4. Gráfok mátrixai

Dr. Szalkai István

2020.03.30.

Jelölés: Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix esetén $[\mathbf{A}]_{\mathbf{i,j}}$ jelöli $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának j -edik elemét.

Csúcsmátrixok

= **szomszédsági -** , **adjacencia** - mátrixok (*"adjacent"*= szomszédos, határos, közeli).

Többféle $G = (V, E)$ gráfra is definiálhatók, de mindegyikben rögzítenünk kell a csúcsok egy

$$V = (v_1, ..., v_n)$$

felsorolását, a mátrix pedig $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ méretű lesz.

1. Definíció: G egyszerű *gráf* => $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{nxn}$

$$[\mathbf{A}]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{ha } \textit{nem} \end{cases}$$

2. Definíció: G tetszőleges *gráf* => $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{n\times n}$ (!!! hurokélek száma $\times 2$!!!)

$$[\mathbf{A}]_{i,j} := \begin{cases} k & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \quad k \text{ -szoros (nem hurok) él} \\ \mathbf{2}k & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \quad k \text{ -szoros hurokél} \\ 0 & \text{ha } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

3. Definíció: G súlyozott élű *gráf*, azaz $w : E \to \mathbb{R}_+$ *pozitív súlyfüggvény* => $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$

$$[\mathbf{A}]_{i,j} := \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \\ +\infty & \text{ha } \textit{nem} \end{cases}$$

4. Definíció: G *egyszerű* irányított *gráf* => $\mathbf{A} \in \{-1, 0, +1\}^{nxn}$

$$[\mathbf{A}]_{i,j} := \begin{cases} +1 & \text{ha } (v_i, v_j) \in E \\ -1 & \text{ha } (v_j, v_i) \in E \\ 0 & \text{ha } \textit{egyik sem} \end{cases} \qquad \square$$

Megjegyzés: Akkor célszerű, ha G -nek sok éle van.

Definíció: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén a mátrix **nyoma** (**Spur**/**Trace**) = a főátlóban levő elemek összege:

$$\mathbf{Sp}(\mathbf{A}) := \mathbf{Tr}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{A}]_{i,i} \qquad \square$$

Egyszerű tulajdonságok (??? melyik típus/ok/ra ???) :

Állítás: **i)** *G gráf komplementerének csúcsmátrixa*

$$\mathbf{A}_{\overline{G}} = \mathbb{I} - \mathbf{A}_G$$

ahol $\mathbb{I} = [1]_{n \times n}$,

ii) $\mathbf{A}$ *szimmetrikus a főátlóra* ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), *ill. alternáló = ferdén szimmetrikus* ($\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$),

iii) $Sp(A) = 2 \times$ *a hurokélek száma,*

iv) $\mathbf{A}$ *tetszőleges sorában/oszlopában levő elemek összege = a megfelelő csúcs fokszáma:*

$$\sum_{j=1}^{n} [\mathbf{A}]_{i,j} = \delta(v_i) \quad (i \leq n)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{A}]_{i,j} = \delta(v_j) \quad (j \leq n)$$

v) $\mathbf{A}$ *összes elemének összege* $= 2 \times$ *az élek száma:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j} = 2 \cdot |E|$$

$\square$

Állítás:

i) G kétpólusú *(páros)* $\iff$ **A** *sorok és oszlopok cserélgetésével következő alakúra hozható* :

0_1	X
X^T	0_2

ii) G <u>nem</u> összefüggő $\iff$ **A** *sorok és oszlopok cserélgetésével következő alakúra hozható* :

X_1			
	X_2		
		...	
			X_k

iii) $G \cong H$ $\iff$ *csúcsmátrixaik sor-oszlop cserékkel azonossá tehetők.* $\square$

DE: Ezek csak $\mathcal{O}(n!) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) > \mathcal{O}(2^n)$ "algoritmusok" !

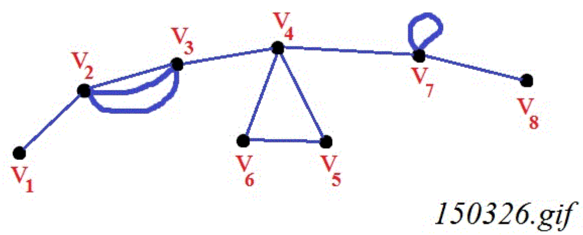
Tétel: *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *számra*

$$\left[\mathbf{A}^k\right]_{i,j} = \text{a } v_i \text{ és } v_j \text{ csúcsok között húzódó, pontosan } k \text{ hosszúságú utak száma.}$$

Bizonyítás: Indukcióval $k \in \mathbb{N}$ -re, $k = 1$ OK, indukciós lépés $k+1$ -re:

$$\left[\mathbf{A}^{k+1}\right]_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} \left[\mathbf{A}^k\right]_{i,t} \cdot [\mathbf{A}]_{t,j} \ . \qquad \square$$

