Osłona ryzyka pozycji w akcjach za pomocą opcji

Maciej Capiński

Wydział Matematyki Stosowanej AGH

15 kwietnia 2016

Plan referatu

1. VaR definicja, własności, przykłady
2. Osłona VaR za pomocą opcji
3. Warunkowa wartość narażona na ryzyko: CVaR
4. Osłona CVaR za pomocą opcji
5. Porównanie z osłoną za pomocą sterowania stochastycznego

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

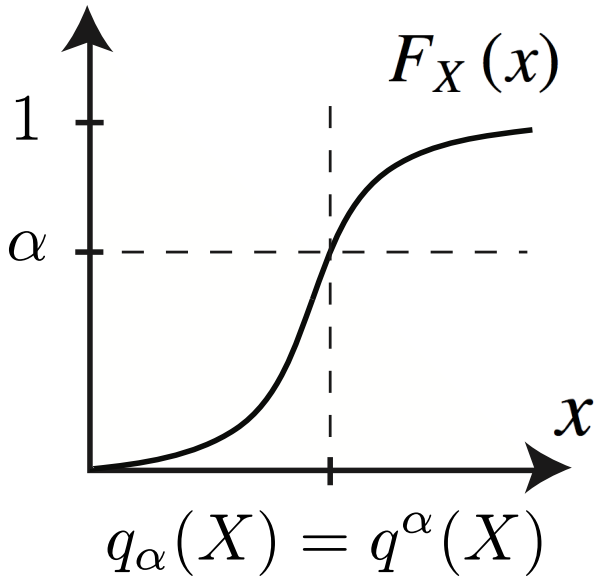
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

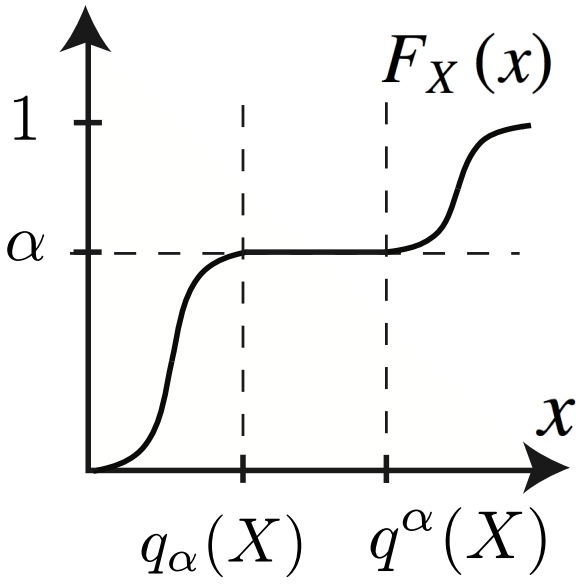
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

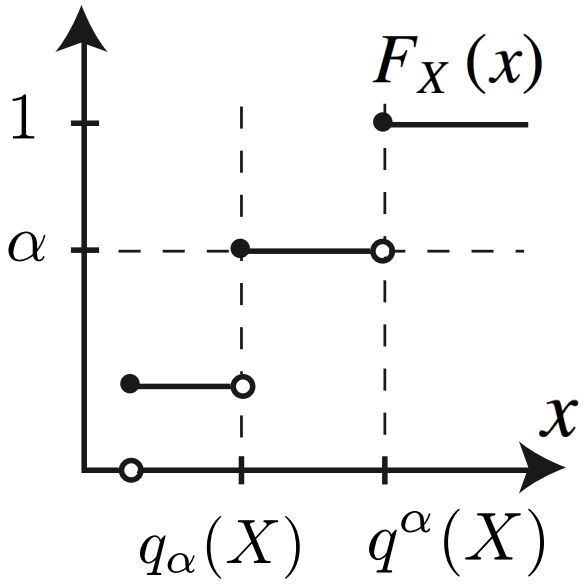
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

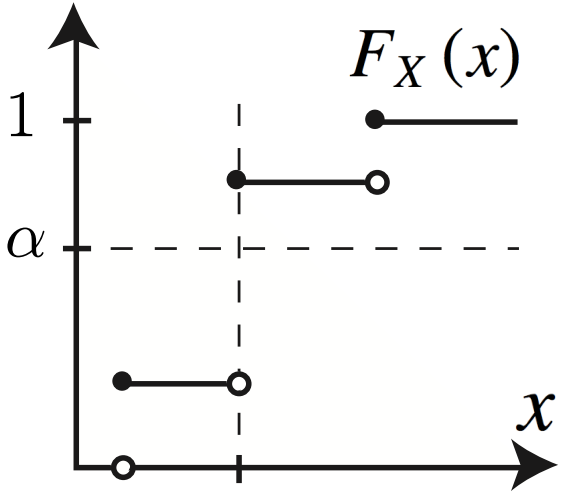
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$q_{\alpha}(X) = q^{\alpha}(X)$

α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

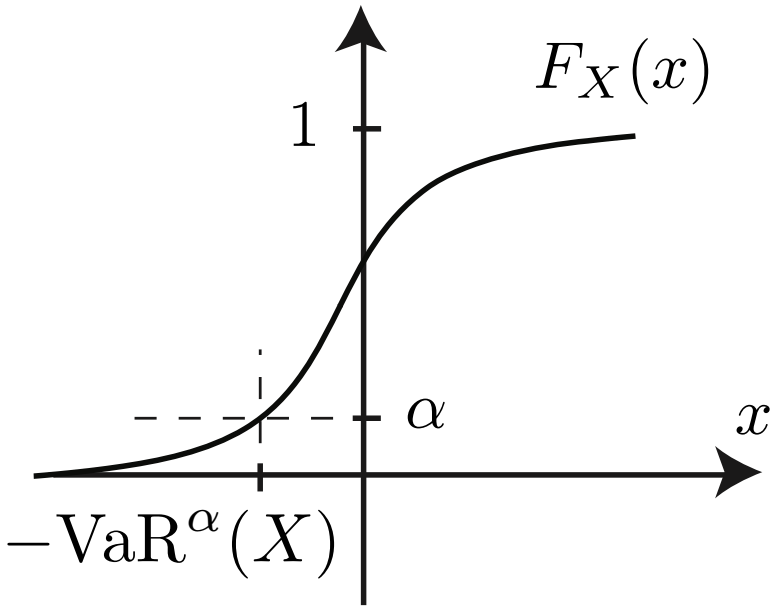
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

X przychód z inwestycji.

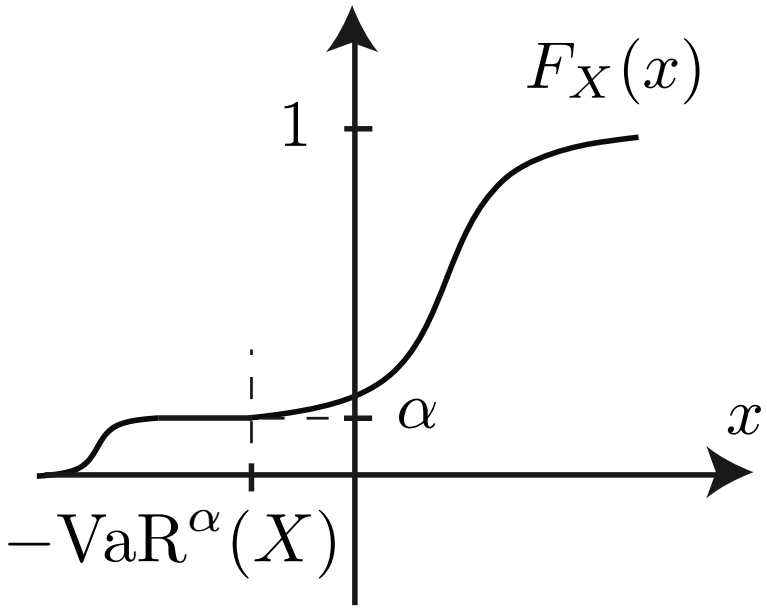
kwantyl (górny)

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



α to mała liczba: 1%, 2%, 5%.

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

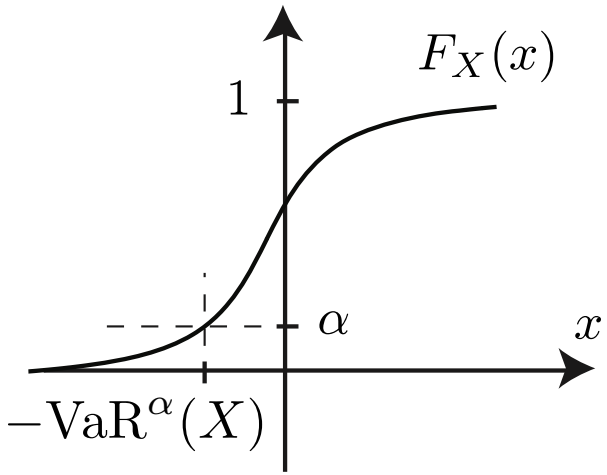
z punktu widzenia gęstości

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

'Prawdopodobieństwo, że strata przekroczy *VaR* jest małe'

$\alpha = 1\%,\ 2\%,\ 5\%$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

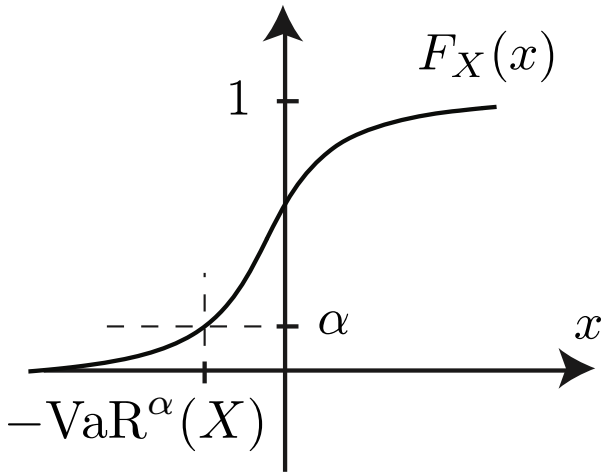
z punktu widzenia gęstości

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

'Prawdopodobieństwo, że strata przekroczy *VaR* jest małe'

$\alpha = 1\%,\ 2\%,\ 5\%$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

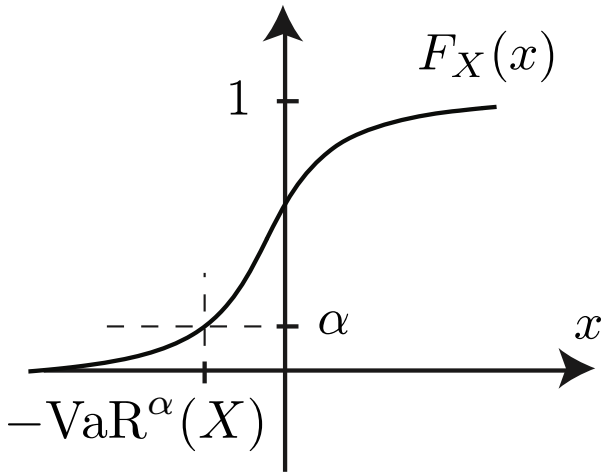
z punktu widzenia gęstości

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

'Prawdopodobieństwo, że strata przekroczy *VaR* jest małe'

