

Die schriftliche Abschlussprüfung (Bayern, Realschule, Mathematik, Wahlpflichtfächergruppe I) besteht aus einem A-Teil und einem B-Teil.

Der A-Teil besteht aus drei kürzeren Aufgaben A1, A2 und A3.

Eine Aufgabe stammt aus dem Bereich „Ebene Geometrie“.

Eine Aufgabe stammt aus dem Bereich „Raumgeometrie“.

Eine Aufgabe stammt aus dem Bereich „Funktionen“.

Der B-Teil besteht aus zwei längeren Aufgaben B1 und B2.

Die beiden Aufgaben erstrecken sich auf zwei der bereits genannten Themenbereich (Ebene Geometrie, Raumgeometrie, Funktionen).

Die erreichbare Punktezahl ist im B-Teil insgesamt knapp doppelt so groß wie im A-Teil.

(Die Aufgaben sind im B-Teil auch länger bzw. komplexer.)

2016 bzw. 2015 sahen die Verteilung der Themenbereiche und der erreichbaren Punktezahlen beispielsweise folgendermaßen aus:

	Haupttermin 2016	Nachtermin 2016	Haupttermin 2015	Nachtermin 2015
A1	Ebene Geometrie (1+2+2)	Ebene Geometrie (1+2+2)	Raumgeometrie (1+3+1)	Raumgeometrie (2+3)
A2	Funktionen (3+1+1+2+2)	Funktionen (3+1+1+2+2)	Ebene Geometrie (2+3+4)	Ebene Geometrie (2+1+4+2)
A3	Raumgeometrie (2+3)	Raumgeometrie (2+3)	Funktionen (1+2+2)	Funktionen (2+3)
B1	Ebene Geometrie (4+3+2+2+4+2)	Ebene Geometrie (3+3+3+2+2+4)	Funktionen (3+4+2+2+3+3)	Funktionen (4+4+2+2+3+2)
B2	Raumgeometrie (4+1+3+3+4+2)	Raumgeometrie (3+2+4+4+2+2)	Raumgeometrie (2+3+3+2+3+4)	Raumgeometrie (5+1+2+3+3+3)
Teil A	19 Punkte	19 Punkte	19 Punkte	19 Punkte
Teil B1	17 Punkte	17 Punkte	17 Punkte	17 Punkte
Teil B2	17 Punkte	17 Punkte	17 Punkte	17 Punkte

Laut Bayerischem Realschulnetz:

*Die Grundlage für die Abschlussprüfung stellt der Jahrgangsstoff der 10. Klasse dar und das dafür benötigte Grundwissen der vorangegangenen Schuljahre.*

Daher bietet es sich an auch mal einen Blick in den Lehrplan zu werfen, welcher auf der Webseite des ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung) zu finden ist:

<https://www.isb.bayern.de/realschule/lehrplan/realschule-r6/fach--jahrgangsstufenlehrplan-ebene-3/mathematik/10-jahrgangsstufe/716/>

Am Ende dieses Dokuments ist der entsprechende Auszug aus dem Lehrplan auch zu finden.

Zur Prüfungsvorbereitung kann man sich außerdem mit den Abschlussprüfungen der vergangenen Jahre beschäftigen. Diese sind ebenfalls auf der Webseite des ISB zu finden:

<https://www.isb.bayern.de/realschule/leistungserhebungen/abschlusspruefungen-realschule/mathematik/>

Außerdem bietet der STARK-Verlag diese auch in Buchform an.

Im Folgenden gebe ich noch eine grobe Übersicht.

Diese Übersicht stammt aus keiner offiziellen Quelle, sondern wurde von mir erstellt, indem ich die Abschlussprüfungen der letzten Jahre untersucht habe. Ich garantiere daher nicht die Korrektheit oder Vollständigkeit der Übersicht.

Manche Punkte lassen sich nicht ganz eindeutig einem Themengebiet zuordnen, können also auch in einem anderen Themengebiet vorkommen, wenn sie zur Aufgabe passen.

