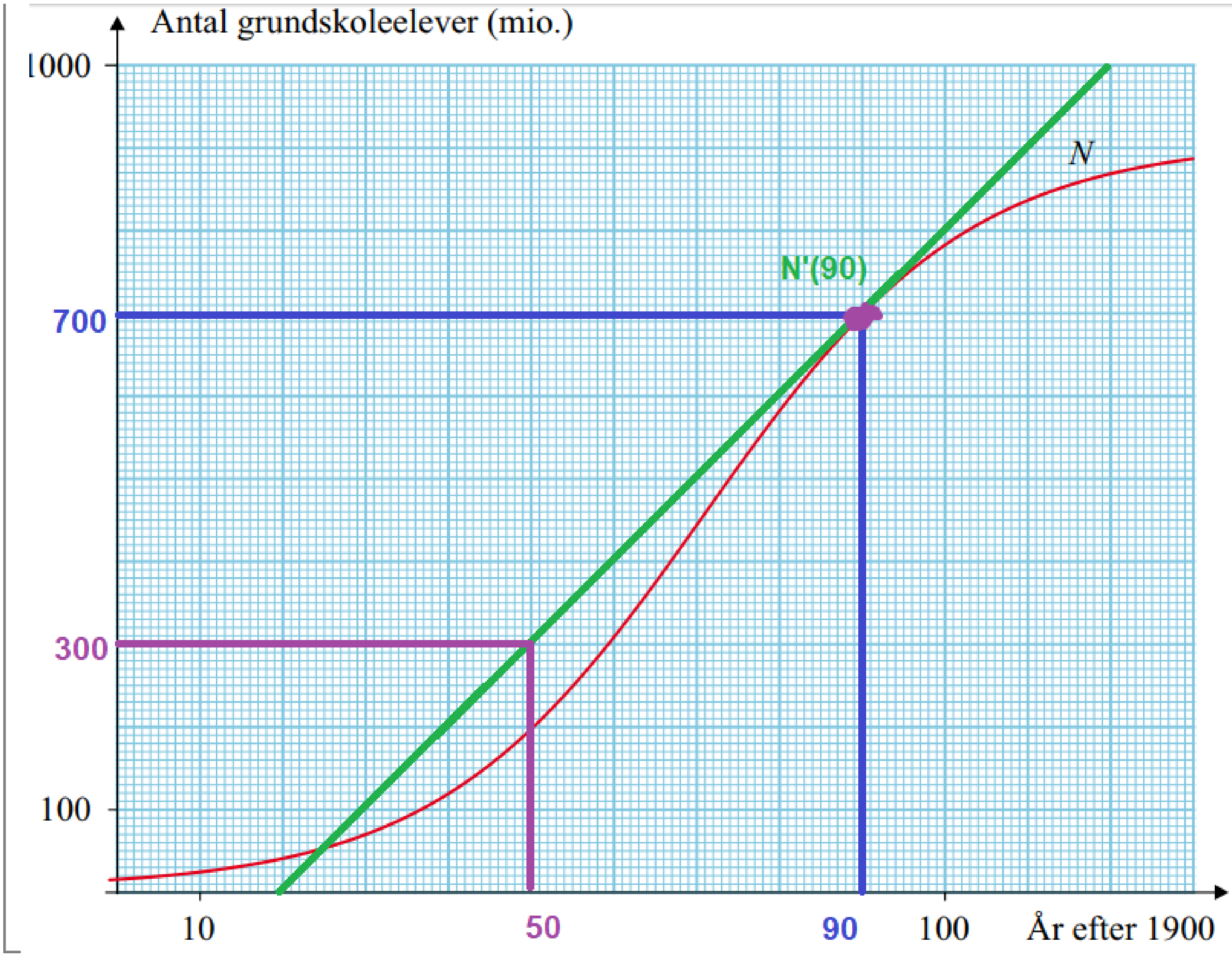
Som er linjen for *m*. Man kan så herfra finde skæringspunktet mellem *l* og *m*, og opgaven vil være besvaret.