$\alpha = 1\%,\ 2\%,\ 5\%$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

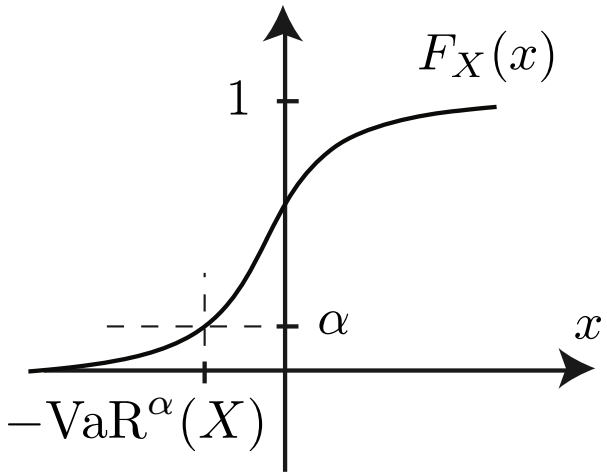
z punktu widzenia gęstości

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

'Prawdopodobieństwo, że strata przekroczy *VaR* jest małe'

$\alpha = 1\%,\ 2\%,\ 5\%$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

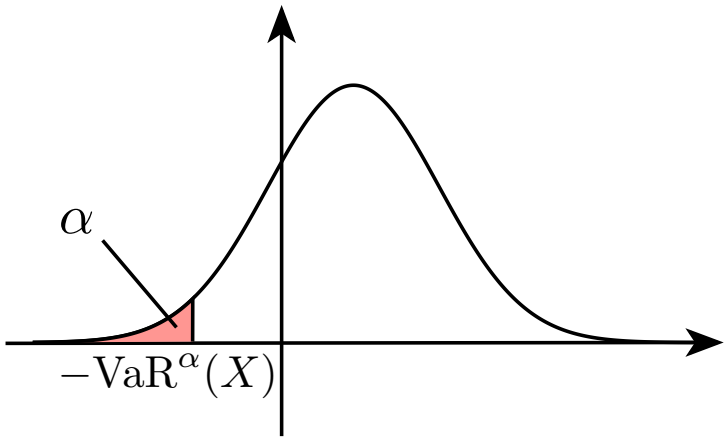
z punktu widzenia gęstości

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

'Prawdopodobieństwo, że strata przekroczy *VaR* jest małe'

$\alpha = 1\%,\ 2\%,\ 5\%$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

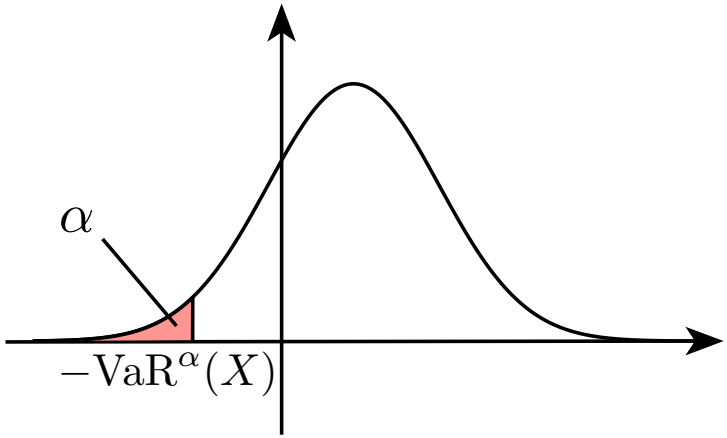
alternatywny warunek

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

Lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = \inf\{x : P(x < -X) \leqslant \alpha\}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

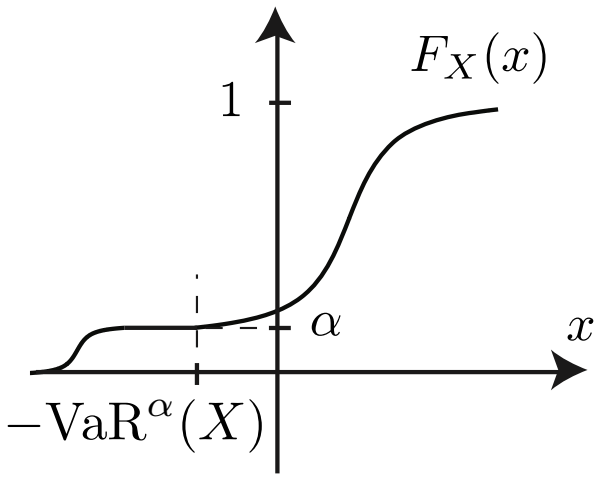
alternatywny warunek

$$q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

Definicja

VaR definiujemy jako

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$



$$\begin{aligned}\alpha &= F_X\left(-VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(X \leqslant -VaR^{\alpha}(X)\right)\\ &= P\left(VaR^{\alpha}(X) \leqslant -X\right)\end{aligned}$$

Lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = \inf\{x : P(x < -X) \leqslant \alpha\}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

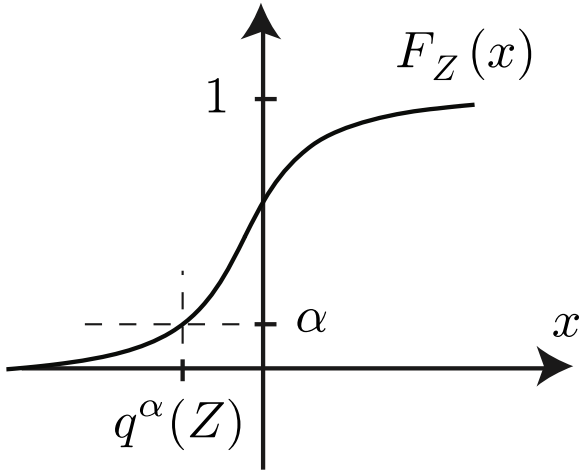
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

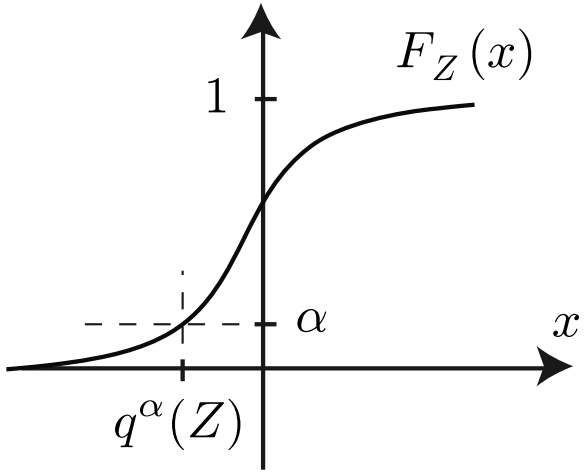
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

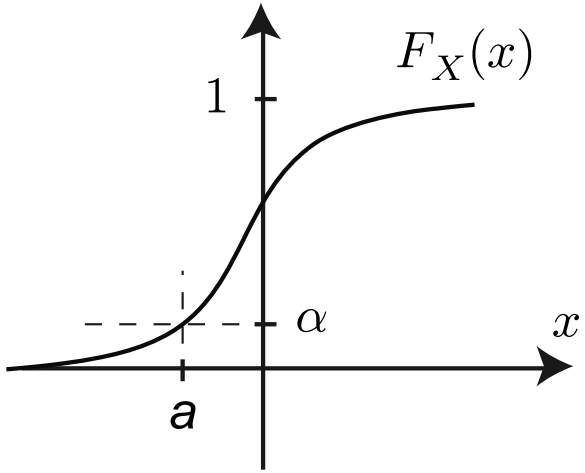
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

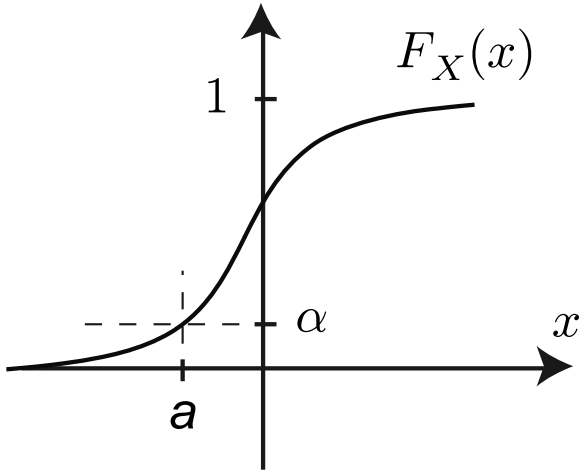
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

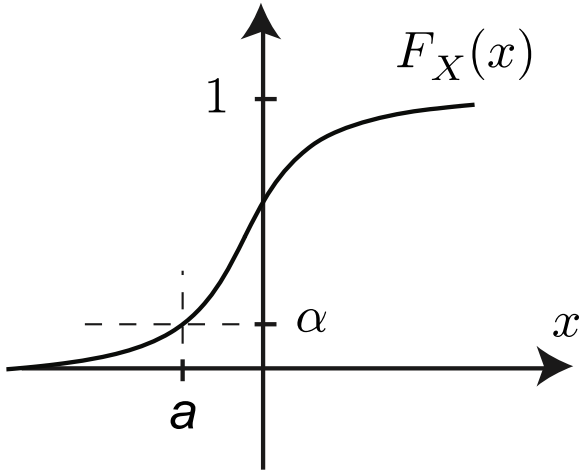
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

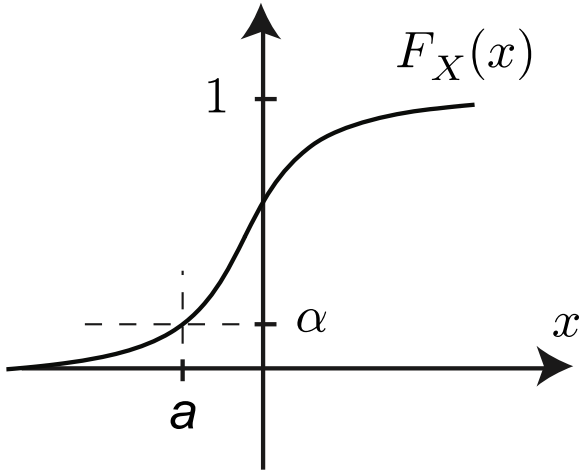
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Wartość narażona na ryzyko (VaR)