## **Ebene Geometrie**

- Einzeichnen von Punkten oder geometrischen Figuren in bestehende Zeichnungen oder in ein Koordinatensystem
- Flächeninhalt von geometrischen Figuren (Dreiecke, Vierecke)
  - Tipp: Vierecke lassen sich in Dreiecke zerlegen.
- Lösen von Gleichungen (mit oder ohne GTR)
- Berechnung von Bildpunkten unter gewissen Abbildungen:
  - Zentrische Streckung (Achtung: Ist das Streckzentrum der Ursprung?)
  - Orthogonale Affinität
  - Achsenspiegelung
  - Drehung (Achtung: Ist das Drehzentrum der Ursprung? Wird im oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht?)
- Trigonometrie, Berechnung von Seitenlängen oder Winkeln in Dreiecken:
  - Sinus, Kosinus, Tangens in rechtwinkligen Dreiecken
  - Sinussatz
  - Kosinussatz
  - Satz des Pythagoras
- Berechnen von Punktkoordinaten oder Vektorkoordinaten (Kommt immer stark auf die Situation an. Manchmal hat man auch einfach die Koordinaten schon in Abhängigkeit einer Größe gegeben, und soll dann einfach nur ein paar Werte einsetzen.)

## **Raumgeometrie**

### Rotationskörper

- Berechnung von Winkeln, Seitenlängen mit Mitteln der (ebenen) Trigonometrie  
[Oft kann man die Symmetrie ausnutzen und zunächst den halben Winkel bzw. die halbe Seitenlänge berechnen.]
- Berechnung von Volumen oder Oberfläche des Rotationskörpers  
[Hier bietet es sich meistens an, zu Erkennen, dass der kompliziertere Rotationskörper sich in einfachere Körper (Zylinder, Kegel) zerlegen lässt, von denen man Volumen bzw. Oberfläche leichter berechnen kann.]

### Pyramiden, Prismen, Quader:

- Zeichnen von Schrägbildern
- Winkel bzw. Seitenlängen bestimmen (Trigonometrie oder Ausnutzen von Eigenschaften besonderer geometrischer Figuren)
- Volumen berechnen (gegebenenfalls in Abhängigkeit eines Winkels oder einer Streckenlänge)
- Extremwerte; beispielsweise:
  - Begründe, dass das Volumen von ... immer kleiner/größer ist als ...
  - Für welchen Winkel wird das Volumen von ... maximal/minimal? [Nach Aufstellen des Volumens in Abhängigkeit des Winkels in der vorigen Teilaufgabe, meist mit GTR lösbar.]

## Funktionen

- Logarithmusfunktionen
- Exponentialfunktionen
- quadratische Funktionen
- Potenzfunktionen, Funktionen mit negativem Exponenten
- Wurzelfunktionen
- Wachstums- bzw. Abklingprozesse (Exponentialfunktion)
- Einzeichnen von Punkten, geometrischen Figuren, Geraden oder Funktionsgraphen in bestehende Zeichnungen oder in ein Koordinatensystem.
- Ausnutzen von Eigenschaften besonderer geometrischer Figuren, beispielsweise Symmetrie oder Gleichheit von Seitenlängen. (Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, Trapez, Drachenviereck, gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck)
  - Kann für das Einzeichnen der entsprechenden geometrischen Figur gebraucht werden.
  - Kann für die Berechnung der Koordinaten von Eckpunkten (evtl. in Abhängigkeit der  $x$ -Koordinate eines anderen Punktes) gebraucht werden.
- Gleichung eines Trägergraphen ermitteln
- Abbildungen von Funktion:
  - Orthogonale Affinität
  - Parallelverschiebung
- Asymptoten (insbesondere bei Logarithmusfunktionen bzw. Potenzfunktionen mit negativem Exponenten)
- Definitionsbereich, Wertebereich
- Umkehrfunktion
- Längen von Strecken, welche parallel zu einer Koordinatenachse liegen
- Längen von Strecken, welche nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegen
- Berechnen von Flächeninhalten geometrische Figuren (oft in Abhängigkeit von  $x$ )
- Lösen von Gleichungen [oft mit GTR lösbar]
  - Meist im Zusammenhang mit der Frage: Für welchen Wert  $x$  ist ...? Beispielsweise:
    - Für welchen Wert  $x$  wird das Dreieck rechtwinklig.
    - Für welchen Wert  $x$  beträgt der Flächeninhalt 30 FE?
- Schnittpunkte von Funktionen
- Ermitteln von Geraden, welche parallel oder senkrecht zu einer anderen Geraden verlaufen
- Extremwerte; beispielsweise:
  - Für welchen Wert  $x$  wird der Flächeninhalt von ... maximal/minimal? [Meist mit GTR lösbar.]
  - Begründe, dass ... immer kleiner/größer ist als ...