Opgave 6

Den bedste idé vil være at tegne på bilaget og så se, hvad hældningen er. Hvis dette så ikke er nemt, så vælg et andet punkt på den linje man har tegnet (der vælges (50,300) og (90,700) og hældningskoefficienten regnes.

$N'(90) = \frac{700 - 300}{90 - 50} = 10$

Dermed er konklusionen, at for hvert år der går, efter 1990, steg antallet af grundskolebørn i verden med 10 mio.



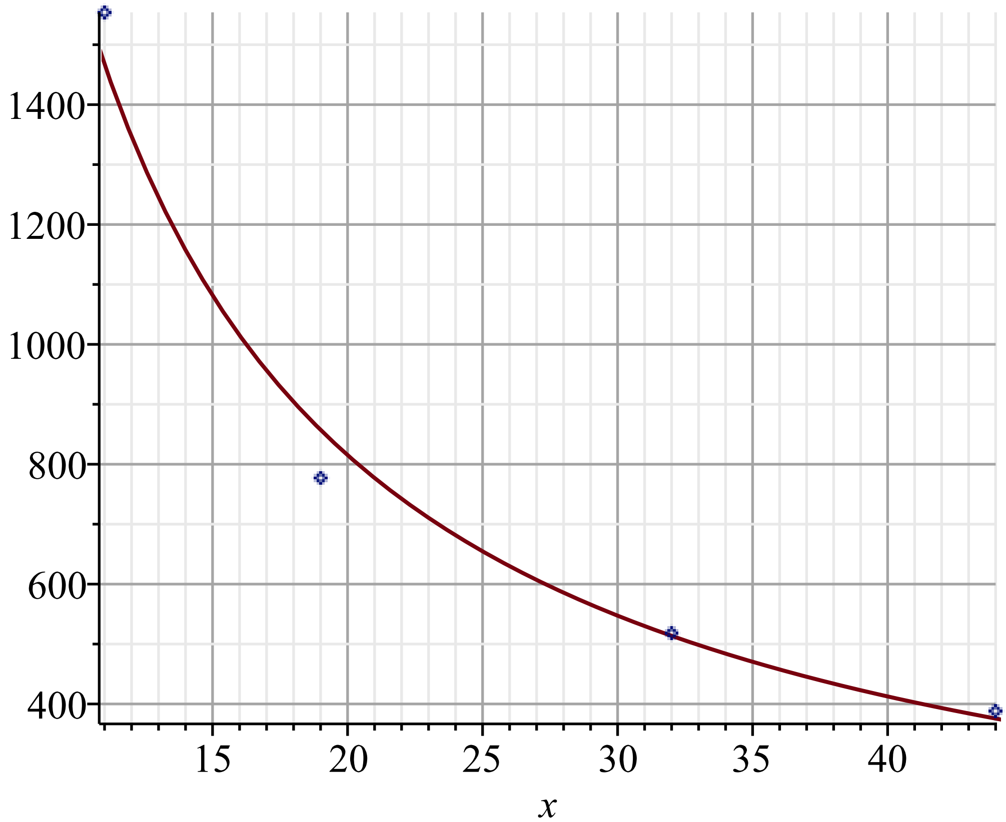
De resterende opgaver løses **<u>med</u>** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :
I Maple indlæses tabellen med oplysningerne.
P1 := [11, 19, 32, 44] :
P2 := [1554, 777, 518, 388] :

Spgm. a

Man anvender potensregression, så man anvender kommandoen:
PowReg(*P1*, *P2*)



Forskriften for det årlige forbrug af fjernvarmevand er så

$f(x) := 15478 \cdot x^{-0.98265}$

$$f := x \mapsto \frac{15478}{x^{0.98265}} \quad \textbf{(52.1.1)}$$

Og dermed er tallene a og b bestemt til at være hhv. $a = -0.98265$ og $b = 15478$.

Spgm. b

Hvis det årlige forbrug af fjernvarmevand skal være 600 m^3, så løses ligningen $f(x) = 600$, dvs.

