Matematik A-niveau
22. maj 2015
Delprøve 1

Løst af Anders Jørgensen

Opgave 1 - *Lineær Funktioner*

Vi ved, at år 2001 er vores begyndelses år, dvs. vores model passer fra år 2001 og efter. Vi får angivet tallene a og b for a er -8 og b er 190. Tallene beskriver antallet af pengeinstitutter der lukker i et bestemt land. Vi har:

$f(x) := -8\,x + 190$

$$f(x) := -8\,x + 190 \tag{1.1}$$

Fordi tallet a fortæller, at for hvert år der går, lukkes 8 pengeinstitutter i landet, hvor tallet b fortæller, at i år 2001 var antallet af pengeinstitutter på 190.

Opgave 2 - *Funktioner*

Grafen A tilhører potensfunktioner, idet A er en voksende funktion, hvor a ligger mellem 0 og 1. Der ses også, at potensfunktionen aldrig kommer over på anden kvadrant, derfor er det en potensfunktion.

Grafen B tilhører eksponentialfunktioner, idet eksponentialfunktioner har en b værdi på 1, og da den er aftagende, må a ligge mellem 0 og 1. Eksponentialfunktioner må - i modsætning til potensfunktioner - godt ramme y-aksen.

Grafen C tilhører lineære funktioner, idet der er tale om en ret linje, og på grafen ses det, at funktionen er aftagende.

Opgave 3 - *Tredjegradsligning*

$x = 3$

$$x = 3 \tag{3.1}$$

Vi undersøger om det er løsningen til ligningen.

$x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15 = 0$

$$x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15 = 0 \tag{3.2}$$

Vi indsætter 3.

$3^3 - 9\cdot 3^2 + 23\cdot 3 - 15 = 0:$
$27 - 81 + 69 - 15 = 0:$

$27+69-81-15=0:$
$96-96=0:$
$0=0:$

Dvs. $x=3$ er løsningen til ligningen.

Opgave 4 - *Differentialregning*

Vi skal benytte tangentligningen $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ Først finder vi vores $f(0)$ og efterfølgende $f'(0)$.

$f(x)=5\cdot e^x+4$

$$f(x)=5\,e^x+4 \tag{4.1}$$

Differentieres.

$f'(x)=5\cdot e^x+0$

$$\frac{d}{dx}f(x)=5\,e^x \tag{4.2}$$

Der indsættes for punktet
$P(0,f(0))$

$$P(0,f(0)) \tag{4.3}$$

$f(0)=5\cdot e^0+4=5\cdot 1+4=9:$

$f'(0)=5\cdot e^0=5\cdot 1=5:$

Disse indsættes i tangentligningen.

$y=5\cdot(x-0)+9:$

$y=5\,x+9$

$$y=5\,x+9 \tag{4.4}$$

Som er tangentlinjen til f.

Opgave 5 - *Integralregning*

For at finde ud af, hvilken funktion der er stamfunktion til f, kan vi prøve at integrere f. Vi gør sådan:

$\int \frac{5}{x}+2\,x\,dx:$

Vi benytter vores regneregler. Da $\frac{1}{x}$ er $\ln|x|$ ved vi, at $\frac{5}{x}$ er $5\cdot\ln|x|$. Vi ved dog at $x>0$ så numerisk tegn er unødvendig.

$F(x) = 5 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \left(\frac{1}{1+1}\right) x^{1+1} + k = 5 \cdot \ln(x) + \frac{2}{2} x^2 + k = 5 \cdot \ln(x) + x^2 + k.$

Dvs. at $h(x)$ er den integrerede af $f(x)$ uden konstanten k. Differentieres $h(x)$ fås $f(x)$.

Opgave 6 - *Differentialregning*

Først findes monotoniforholdene for g, og da man ser, at den lineære funktion g' rammer førsteaksen i punktet $P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, og selve g's retning og hældning, kan man argumentere for, at:

g er aftagende i intervallet $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ og g er voksende i intervallet $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$

Fordi når g' er under førsteaksen, er den oprindelige funktion g aftagende, hvorimod hvis g' er over førsteaksen, så er den oprindelig funktion g voksende.

Vi vil finde koordinatsættet for R, ved først at lave en lineær funktion af g', og dette kan laves på to måder, idet to punkter kendes, nemlig P og Q. Vi beregner værdien a.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-0.5)} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Derved kan værdien b beregnes.

$$b = y_1 - ax_1 = 0 - 2 \cdot (-0.5) = 1$$

Vi har derfor en ret linje kaldet
$g'(x) = 2x + 1$

$$\frac{d}{dx} g(x) = 2x + 1 \qquad \textbf{(6.1)}$$

Vi skal nu undersøge, om hvornår f og g har den samme tangenthældning. Vi sætter derfor
$f'(x) = g'(x)$

$5 = 2x + 1 \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2$

Så koordinatsættet til R, hvor f og g vil have samme tangenthældning vil være $(2, 5)$.