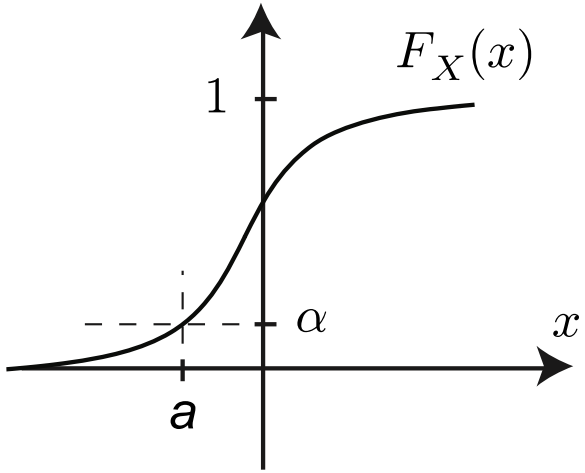
(bardzo) Przydatny lemat

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to dla $X = f(Z)$

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



szkic dowodu:
(dla f i F_Z silnie rosnącej)

$$F_Z(q^{\alpha}(Z)) = \alpha.$$

$$a := f(q^{\alpha}(Z))$$

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(f(Z) \leqslant a) \\ &= P(Z \leqslant f^{-1}(a)) \\ &= P(Z \leqslant q^{\alpha}(Z)) \\ &= F_Z(q^{\alpha}(Z)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

■

Przydatny lemat

Model Blacka-Scholesa

$$X = f(Z)$$

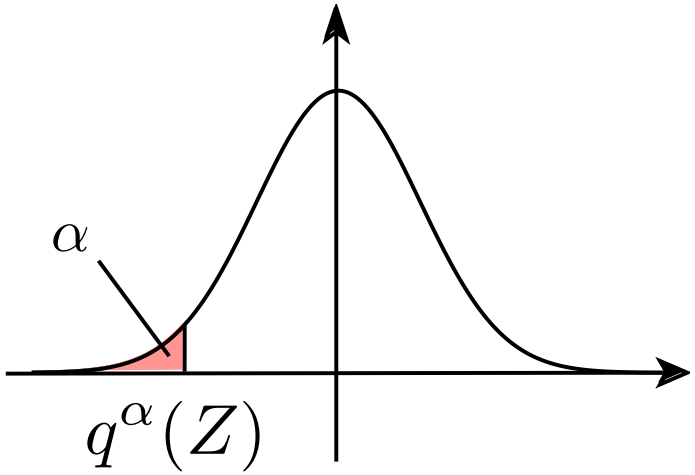
$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



$$f(z) = e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - S(0)$$

$$VaR^{\alpha}(X) = S(0) - e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z)}$$

Przydatny lemat

Model Blacka-Scholesa

$$X = f(Z)$$

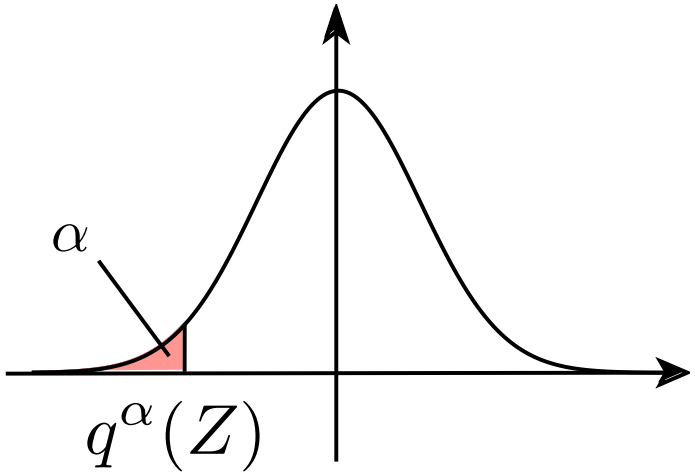
$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



$$f(z) = e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - S(0)$$

$$VaR^{\alpha}(X) = S(0) - e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z)}$$

Przydatny lemat

Model Blacka-Scholesa

$$X = f(Z)$$

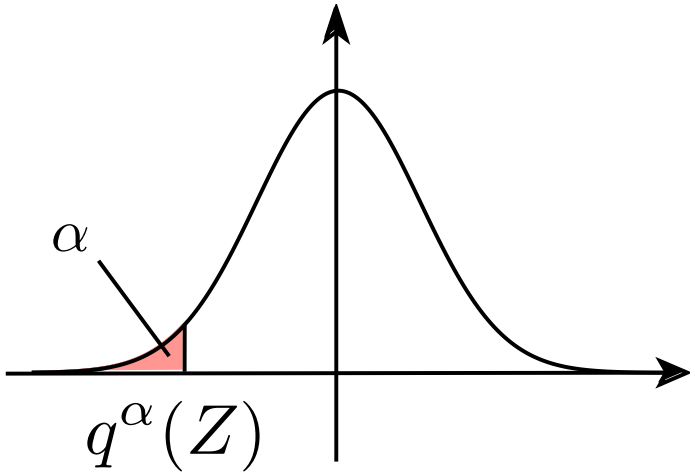
$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0)$$

Lemat

Jeżeli f jest ciągła i niemalejąca to

$$VaR^{\alpha}(X) = -f(q^{\alpha}(Z)).$$



$$f(z) = e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - S(0)$$

$$VaR^{\alpha}(X) = S(0) - e^{-rT}S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z)}$$

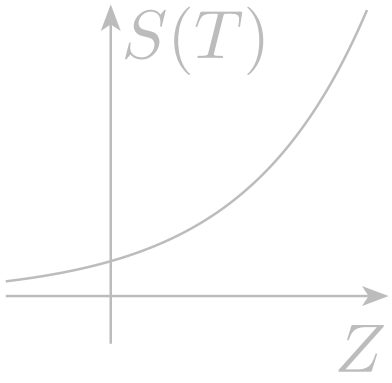
Osłona VaR opcjami

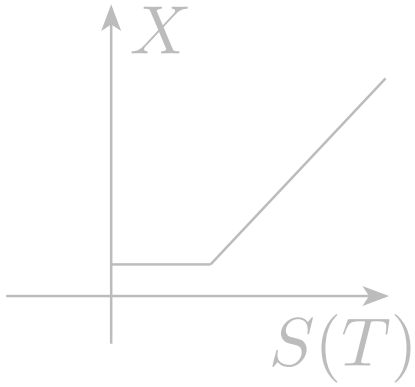
Example

- Kupujemy akcję za $S(0) = 100$. Cena spada do 90. Tracimy 10.
- Jeśli posiadamy opcję sprzedaży z $K = 95$ to stracimy 5 (nie 10)

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + (K - S(T))^+\right] - [S(0) + P(K)]$$





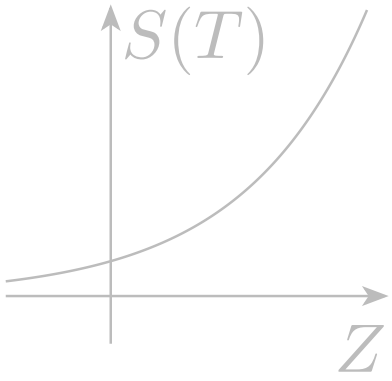
Osłona VaR opcjami

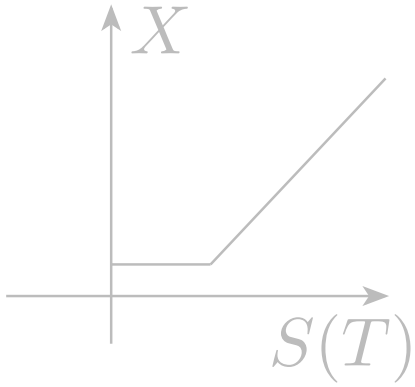
Example

- Kupujemy akcję za $S(0) = 100$. Cena spada do 90. Tracimy 10.
- Jeśli posiadamy opcję sprzedaży z $K = 95$ to stracimy 5 (nie 10)

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + (K - S(T))^+\right] - [S(0) + P(K)]$$





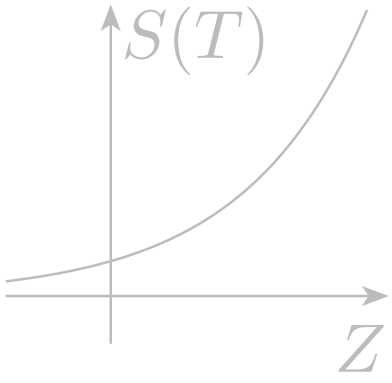
Osłona VaR opcjami

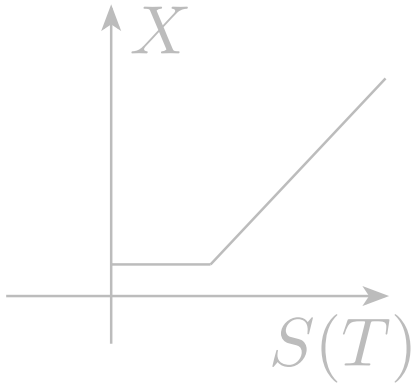
Example

- Kupujemy akcję za $S(0) = 100$. Cena spada do 90. Tracimy 10.
- Jeśli posiadamy opcję sprzedaży z $K = 95$ to stracimy 5 (nie 10)

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + (K - S(T))^+\right] - [S(0) + P(K)]$$





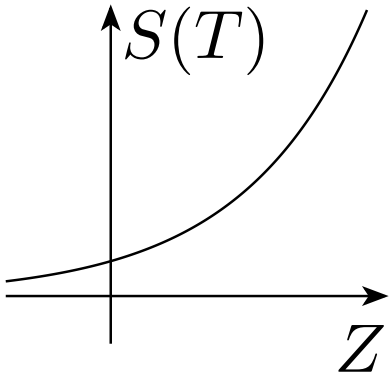
Osłona VaR opcjami

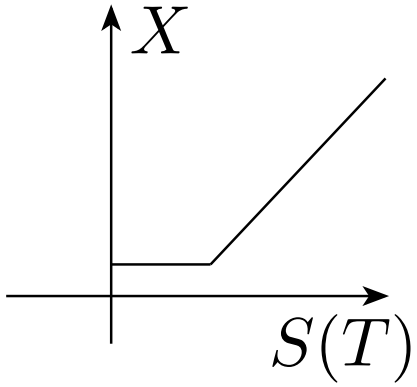
Example

- Kupujemy akcję za $S(0) = 100$. Cena spada do 90. Tracimy 10.
- Jeśli posiadamy opcję sprzedaży z $K = 95$ to stracimy 5 (nie 10)

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + (K - S(T))^+\right] - [S(0) + P(K)]$$





Osłona VaR opcjami

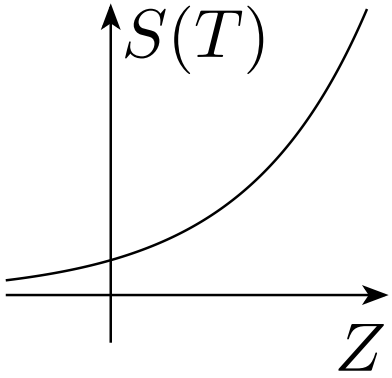
$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

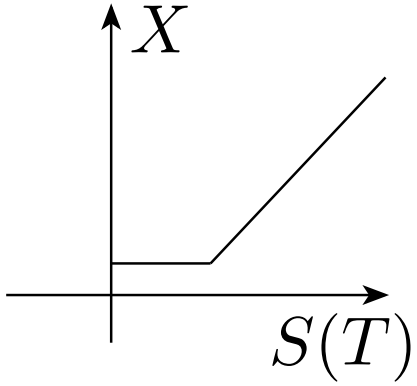
$$X = e^{-rT}\left[S(T) + (K - S(T))^+\right] - [S(0) + P(K)]$$