$solve(f(x) = 600, x)$

$$27.32037367 \quad \textbf{(52.2.1)}$$

Dvs. den gennemsnitlige afkøling af fjernvarmevand skal være 27.32^oC, hvis det årlige forbrug af fjernvarmevand skal være 600 m^3.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Den givende funktion defineres.

$f(x) := (x^2 + x - 11) \cdot e^{-x}$:

Spgm. a

Vi bestemmer ligningen for tangenten. Vi har fået oplyst, at denne er i $x=0$, og dermed er tangenten

$y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$

$$y=12\,x-11 \tag{53.1.1}$$

Som er den ønskede tangent i punktet P.

Spgm. b

Vi bestemmer monotoniforholdene vha. second derivative test. Derfor overlades det til læseren at anvende den klassiske metode for bestemmelse af monotoniforhold.

Vi løser ligningen $f'(x)=0$.

$f'(x)=0$

$$(2\,x+1)\,e^{-x}-\left(x^2+x-11\right)\,e^{-x}=0 \tag{53.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=4],[x=-3]] \tag{53.2.2}$$

Dernæst bestemmes $f''(x)$.

$f''(x)$

$$2\,e^{-x}-2\,(2\,x+1)\,e^{-x}+\left(x^2+x-11\right)\,e^{-x} \tag{53.2.3}$$

Vi indsætter $x=-3$ først og dernæst $x=4$.

$f''(-3)$

$$7\,e^{3} \tag{53.2.4}$$

$f''(4)$

$$-7\,e^{-4} \tag{53.2.5}$$

Da $f''(x)>0$ i netop $x=-3$, så er der lokalt minimum. Da $f''(x)<0$ i netop $x=4$, så er der lokalt maksimum. Dermed er funktionen:

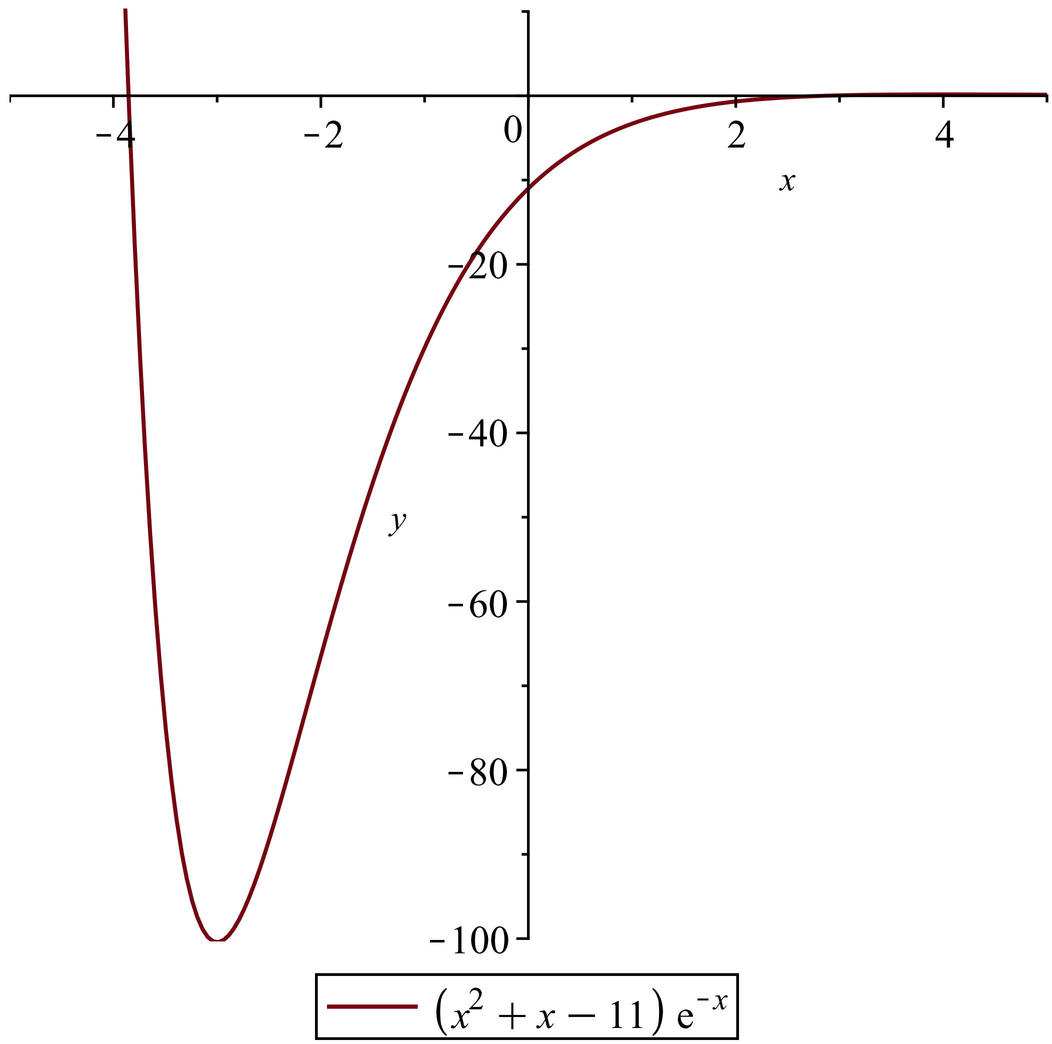
$f(x)$ er aftagende i intervallet $(-\infty;-3]$