Példa:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{7}} = \begin{bmatrix} 0 & 1216 & 12 & 516 & 57 & 57 & 132 & \boxed{\mathbf{57}} \\ 1216 & 36 & 4164 & 258 & 573 & 573 & 837 & 132 \\ 12 & 4164 & 118 & 1877 & 258 & 258 & 644 & 260 \\ 516 & 258 & 1877 & 504 & 416 & 416 & 914 & 248 \\ 57 & 573 & 258 & 416 & 144 & 145 & 373 & 125 \\ 57 & 573 & 258 & 416 & 145 & 144 & 373 & 125 \\ 132 & 837 & 644 & 914 & 373 & 373 & 1190 & 404 \\ 57 & 132 & 260 & 248 & 125 & 125 & 404 & 134 \end{bmatrix}$$

7 hosszú utak száma v_1 és v_8 között $= v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ és még kettő lépés $=$

$=$ valamelyik v_iv_j oda-vissza $(v_1v_2\ ,\ v_3v_4\ ,\ v_4v_5\ ,\ v_4v_6\ ,\ v_4v_7\ ,\ v_7v_8)$ $+$ v_2v_3 oda-vissza $+$ v_7 hurok kétszer $=$

összesen $= 6 * 3 + 3^3 + 3 * 2^2 = \mathbf{57}$.

Következmények:

i) $\left[\mathbf{A}^k\right]_{i,i} =$ *a* v_i *csúcsból induló,* pontosan k hosszúságú (nem feltétlenül egyszerű) *körök száma,*

ii) *Egyszerű gráf esetén* $[\mathbf{A}^2]_{i,i} = \delta(v_i)$,

iii) *Egyszerű gráf esetén* $Sp(A^3) =$ *a* G *-ben levő háromszögek* (C_3) *száma* $\times\ 6$,

iv) G *-ben* nincs *páratlan/páros hosszúságú kör* $\iff \forall k \in \mathbb{N}$ *páratlan/páros számra* $Sp(A^k) = 0$,

v) G *összefüggő* $\iff$ *az* $\mathbf{Y}$ *mátrixnak* nincs *egyetlen* 0 *eleme sem* :

$$\mathbf{Y} := \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}$$

□

Házi feladat: a fenti algoritmusok $\mathcal{O}(\ldots)$ futásideje.

Algoritmus ("Tintacsöppentős módszer"): a gráf felrajzolása *nélkül.*

Példa: A mátrix ki nem töltött elemei 0 -ák.

	A	B	C	D	E	F	G	H		**k**	**é**	**k**		**p**	**i**	**r**	**o**	**s**
A						2			**o**	x	x	x	x					
B					1							o	x					
C							1							**o**	x	x	x	x
D							1	1								**o**	x	x
E		1				1					**o**	x	x					
F	2				1					**o**	x	x	x					
G			1	1											o	x	x	x
H				1													**o**	x

A gráf komponensei tehát $\{A, B, E, F\}$ és $\{C, D, G, H\}$. □

Következő heti előadásban: útkereső és feszítőfa algoritmusok.

Lásd még **gráfok spektruma** : **A** sajátértékeinek halmaza.

Élmátrixok

= *incidencia-* = *illeszkedési-* mátrixok.

Definíció: $G = (V, E)$ *tetszőleges gráf,* $V = (v_1, ..., v_n)$, $E = (e_1, ..., e_m)$ rögzített felsorolások.
Ekkor $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *ahol*

a) *ha* G *egyszerű*

$$[\mathbf{B}]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha} \;\; v_i \in e_j \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

b) *ha* G *-ben többszörös- és hurokélek is lehetnek, akkor*

$$[\mathbf{B}]_{i,j} := \begin{cases} k & \textit{ha} \;\; v_i \in e_j \;\; k \textit{ -szoros él nem hurok} \\ \mathbf{2}k & \textit{ha} \;\; v_i \in e_j \;\; k \textit{ -szoros hurokél} \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

c) *ha* G *irányított, akkor*

$$[\mathbf{B}]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha } e_j \textit{ nem hurokél és } \text{kezdő}\textit{pontja } v_i \\ -1 & \textit{ha } e_j \textit{ nem hurokél és } \text{vég}\textit{pontja } v_i \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

d) *ha* $G = (V, E)$ *(egyszerű) hipergráf* (halmazrendszer), *akkor*

$$[\mathbf{B}]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha} \;\; v_i \in e_j \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

$\square$

... + súlyozott élek ...

Célszerű, ha kevés él van,

Oszlopok/sorok cserélgetése esetén a sorokat/oszlopokat nem feltétlenül kell cserélgetni,

ÉS exponencilis (lassú) "algoritmusok".

Az alábbiak melyik változat esetén érvényesek:

Állítás: $G \cong H \iff$ *élmátrixaik sorok és oszlopok cserélgetésével azonossá tehetők.* $\square$

Állítás:

i) *egy csúcs izolált* $\iff$ *élmátrixban a csúcs sora* $\underline{0}$,

ii) *egy csúcs fokszáma = sorösszeg,*

iii) *egy él hurokél/hiperél* $\iff$ *a megfelelő oszlopban pontosan egy/több* nemnulla *elem van.* $\square$

Állítás: G páros (kétpólusú) $\iff$ *sorok átrendezhetők*: van *egy vízszintes elválasztó vonal.* $\square$

Állítás: G nem összefüggő $\iff$ *élmátrixa a sorok és oszlopok átrendezésével* blokkosítható:

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{X} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Y} \\ \hline \end{array}$$

$\square$