Lemat

$$VaR(X) = S(0) + P(K) - e^{-rT}\left[S^\alpha + (K - S^\alpha)^+\right]$$

$$S^\alpha = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^\alpha(Z)}$$





Osłona VaR opcjami

$h \leqslant 1$ opcji put

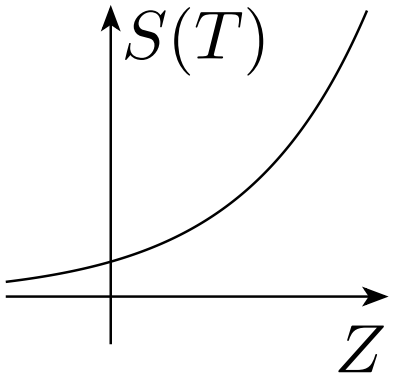
$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

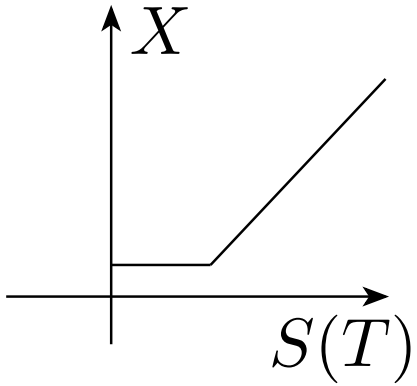
$$X = e^{-rT}\left[S(T) + h\left(K - S(T)\right)^+\right] - \left[S(0) + hP(K)\right]$$

Lemat

$$VaR\left(X\right) = S(0) + hP(K) - e^{-rT}\left[S^\alpha + h\left(K - S^\alpha\right)^+\right]$$

$$S^\alpha = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^\alpha(Z)}$$





Osłona VaR opcjami

$h \leqslant 1$ opcji put

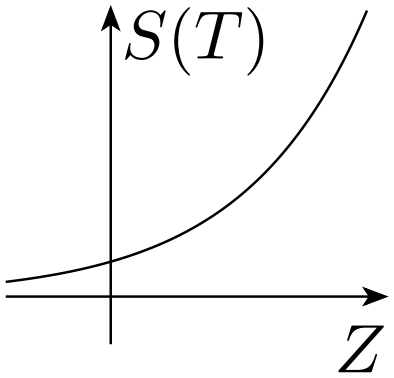
$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

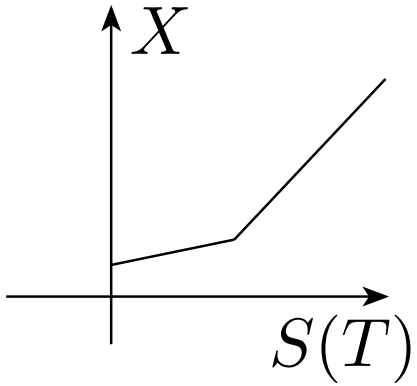
$$X = e^{-rT}\left[S(T) + h\left(K - S(T)\right)^+\right] - \left[S(0) + hP(K)\right]$$

Lemat

$$VaR\left(X\right) = S(0) + hP(K) - e^{-rT}\left[S^\alpha + h\left(K - S^\alpha\right)^+\right]$$

$$S^\alpha = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^\alpha(Z)}$$





Osłona VaR opcjami

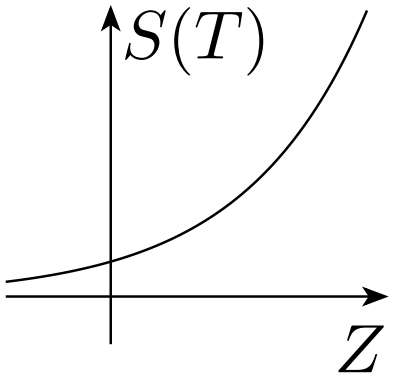
Inwestujemy c na osłonę

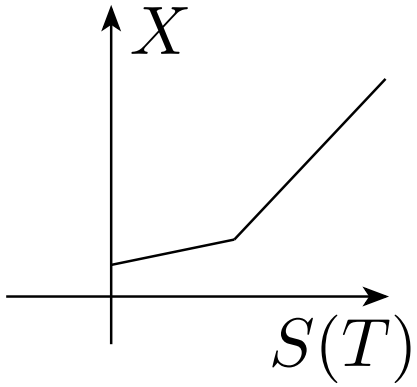
$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \tfrac{c}{P(K)}\left(K - S(T)\right)^{+}\right] - \left[S(0) + c\right]$$

Lemat

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\left(K - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

$$S^{\alpha} = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z)}$$





Osłona VaR opcjami

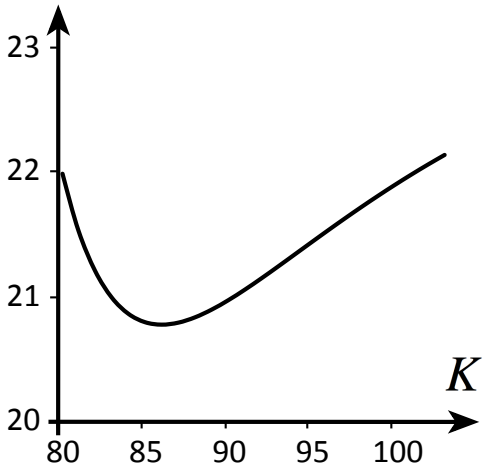
Zależność od K

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \tfrac{c}{P(K)}\left(K - S(T)\right)^{+}\right] - \left[S(0) + c\right]$$

Lemat

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\left(K - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

$$S^{\alpha} = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z)}$$



$S\left(0\right) = 100,$

$\mu = 0.1, \qquad \sigma = 0.2,$

$r = 3\%, \qquad T = 1,$

$\alpha = 5\%, \qquad c = 10.$

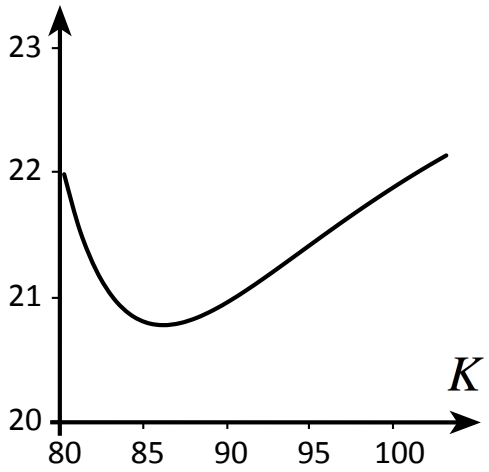
Wybór ceny realizacji

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}\left(t\right) = \begin{bmatrix} H_1\left(t\right) \\ \vdots \\ H_n\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(T\right)\right] - \left[S(0) + c\right].$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

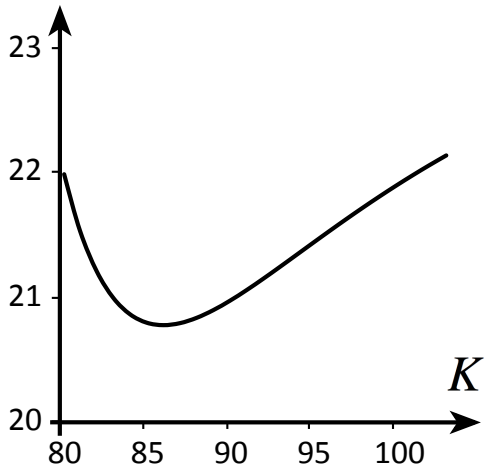
Wybór ceny realizacji

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}\left(t\right) = \begin{bmatrix} H_1\left(t\right) \\ \vdots \\ H_n\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(T\right)\right] - \left[S(0) + c\right].$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

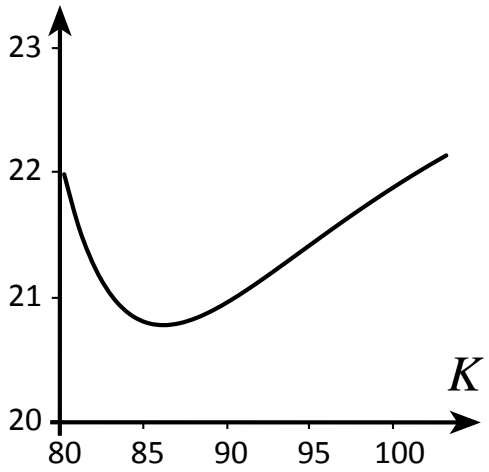
Wybór ceny realizacji

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}\left(t\right) = \begin{bmatrix} H_1\left(t\right) \\ \vdots \\ H_n\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(T\right)\right] - \left[S(0) + c\right].$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

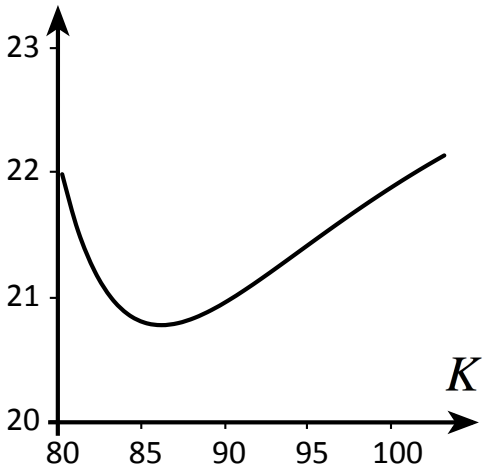
Wybór ceny realizacji

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}\left(t\right) = \begin{bmatrix} H_1\left(t\right) \\ \vdots \\ H_n\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(T\right)\right] - \left[S(0) + c\right].$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

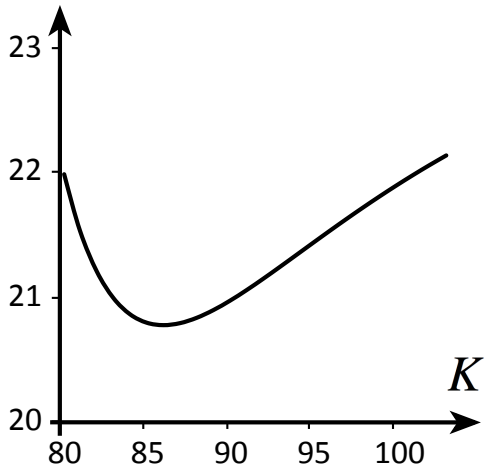
Wybór ceny realizacji

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}\left(t\right) = \begin{bmatrix} H_1\left(t\right) \\ \vdots \\ H_n\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(T\right)\right] - \left[S(0) + c\right].$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

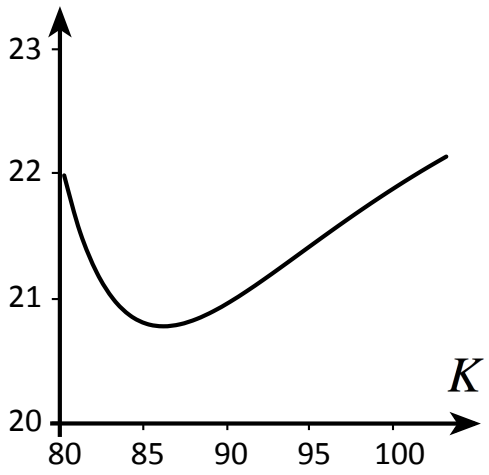
$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