$f(x)$ er voksende i intervallet $[-3;4]$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $[4;\infty)$

Et plot (som så ikke er en del af opgavekravet) kan hjælpe med at overbevise en.

$plot(f(x), x=-5..5, y=-100..10, legend=[f(x)])$



Det kan være svært at se, men det stemmer.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Ligningen for cirklen er pr. definition

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, her er

$r=\sqrt{8}$, $a=4$ og $b=3$, dermed er ligningen for cirklen

$(x-4)^2+(y-3)^2=\sqrt{8}^2$

$$(x-4)^2+(y-3)^2=8 \tag{54.1.1}$$

Som er det ønskede.

Spgm. b

To tangenter tangerer cirklen. Vi ved, at der er givet en vektor $\vec{r}$, hvor ved tangenterne m_1 og m_2 er parallele til $\vec{r}$.

Vi anvender linjens ligning og indsætter blot $a = 1$ og $b = 1$, og der er ingen grund til at anvende tværvektoren af $\vec{r}$. (Overvej hvorfor!). Desuden anvendes cirklens centrum. Vi får:
$1 \cdot (x-4) + 1 \cdot (y-3) = 0$

$$x - 7 + y = 0 \qquad \textbf{(54.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for y}}$

$$y = -x + 7 \qquad \textbf{(54.2.2)}$$

Denne ligning isoleres mht. y som så indsættes i cirklens ligning.
$(x-4)^2 + ((-x+7)-3)^2 = 8$

$$(x-4)^2 + (-x+4)^2 = 8 \qquad \textbf{(54.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 6], [x = 2]] \qquad \textbf{(54.2.4)}$$

Vi ser, at disse værdier er førstekoordinaterne. Vi bestemmer andenkoordinaterne.
$y = -6 + 7$; $y = -2 + 7$

$$y = 1$$
$$y = 5 \qquad \textbf{(54.2.5)}$$

Og dermed er koordinatsættene til hhv. m_1 og m_2 følgende:
$P(2; 5)$ og $Q(6; 1)$.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :
local D

Spgm. a

Taghældningen svarer til at bestemme vinkel B. Til det, anvendes cosinusrelationerne til en vinkel.

$B := invCos\left(\frac{4.2^2 + 2.4^2 - 3.9^2}{2 \cdot 2.4 \cdot 4.2}\right)$

$$B := 66.03051766 \qquad \textbf{(55.1.1)}$$

Som så er taghældningen.