## Sonstiges:

- Einfache Prozentrechnung; Beispielsweise:
  - Bestimme  $x$  so dass ... so und so viel % von ... beträgt.
  - Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens von ... am Gesamtvolumen
- Einbeschreibungsaufgaben: Eine Strecke, ein Teilkörper, etc. ist in Abhängigkeit eines Winkels oder einer Streckenlänge, etc. in einer geometrischen Figur bzw. in einem größeren geometrischen Körper einbeschrieben.
  - Ein Intervall für den Winkel bzw. die Streckenlänge ist angegeben und man soll durch Rechnung eine Intervallgrenze begründen.

## 10 Mathematik I

(5-stündig)

Das mathematische Wissen wird zu einem tragfähigen Fundament für den weiteren schulischen oder beruflichen Weg der Realschulabsolventen ausgebaut. Die Verflechtung von Geometrie und Algebra erfährt mit den Gebieten Trigonometrie und Abbildungen eine besondere Ausprägung.

Beim Erarbeiten und beim Einüben von Lerninhalten aus Algebra und Geometrie vertiefen die Schüler den Umgang mit geeigneten Computerprogrammen und die Verwendung elektronischer Rechenhilfsmittel, wie z. B. des grafikfähigen Taschenrechners.

Offene Aufgabenstellungen sowie Variationen von Aufgaben und Lösungswegen fördern die Vernetzung und Vertiefung der Lerninhalte. Bei der Auswahl von Aufgaben ist auch auf eine enge Verbindung des Themenbereichs 10.4 mit den Themenbereichen 10.1 und 10.2 zu achten.

### Das Grundwissen wird erweitert um:

Grundwissen

- Potenzterme mithilfe der Potenzgesetze umformen
- Graphen und Eigenschaften von Potenzfunktionen mit  $y = x^{\frac{m}{n}}$
- Graphen und Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen
- mithilfe der Definition des Logarithmus und der Benutzung des Taschenrechners Terme umformen und einfache Exponentialgleichungen lösen
- Definition von  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  und  $\tan \varphi$ ; Werte und Winkelmaße mithilfe des Taschenrechners ermitteln
- Seitenlängen und Winkelmaße im rechtwinkligen und im beliebigen Dreieck berechnen
- Skalarprodukt anwenden
- Koordinaten von Bild- und Ursprüngen bei den bekannten Abbildungen berechnen sowie Gleichungen von Bildgraphen ermitteln
- Vektoren und  $2 \times 2$ -Matrizen verwenden

### M 10.1 Potenzen und Potenzfunktionen

(ca. 14 Std.)

Die Schüler lernen die Erweiterung des Potenzbegriffes kennen und erfahren dabei, dass die ihnen bereits bekannten Potenzgesetze weiterhin gelten. Sie eignen sich die Potenzschreibweise für Wurzeln an. Aufbauend auf ihre Fertigkeiten im Umgang mit Funktionen erschließen sie sich die Potenzfunktionen sowie deren Eigenschaften und wenden ihr Wissen in vielfältigen Aufgaben an.

- Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten;  $\sqrt[n]{a}$  als nichtnegative Lösung der Gleichung  $x^n = a$  für  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ ; Potenzgesetze; Umformungen von Potenztermen
- Potenzfunktionen mit  $y = x^{\frac{m}{n}}$  und ihre Umkehrfunktionen; Eigenschaften; Diskussion der Graphen (Parabeln und Hyperbeln  $n$ -ter Ordnung) auch unter Zuhilfenahme elektronischer Rechenhilfsmittel
- Abbilden von Funktionsgraphen durch Parallelverschiebung, Achsenspiegelung ( $y$ -Achse und  $w$  mit  $y = x$  als Spiegelachsen) und orthogonale Affinität ( $x$ -Achse als Affinitätsachse) nur für Funktionen mit  $y = x^n$  bzw.  $y = x^{\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

### M 10.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

(ca. 19 Std.)

Exponentialfunktionen spielen ebenso wie ihre Umkehrfunktionen, die Logarithmusfunktionen, eine tragende Rolle, wenn es darum geht, Wachstums- oder Abklingprozesse in Natur, Wirtschaft und Technik quantitativ zu erfassen und funktional darzustellen. Das Auffinden der Lösung eines charakteristischen Beispiels soll die Schüler zunächst zur

Gleichung einer Exponentialfunktion führen. Sie untersuchen die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und ihren Umkehrfunktionen, werden mit dem Begriff des Logarithmus vertraut und lernen Exponentialgleichungen zu lösen. Mithilfe dieser neuen Erkenntnisse werden die Schüler befähigt, auch Vorgänge aus vielen Bereichen ihrer Umwelt mathematisch zu erfassen und zu beschreiben. Dabei erkennen sie Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Methoden.

- Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen (Logarithmusfunktionen); Eigenschaften; Diskussion der Graphen auch unter Zuhilfenahme elektronischer Rechenhilfsmittel
- Definition des Logarithmus  $\log_b a$ ; Logarithmensätze und deren Anwendung bei Termumformungen; Berechnen von Logarithmen zu einer beliebigen Basis;  $\lg x$  (dekadischer Logarithmus) am Taschenrechner (aus der Geschichte: die Entwicklung von Rechenhilfsmitteln)
- Gleichungen, die sich auf die Form  $a \cdot b^{x+c} + d = 0$  bringen lassen
- Aufgaben über Wachstums- und Abklingprozesse
- Funktionen mit  $y = a \cdot b^{x+c} + d$  bzw.  $y = a \cdot \log_b(x+c) + d$ ; Umkehrfunktionen ermitteln; Abbilden der Funktionsgraphen durch Parallelverschiebung, Achsenspiegelung (y-Achse und w mit  $y = x$  als Spiegelachsen) und orthogonale Affinität (x-Achse als Affinitätsachse)

### M 10.3 Trigonometrie

(ca. 52 Std.)

Die Schüler lernen Polarkoordinaten als eine weitere Möglichkeit zur Darstellung von Punkten und Punktmenge kennen und erarbeiten den Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten. Sie eignen sich Kenntnisse über rechnerische Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkelmaßen im Dreieck an und lernen, auch solche Längen- und Winkelmaße zu berechnen, die sie bisher nur konstruktiv bestimmen konnten. Dabei erhalten sie auch einen Einblick in die Rolle trigonometrischer Funktionen und Berechnungen in Bereichen wie Vermessungswesen, Technik und Physik. Darüber hinaus erkennen die Schüler, dass sich mithilfe des Skalarprodukts von Vektoren der Lösungsweg bei vielen Aufgaben erheblich vereinfachen lässt.