Problem liniowy

$$VaR\left(X_1\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K_1)}\left(K_1 - S^{\alpha}\right)^{+}\right]$$

Mamy opcje put o cenach realizacji $K_1, \ldots, K_n$.

$$\begin{aligned} &\min -\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha} \\ &\text{p.w. } \mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1 \\ &\qquad \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c \\ &\qquad \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$



Twierdzenie

Jeśli $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{1} \leqslant 1$ *oraz* $\mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}\left(0\right) = c$, *to*

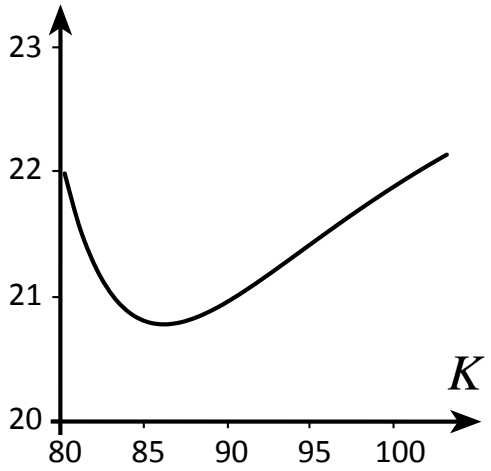
$$VaR\left(X\right) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \mathbf{z}^{\top}\mathbf{H}^{\alpha}\right]$$

VaR jest miarą z problemami

Lemat

$$VaR\,(X) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\,(K - S^{\alpha})^{+}\right]$$

- Jeśli $K < S^{\alpha}$, to opcja nie zmniejsza VaR^{α}, $\quad (K - S^{\alpha})^{+} = 0$
- Krótka pozycja w takiej opcji zmniejsza VaR^{α} (!?!)

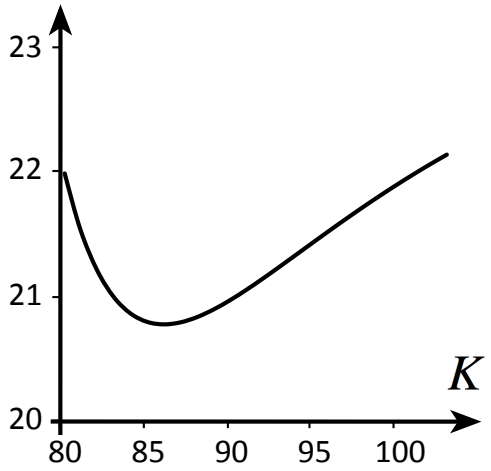


VaR jest miarą z problemami

Lemat

$$VaR\,(X) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\,(K - S^{\alpha})^{+}\right]$$

- Jeśli $K < S^{\alpha}$, to opcja nie zmniejsza VaR^{α}, $\qquad (K - S^{\alpha})^{+} = 0$
- Krótka pozycja w takiej opcji zmniejsza VaR^{α} (!?!)

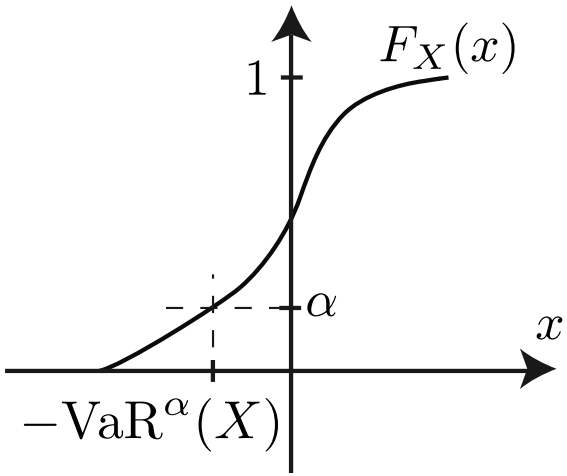


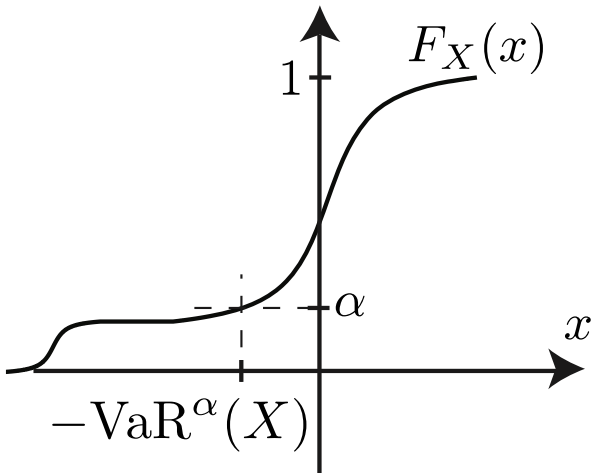
VaR jest miarą z problemami

Lemat

$$VaR\,(X) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\,(K - S^{\alpha})^{+}\right]$$

- Jeśli $K < S^{\alpha}$, to opcja nie zmniejsza VaR^{α}, $\qquad (K - S^{\alpha})^{+} = 0$
- Krótka pozycja w takiej opcji zmniejsza VaR^{α} (!?!)



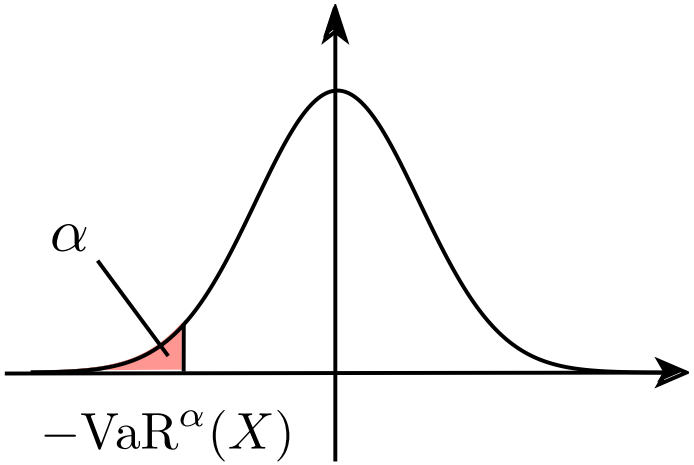


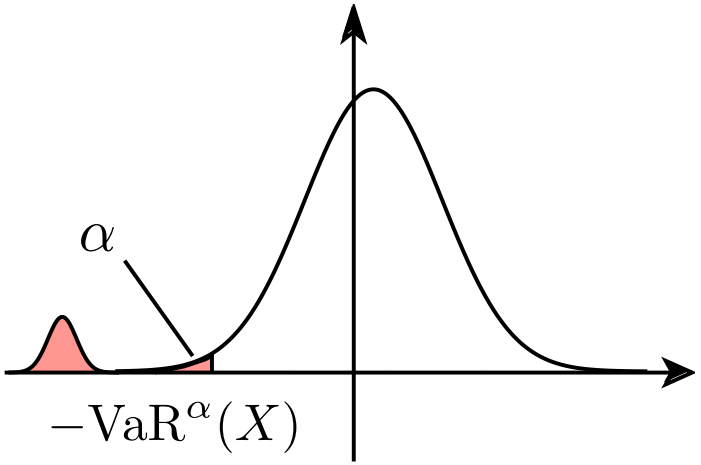
VaR jest miarą z problemami

Lemat

$$VaR\,(X) = S(0) + c - e^{-rT}\left[S^{\alpha} + \frac{c}{P(K)}\,(K - S^{\alpha})^{+}\right]$$

- Jeśli $K < S^{\alpha}$, to opcja nie zmniejsza VaR^{α}, $\qquad (K - S^{\alpha})^{+} = 0$
- Krótka pozycja w takiej opcji zmniejsza VaR^{α} (!?!)



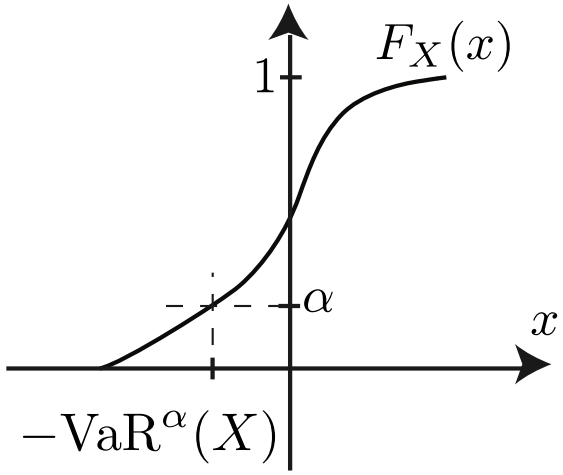


Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$CVaR^{\alpha}$ definiujemy jako

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Twierdzenie

$CVaR^{\alpha}$ jest koherentną miarą ryzyka:

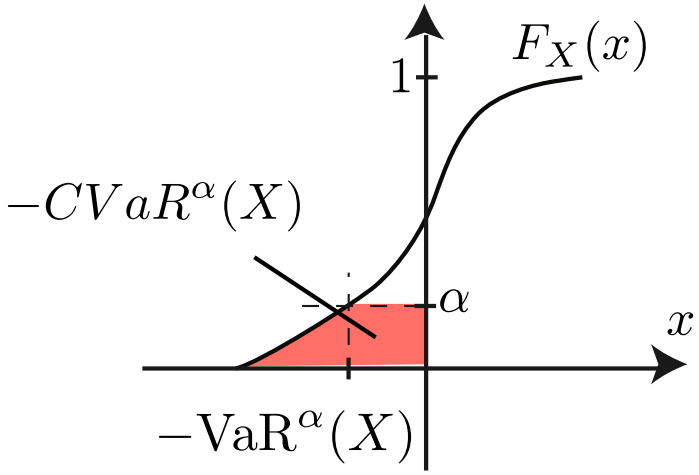
- *Jeśli $X \leqslant Y$ to $CVaR^{\alpha}(X) \geqslant CVaR^{\alpha}(Y)$*
- $CVaR^{\alpha}(X+m) = CVaR^{\alpha}(X) - m$
- $CVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda CVaR^{\alpha}(X)$
- $CVaR^{\alpha}(X+Y) \leqslant CVaR^{\alpha}(X) + CVaR^{\alpha}(Y)$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$CVaR^{\alpha}$ definiujemy jako

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Twierdzenie

$CVaR^{\alpha}$ jest koherentną miarą ryzyka:

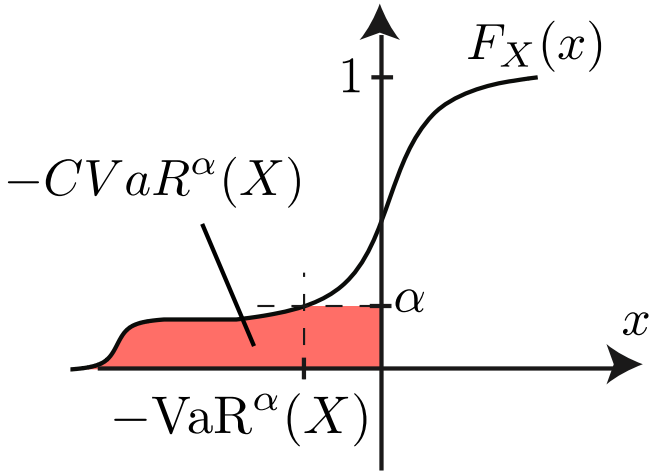
- *Jeśli $X \leqslant Y$ to $CVaR^{\alpha}(X) \geqslant CVaR^{\alpha}(Y)$*
- $CVaR^{\alpha}(X+m) = CVaR^{\alpha}(X) - m$
- $CVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda CVaR^{\alpha}(X)$
- $CVaR^{\alpha}(X+Y) \leqslant CVaR^{\alpha}(X) + CVaR^{\alpha}(Y)$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$CVaR^{\alpha}$ definiujemy jako

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Twierdzenie

$CVaR^{\alpha}$ jest koherentną miarą ryzyka:

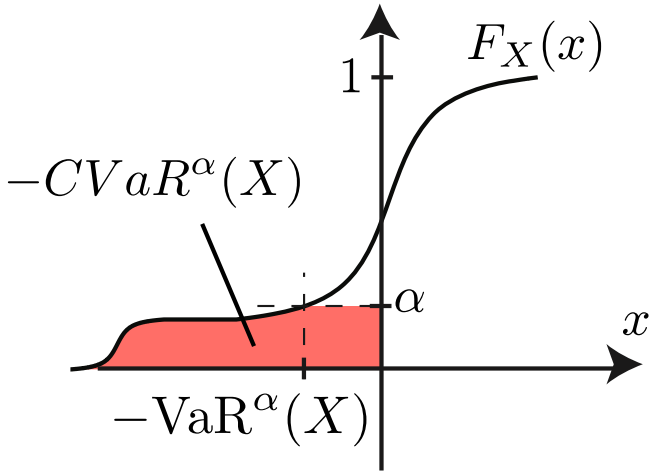
- *Jeśli $X \leqslant Y$ to $CVaR^{\alpha}(X) \geqslant CVaR^{\alpha}(Y)$*
- $CVaR^{\alpha}(X+m) = CVaR^{\alpha}(X) - m$
- $CVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda CVaR^{\alpha}(X)$
- $CVaR^{\alpha}(X+Y) \leqslant CVaR^{\alpha}(X) + CVaR^{\alpha}(Y)$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$CVaR^{\alpha}$ definiujemy jako

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Twierdzenie

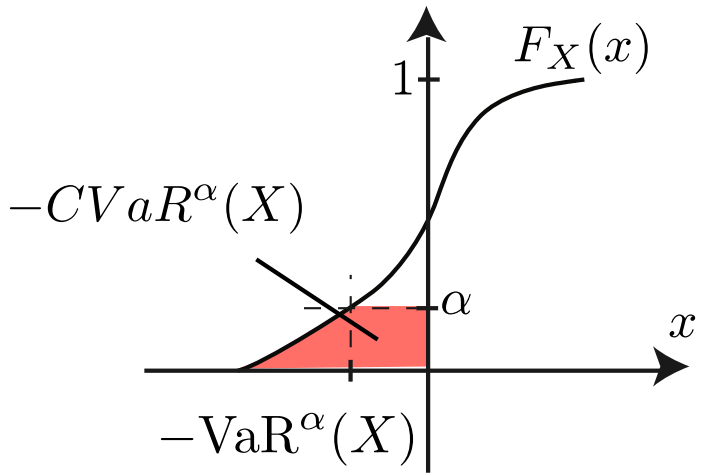
$CVaR^{\alpha}$ jest koherentną miarą ryzyka:

- *Jeśli $X \leqslant Y$ to $CVaR^{\alpha}(X) \geqslant CVaR^{\alpha}(Y)$*
- $CVaR^{\alpha}(X+m) = CVaR^{\alpha}(X) - m$
- $CVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda CVaR^{\alpha}(X)$
- $CVaR^{\alpha}(X+Y) \leqslant CVaR^{\alpha}(X) + CVaR^{\alpha}(Y)$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

Dowód:

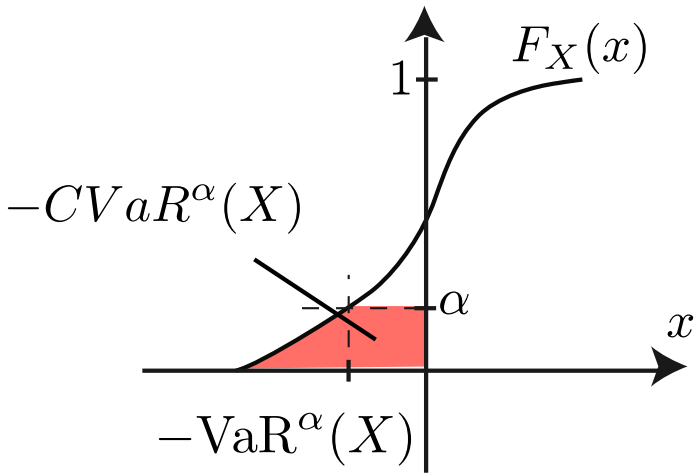
$$\begin{aligned} CVaR^{\alpha}(X) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(\beta)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q^{\alpha}(X)} x f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

■

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

Dowód:

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(\beta)\, d\beta$$

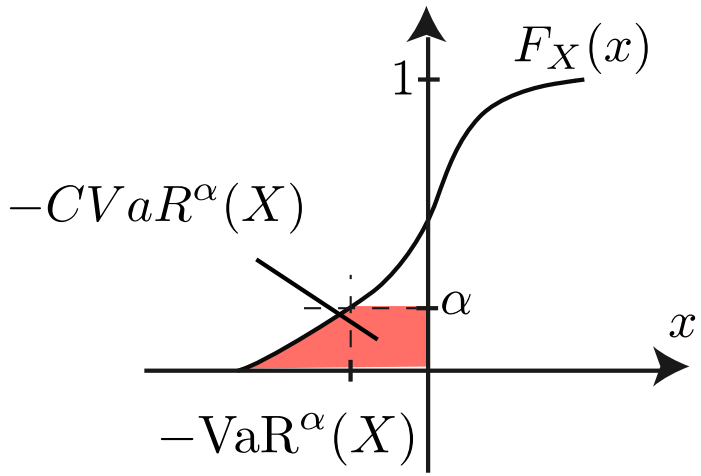
$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q^{\alpha}(X)} x f_X(x)\, dx$$

■

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

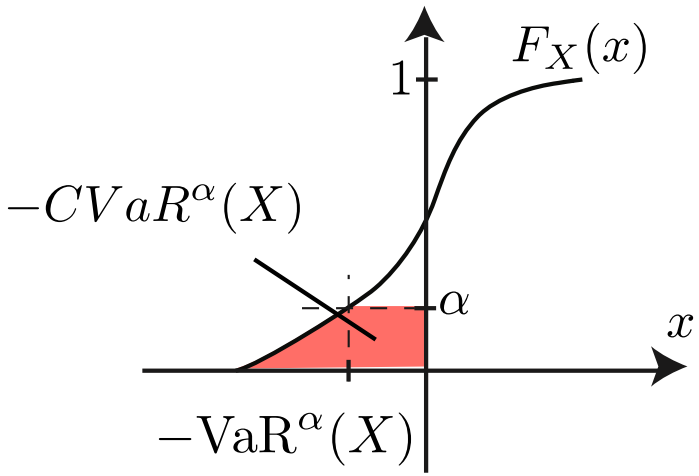
Dowód:

$$\begin{aligned} CVaR^{\alpha}(X) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(\beta)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q^{\alpha}(X)} x f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} CVaR^{\alpha}(X) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(\beta)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q^{\alpha}(X)} x f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

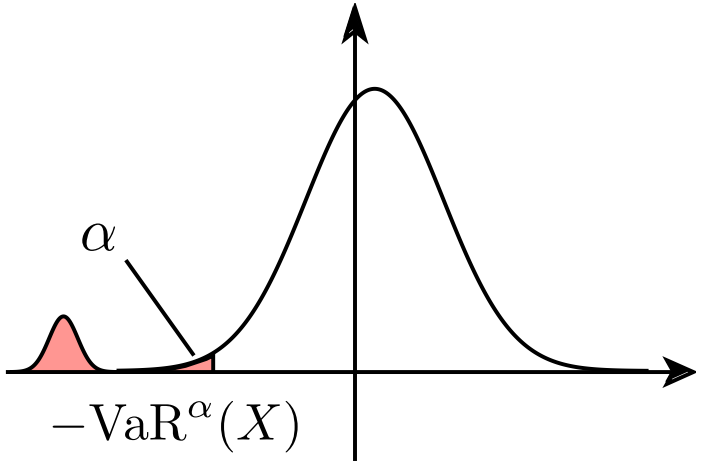
■

$$x = F_X^{-1}(\beta) \qquad \beta = F_X(x) \qquad d\beta = f_X(x)dx$$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} CVaR^{\alpha}(X) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(\beta)\, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q^{\alpha}(X)} x f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

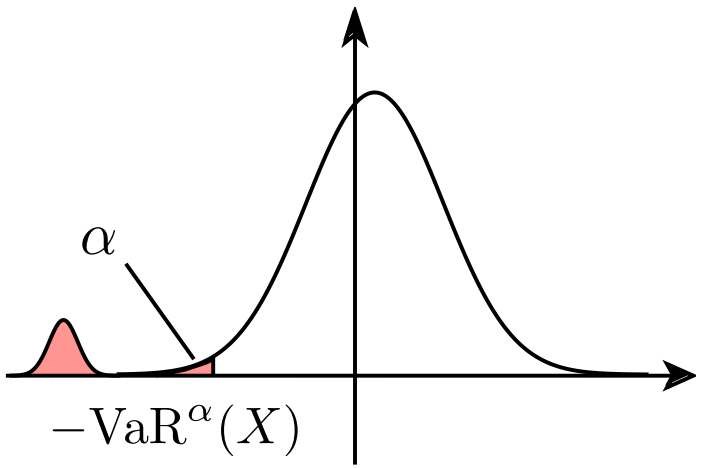
■

$$x = F_X^{-1}(\beta) \qquad \beta = F_X(x) \qquad d\beta = f_X(x)dx$$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Lemat