Spgm. b

Vinkel D defineres.
D := 58

$$\mathrm{D} := 58 \qquad \textbf{(55.2.1)}$$

Vi bestemmer vinkel C vha. vinkelsummen i trekanten BCD, så
$C := 180 - \mathrm{D} - B$

$$C := 55.96948234 \qquad \textbf{(55.2.2)}$$

Dernæst bestemmes $|BD|$ vha sinusrelationerne, så

$\frac{Sin(C)}{BD} = \frac{Sin(\mathrm{D})}{2.4}$

$$\frac{0.8287396102}{|BD|} = 0.3533533734 \qquad \textbf{(55.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for BD}}$

$$[[BD = 2.345356441], [BD = -2.345356441]] \qquad \textbf{(55.2.4)}$$

Den negative værdi forkastes. Vi bestemmer længden $|AD|$.
$AD = 4.2 - 2.345356441$

$$AD = 1.854643559 \quad \textbf{(55.2.5)}$$

Vinkel A i trekanten ABC kan bestemmes hvis vi anvender sinusrelationerne.
$\frac{Sin(A)}{2.4} = \frac{Sin(B)}{3.9}$

$$0.4166666667 \sin(0.01745329252\ A) = 0.2342979409 \quad \textbf{(55.2.6)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for A}}$

$$[[A = 34.21605111]] \quad \textbf{(55.2.7)}$$

Endelig kan $|DE|$ bestemmes vha. tangens formlen.
$DE = Tan(A) \cdot AD$, eller

$DE = Tan(34.21605111) \cdot 1.854643559$

$$DE = 1.261174140 \quad \textbf{(55.2.8)}$$

Dermed fandt vi længden af tangen $|DE|$, som er 1.261 *m*.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Halveringstiden er 2.5 døgn, og vi har begyndelsesværdien $b = 25\ mg$, så er a fundet ved

$2.5 = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$

$$2.5 = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad \textbf{(56.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a = 0.7578582833]] \quad \textbf{(56.1.2)}$$

Forskriften er så
$f(t) := 25 \cdot 0.7578582833^t$

$$f := t \mapsto 25\ 0.7578582833^t \quad \textbf{(56.1.3)}$$

Hvor $f(t)$ beskriver mængden af *THC* i personens krop, til tidspunktet *t*, målt i døgn efter indtagelse.

Spgm. b

Hvis man skal undersøge hvornår personen ikke testes positiv, så løses ligningen $f(t) = 3$, dvs.
$f(t) = 3$

$$25\ 0.7578582833^t = 3 \quad \textbf{(56.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 7.647234224]] \quad \textbf{(56.2.2)}$$

Der vil cirka gå en uge før, at man bliver testet negativ, hvis man indtager 3mg THC.