#### Definition von Kosinus, Sinus, Tangens (ca. 10 Std.)

- Polarkoordinaten von Punkten bzw. Vektoren
- Zeichnen von Punktmenge, die durch Polarkoordinaten beschrieben sind
- Definition von  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  als kartesische Koordinaten eines Einheitsvektors  $\vec{OP}$  mit  $P(1|\varphi)$ ; Wertebereiche;  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$
- Definition von  $\tan \varphi$  und Darstellung von  $\tan \varphi$  am Einheitskreis; Zusammenhang zwischen der Steigung  $m$  einer Geraden  $g$  und dem Maß des Winkels zwischen der x-Achse und  $g$

#### Trigonometrische Funktionen (ca. 2 Std.)

- Bogenmaß
- Funktionen mit  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  und  $y = \tan x$  und ihre Graphen

#### Berechnungen und Zusammenhänge (ca. 8 Std.)

- $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\tan \varphi$  für  $\varphi \in \{0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$ ; Ermitteln von Werten für  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\tan \varphi$  mithilfe eines Taschenrechners
- $\varphi$  aus  $\cos \varphi = a$ ,  $\sin \varphi = a$ ,  $\tan \varphi = a$  für  $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$  ermitteln; Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten
- Komplement- und Supplementbeziehungen für  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ ;  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  und  $\tan \varphi$  für negativ orientierte Winkel
- äquivalente Terme zu  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ,  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2}$  und  $\cos \frac{\alpha}{2}$  ermitteln

**Berechnungen in Dreiecken (ca. 20 Std.)**

- Berechnen von Seitenlängen und Innenwinkelmaßen im rechtwinkligen Dreieck und im beliebigen Dreieck (Sinussatz und Kosinussatz)
- Bearbeiten von Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten und Extremwertuntersuchungen; Lösen von goniometrischen Gleichungen, die sich bei derartigen Aufgaben ergeben

**Skalarprodukt (ca. 12 Std.)**

- orthogonale Vektoren und Skalarprodukt; Verknüpfungsgesetze; Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel
- Anwenden des Skalarprodukts von Vektoren (Nachweis der Orthogonalität; Berechnung von Winkelmaßen; Ermitteln des Abstands von Punkt und Gerade, der Koordinaten von Punkten mit besonderen Eigenschaften und der Werte für Formvariablen unter speziellen Bedingungen)

**M 10.4 Abbildungen im Koordinatensystem****(ca. 35 Std.)**

Die Schüler lernen, für jede der ihnen bereits bekannten geometrischen Abbildungen der Ebene jeweils die Abbildungsvorschrift mithilfe von Vektoren und Matrizen in einheitlicher algebraischer Form anzugeben. Damit und mit den bereits erworbenen Fertigkeiten im Umgang mit trigonometrischen Termen werden sie befähigt, Abbildungen zu algebraisieren und auch Problemstellungen aus der ebenen Geometrie der vorhergehenden Jahrgangsstufen aufzugreifen und mithilfe von Abbildungen algebraisch zu lösen.

- Multiplikation einer  $2 \times 2$ -Matrix mit einem Vektor
- Parallelverschiebung
- Drehung (bei Drehung mit Drehzentrum ungleich Ursprung keine Verwendung einer Formel)
- Achsenspiegelung (beliebige Ursprungsgerade als Spiegelachse)
- zentrische Streckung (Streckung mit Streckungszentrum ungleich Ursprung ohne Verwendung einer Formel)
- orthogonale Affinität ( $x$ -Achse als Affinitätsachse)
- Verknüpfung der genannten Abbildungen (Verzicht auf die Multiplikation von  $2 \times 2$ -Matrizen)
- Berechnen der Koordinaten von Bild- bzw. Ursprungspunkten sowie von Fixpunkten und der Gleichungen von Bildgeraden für die genannten Abbildungen
- Berechnen der Gleichungen von Bildparabeln zweiter Ordnung bei Parallelverschiebung, zentrischer Streckung und orthogonaler Affinität ( $x$ -Achse als Affinitätsachse)
- Berechnen der Gleichungen von Bildgraphen, die bei der Abbildung von Graphen zu Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen entstehen
- spezielle Aufgaben der ebenen Geometrie mithilfe von Abbildungen geometrisch und algebraisch lösen (insbesondere Einbeschreibungsaufgaben; Gleichungen von Trägergraphen und von geometrischen Ortslinien)