Jeśli X ma rozkład ciągły to

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right)$$

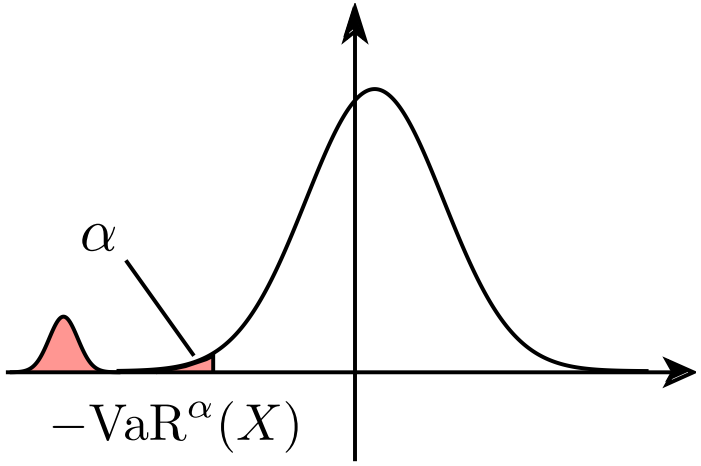
Wniosek

$$CVaR^{\alpha}(X) = \mathbb{E}\left(-X|-X > VaR^{\alpha}(X)\right)$$

Warunkowa wartość narażona na ryzyko CVaR

Definicja

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$



Twierdzenie

Ogólnie

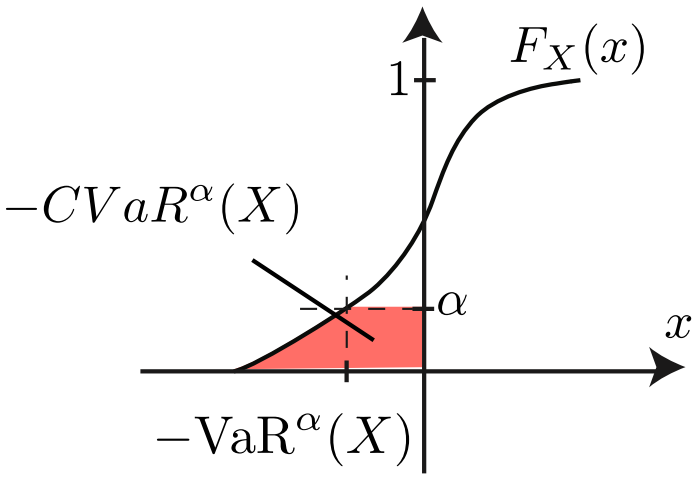
$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\left[\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X<q^{\alpha}(X)\}}\right) + q^{\alpha}(X)\left(\alpha - P\left(X < q^{\alpha}(X)\right)\right)\right]$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

Lemat

$$CVaR^{\alpha}\left(e^{-rT}S(T) - S(0)\right)$$
$$= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)\, e^{(\mu-r)T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right)$$



Dowód:

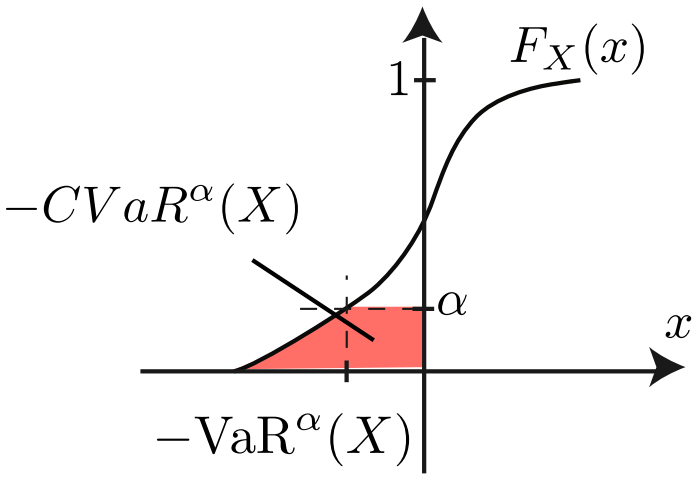
$$\int_0^{\alpha} q^{\beta}(S(T))\, d\beta = \int_0^{\alpha} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} q^{\beta}(Z)}\, d\beta$$
$$= \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x}\, dx$$
$$= S(0) \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu T} e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}}\, dx$$
$$= S(0)\, e^{\mu T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

Lemat

$$CVaR^{\alpha}\left(e^{-rT}S(T) - S(0)\right)$$
$$= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)\, e^{(\mu-r)T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right)$$



Dowód:

$$\int_0^{\alpha} q^{\beta}(S(T))\, d\beta = \int_0^{\alpha} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} q^{\beta}(Z)}\, d\beta$$

$$= \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x}\, dx$$

$$= S(0) \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu T} e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}}\, dx$$

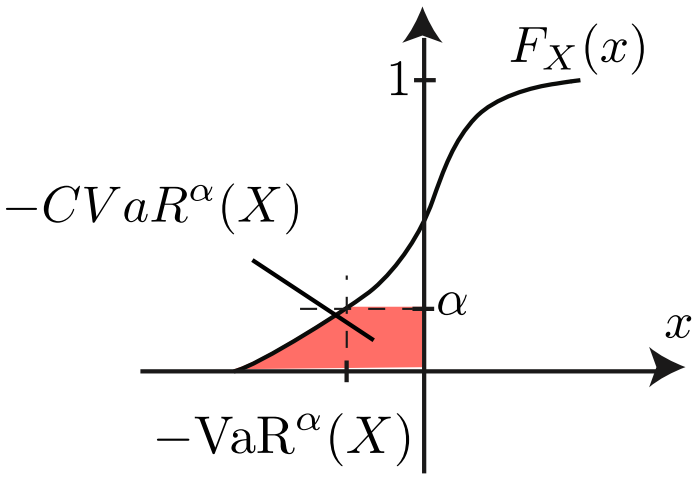
$$= S(0)\, e^{\mu T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

Lemat

$$CVaR^{\alpha}\left(e^{-rT}S(T) - S(0)\right)$$
$$= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)\, e^{(\mu-r)T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right)$$



Dowód:

$$\int_0^{\alpha} q^{\beta}(S(T))\, d\beta = \int_0^{\alpha} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} q^{\beta}(Z)} d\beta$$
$$= \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x} dx$$
$$= S(0) \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu T} e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}} dx$$
$$= S(0)\, e^{\mu T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

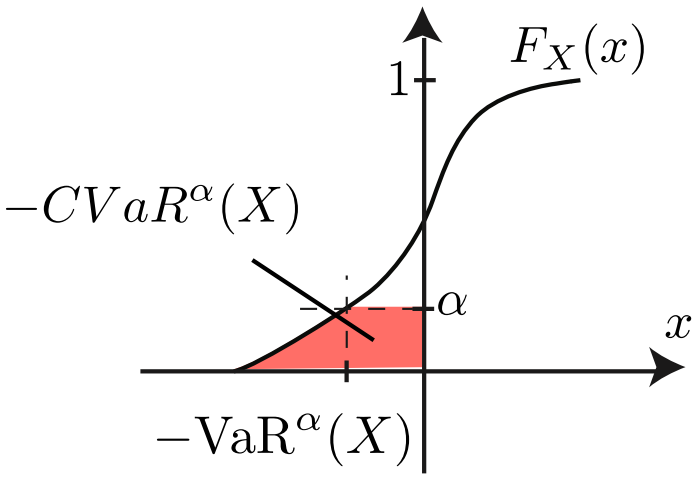
$$x = q^{\beta}(Z) = \Phi^{-1}(\beta) \qquad \beta = \Phi(x) \qquad d\beta = \phi(x)\, dx$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

Lemat

$$CVaR^{\alpha}\left(e^{-rT}S(T) - S(0)\right)$$
$$= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)\, e^{(\mu-r)T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right)$$



Dowód:

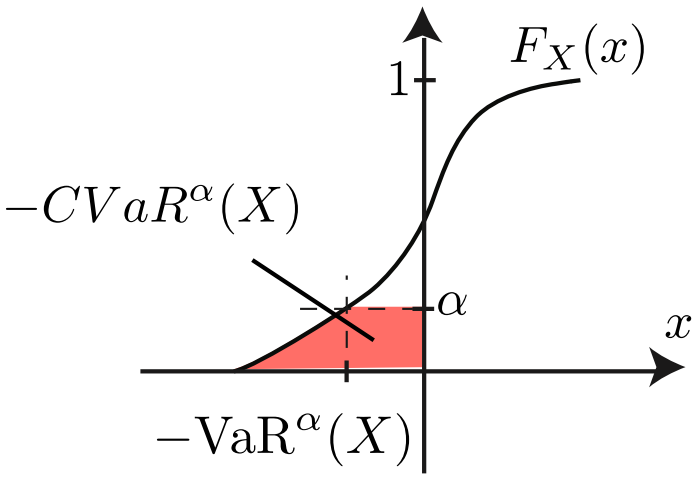
$$\int_0^{\alpha} q^{\beta}(S(T))\, d\beta = \int_0^{\alpha} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} q^{\beta}(Z)}\, d\beta$$
$$= \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x}\, dx$$
$$= S(0) \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu T} e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}}\, dx$$
$$= S(0)\, e^{\mu T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)\, d\beta$$

Lemat

$$CVaR^{\alpha}\left(e^{-rT}S(T) - S(0)\right)$$
$$= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)\, e^{(\mu-r)T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right)$$



Dowód:

$$\int_0^{\alpha} q^{\beta}(S(T))\, d\beta = \int_0^{\alpha} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} q^{\beta}(Z)} d\beta$$
$$= \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x} dx$$
$$= S(0) \int_0^{q^{\alpha}(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu T} e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}} dx$$
$$= S(0)\, e^{\mu T} N\left(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

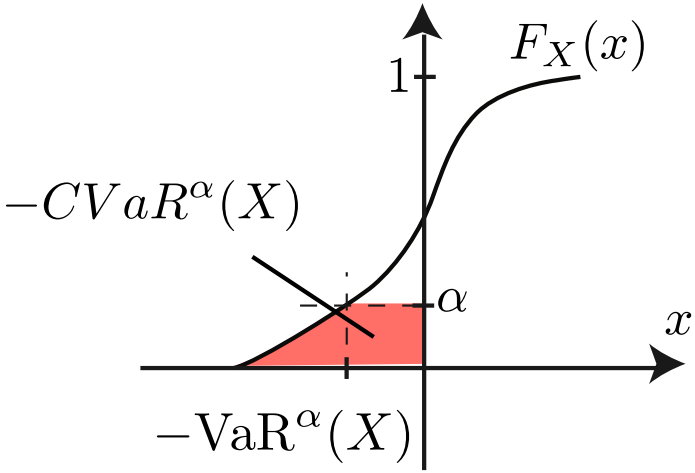
CVaR w modelu Blacka-Scholesa

Podobnie można obliczyć:

$$\int_0^\alpha q^\beta\left([K-S(T)]^+\right)d\beta$$

$$= \int_0^\alpha [K - S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}q^\beta(Z)}]^+ d\beta$$

$$= \ldots$$



Dowód:

$$\int_0^\alpha q^\beta\left(S(T)\right)d\beta = \int_0^\alpha S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}q^\beta(Z)}d\beta$$

$$= \int_0^{q^\alpha(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}x}dx$$

$$= S(0)\int_0^{q^\alpha(Z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu T}e^{-\frac{\left(x-\sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}}dx$$

$$= S(0)\,e^{\mu T}N\left(q^\alpha(Z)-\sigma\sqrt{T}\right) \qquad \blacksquare$$