Opgave 12

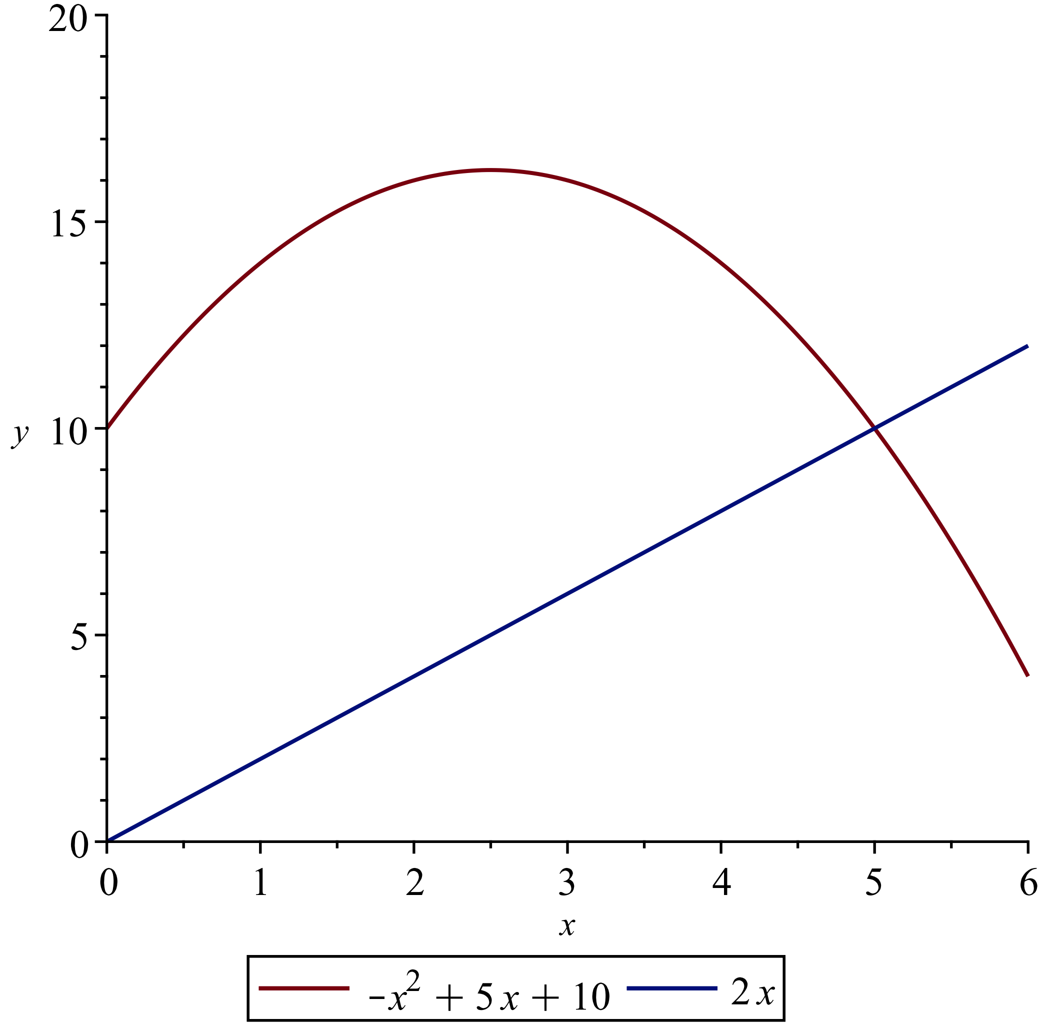
restart :; *with*(*Gym*) :

Begge funktioner defineres.

$f(x) := -x^2 + 5x + 10$:; $g(x) := 2x$:

Spgm. a

$plot([f(x), g(x)], x = 0..6, y = 0..20, legend = [f(x), g(x)])$



Ovenstående plot vil nok hjælpe med idéen. Arealet af M er udregnet ved

$$\int_0^5 (f(x) - g(x))\, dx$$

$$\frac{275}{6} \tag{57.1.1}$$

Arealet, afgrænset af andenaksen samt $x = 5$ er $\frac{275}{6}$.

Spgm. b

Volumen når M drejes 360^o er udregnet ved

$$V_M = \pi \cdot \int_0^5 (f(x))^2\, dx - \pi \cdot \int_0^5 (g(x))^2\, dx$$

$$V_M = \frac{5125\,\pi}{6} \tag{57.2.1}$$

Dermed er volumen fundet, når M drejes 360^o om førsteaksen.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

En nulhypotese kunne være:

H_0 ≔ *Der er ingen sammenhæng mellem alderen og holdning til at spise insekter.*I Maple anvendes der matricer. Vi indsætter en 2 × 5 matrix.

$$OBS := \begin{bmatrix} 12 & 42 & 27 & 43 & 23 \\ 10 & 15 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$OBS := \begin{bmatrix} 12 & 42 & 27 & 43 & 23 \\ 10 & 15 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix} \tag{58.1.1}$$

De forventede værdier kan findes vha. kommandoen

forventet(*OBS*)

$$\begin{bmatrix} 16.585 & 42.969 & 24.123 & 37.692 & 25.631 \\ 5.4154 & 14.031 & 7.8769 & 12.308 & 8.3692 \end{bmatrix} \tag{58.1.2}$$

Afrundet er

evalf[2](%)

$$\begin{bmatrix} 17. & 43. & 24. & 38. & 26. \\ 5.4 & 14. & 7.9 & 12. & 8.4 \end{bmatrix} \tag{58.1.3}$$

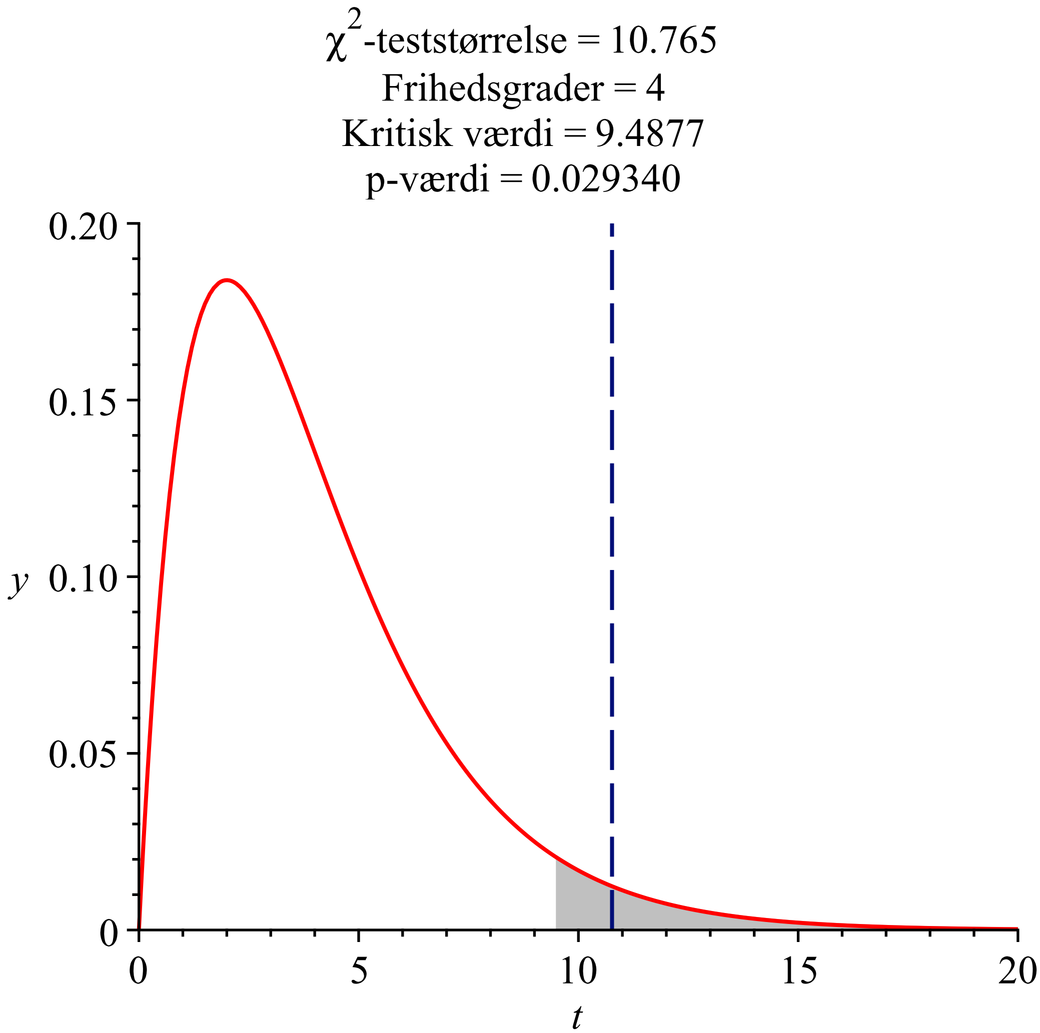
Alternativt kunne disse forventede værdier bestemmes vha. formlen

$$\frac{Lodret\ sum}{sum\ i\ alt} \cdot vandret\ sum$$

Spgm. b

Vi anvender en uafhængighedstest og tester med et 5% signifikansniveau

ChiKvadratUtest(*OBS*, *level* = 0.05)



Da p-værdien er mindre end 5% (2.93 % < 5 %), så forkastes H_0. Der er altså sammenhæng mellem alder og holdning til om man vil spise insekter.

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :
local D
Alle koordinatsæt defineres.
$A := [-4, -1, 4]$:; $B := [-3, 1, 3]$:; $C := [-2, 1, 1]$:; D $:= [0, 3, 0]$:

Spgm. a

Først bestemmes to vektorer.
$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{59.1.1}$$

Og dernæst
$\overrightarrow{BC} := \langle C - B \rangle$

$$\overrightarrow{BC} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (59.1.2)$$

Vinklen mellem begge vektorer kan bestemmes vha. formlen

$v = invCos\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right),$

Vi anvender dog en maple kommando.

$w = vinkel(\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{BC})$

$$w = 56.78908924 \quad (59.1.3)$$

Men pas på! Dette er en spids vinkel. Vi søger en stump.

$v = 180 - 56.78908924$

$$v = 123.2109108 \quad (59.1.4)$$

Dermed fandt vi vinklen mellem begge vektorer.

Spgm. b

Vi anvender vektoren $\overrightarrow{AB}$ og vi opstiller en vektor $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BD} := \langle D - B \rangle$

$$\overrightarrow{BD} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (59.2.1)$$

Dertil anvendes der krydsprodukt mellem de to vektorer. Det giver en normalvektor til planen.

$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (59.2.2)$$

Vi vælger D som et fast punkt, og ligningen for planen er

$-4 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 3) - 4 \cdot (z - 0) = 0$

$$-4\,x - 4\,z = 0 \quad (59.2.3)$$

Dermed er ligningen for den plan fundet. Vi tester nu de forskellige punkter, og ser om smeltevandsledningen ligger i planen.

Punktet A:

$-4 \cdot (-4) - 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Punktet B:

$-4 \cdot (-3) - 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Punktet C:

$-4 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 4 \neq 0$

Punktet D:

$-4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Dermed kan vi slutte, at hele smeltevandsledningen ikke ligger i planen.

Opgave 15

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi bestemmer stegens indre temeratur $T(x)$ udtrykt vha. x og A.

$T'(x) = 0.0045 \cdot (A - T(x))$

$$\frac{d}{dx} T(x) = 0.0045\, A - 0.0045\, T(x) \qquad \textbf{(60.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$T(x) = A + e^{-\frac{9x}{2000}}\, \_C1 \qquad \textbf{(60.1.2)}$$

Så ved løsning af differentialligningen (og isolering af $\_C1$) fås T udtrykt ved x og A.

$12 = A + e^{-\frac{9 \cdot 0}{2000}}\, \_C1 \xrightarrow{\text{isolate for \_C1}} \_C1 = 12 - A$

Og vi kan slutte at

$T(x) = A + e^{-\frac{9x}{2000}} \cdot (12 - A)$

$$T(x) = A + e^{-\frac{9x}{2000}}\, (12 - A) \qquad \textbf{(60.1.3)}$$

Som ønsket.

Spgm. b

Vi sætter $A = 80$ og $T = 62$, så er x

$62 = 80 + e^{-\frac{9x}{2000}}\, (12 - 80)$

$$62 = 80 - 68\, e^{-\frac{9x}{2000}} \qquad \textbf{(60.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{2000 \ln\left(\frac{9}{34}\right)}{9}\right]\right] \qquad \textbf{(60.2.2)}$$

evalf[5](%)

$$[[x = 295.35]] \qquad \textbf{(60.2.3)}$$

Der vil gå ca. 295.35 minutter til, at stegens indre temperatur er $62^{o}C$.

Spgm. c

Vi sætter $x = 120$ og $T = 62$, så er A

$62 = A + e^{-\frac{9 \cdot 120}{2000}}\, (12 - A)$

$$62 = A + e^{-\frac{27}{50}}\, (12 - A) \qquad \textbf{(60.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for A}}$

$$\left[\left[A = \frac{2\left(6\,\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} - 31\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} - 1}\right]\right] \quad \textbf{(60.3.2)}$$

evalf[5](%)

$$[[A = 131.83]] \quad \textbf{(60.3.3)}$$

Hvis man skal opnå en indre stegetemperatur på $62^o C$, på 120 minutter, så skal ovnens temperatur være sat på ca. $132^o C$.