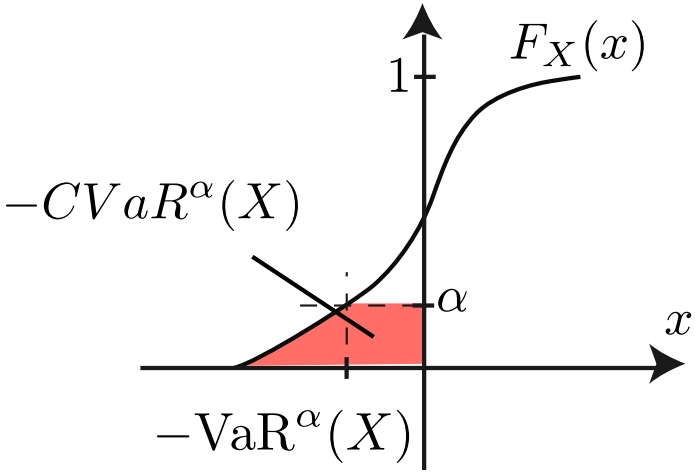
CVaR w modelu Blacka-Scholesa

Podobnie można obliczyć:

$$\int_0^\alpha q^\beta\left([K-S(T)]^+\right)d\beta$$

$$= \int_0^\alpha [K - S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}q^\beta(Z)}]^+ d\beta$$

$$= \ldots$$



Rozważmy

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + h(K-S(T))^+\right] - \left[S(0) + hP(K)\right]$$

Twierdzenie

$$CVaR^\alpha(X) = [S(0) + hP(K)] - \frac{1}{\alpha}e^{(\mu-r)}\left(S(0)\,N\left(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) + hP^\alpha(K)\right)$$

gdzie

$$P^\alpha(K) = Ke^{-\mu T}N\left(-d_-^{\mu,\alpha}\right) - S(0)\,N\left(-d_+^{\mu,\alpha}\right).$$

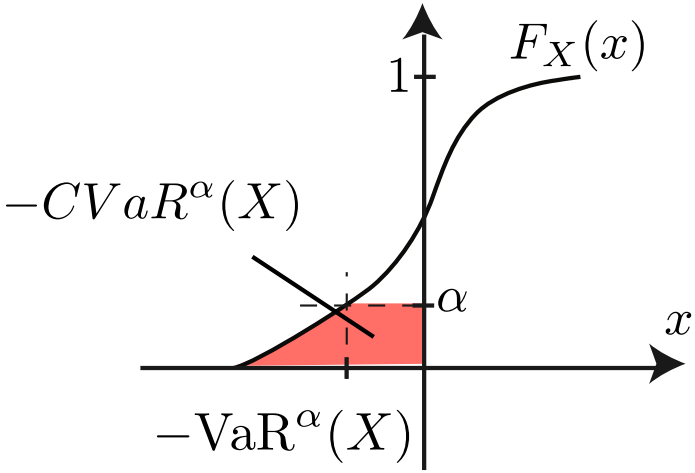
CVaR w modelu Blacka-Scholesa

Podobnie można obliczyć:

$$\int_0^\alpha q^\beta\left([K-S(T)]^+\right)d\beta$$

$$= \int_0^\alpha [K - S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}q^\beta(Z)}]^+ d\beta$$

$$= \ldots$$



Rozważmy

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + h(K-S(T))^+\right] - \left[S(0) + hP(K)\right]$$

Twierdzenie

$$CVaR^\alpha(X) = [S(0) + hP(K)] - \frac{1}{\alpha}e^{(\mu-r)}\left(S(0)\,N\left(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}\right) + hP^\alpha(K)\right)$$

gdzie

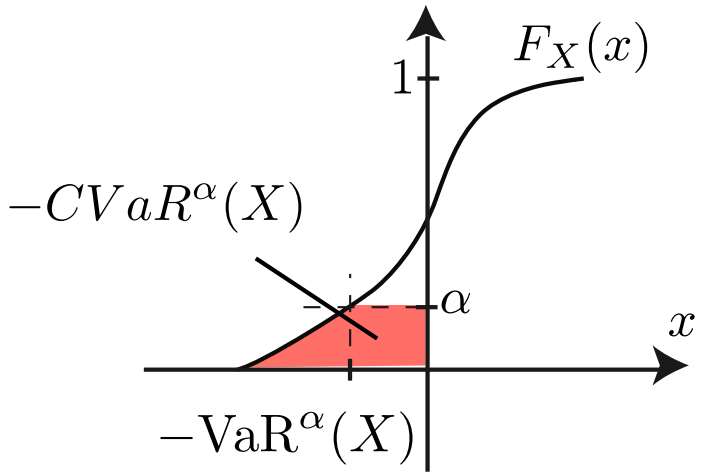
$$P^\alpha(K) = Ke^{-\mu T}N\left(-d_-^{\mu,\alpha}\right) - S(0)\,N\left(-d_+^{\mu,\alpha}\right).$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

Kilka cen realizacji

problem liniowy:

$$\begin{aligned} \min\ & -\mathbf{z}^\top \mathbf{P}^\alpha \\ \text{p.w. } & \mathbf{z}^\top \mathbf{H}(0) = c \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{1} \leqslant 1 \\ & \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$



Twierdzenie

$$CVaR^\alpha(X) = [S(0) + hP(K)] - \frac{1}{\alpha} e^{(\mu - r)} \left(S(0)\, N\left(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T} \right) + hP^\alpha(K) \right)$$

gdzie

$$P^\alpha(K) = Ke^{-\mu T} N\left(-d_-^{\mu,\alpha}\right) - S(0)\, N\left(-d_+^{\mu,\alpha}\right).$$

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

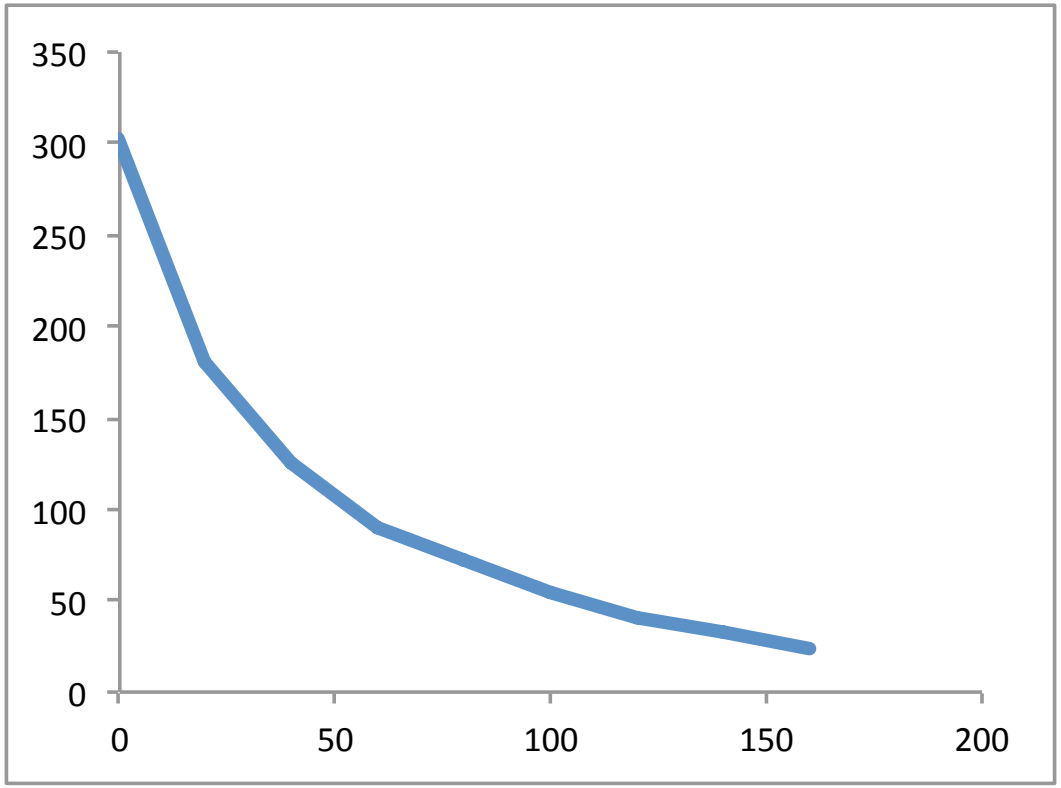
Wyniki numeryczne

c	x	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	$CVaR^{\alpha}$
0	10	0	0	0	0	0	302.24
20	9.8	3.74	6.06	0	0	0	180.35
40	9.6	0	5.96	3.64	0	0	126.24
60	9.4	0	0.19	9.21	0	0	89.64
80	9.2	0	0	5.51	3.69	0	71.42
100	9	0	0	1.50	7.50	0	53.82
120	8.8	0	0	0	6.85	1.95	41.64
140	8.6	0	0	0	3.52	5.08	32.70
160	8.4	0	0	0	0.20	8.20	23.75

- Parametry: $S(0) = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 0.2$, $r = 3\%$, $T = 1$.
- Ceny realizacji: $K_1 = 80$, $K_2 = 90$, $K_3 = 100$, $K_4 = 110$, $K_5 = 120$.
- Inwestujemy: $V_0 = 1000$,

CVaR w modelu Blacka-Scholesa

Wyniki numeryczne



- Parametry: $S(0) = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 0.2$, $r = 3\%$, $T = 1$.
- Ceny realizacji: $K_1 = 80$, $K_2 = 90$, $K_3 = 100$, $K_4 = 110$, $K_5 = 120$.
- Inwestujemy: $V_0 = 1000$.

Osłona CVaR za pomocą strategii

- Kupujemy akcję za $S(0)$.
- Inwestujemy c w strategię samofinansującą $\xi(t)$.
- Cel: zminimalizować $CVaR$ dla

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + V_\xi(T)\right] - \left[S(0) + c\right].$$

[FL] Föllmer, Leukert, Efficient hedging: Cost versus shortfall risk (2000)

[RU1] Rockafellar, Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk (2000)

[RU2] Rockafellar, Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions (2002)

[MS] Melnikov, Smirnov, Dynamic hedging of conditional value-at-risk (2012)

Osłona CVaR za pomocą strategii

- Kupujemy akcję za $S(0)$.
- Inwestujemy c w strategię samofinansującą $\xi(t)$.
- Cel: zminimalizować $CVaR$ dla

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + V_\xi(T)\right] - \left[S(0) + c\right].$$

[FL] Föllmer, Leukert, Efficient hedging: Cost versus shortfall risk (2000)

[RU1] Rockafellar, Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk (2000)

[RU2] Rockafellar, Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions (2002)

[MS] Melnikov, Smirnov, Dynamic hedging of conditional value-at-risk (2012)

Osłona CVaR za pomocą strategii

- Kupujemy akcję za $S(0)$.
- Inwestujemy c w strategię samofinansującą $\xi(t)$.
- Cel: zminimalizować $CVaR$ dla

$$X = e^{-rT}\left[S(T) + V_\xi(T)\right] - \left[S(0) + c\right].$$

[FL] Föllmer, Leukert, Efficient hedging: Cost versus shortfall risk (2000)

[RU1] Rockafellar, Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk (2000)

[RU2] Rockafellar, Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions (2002)

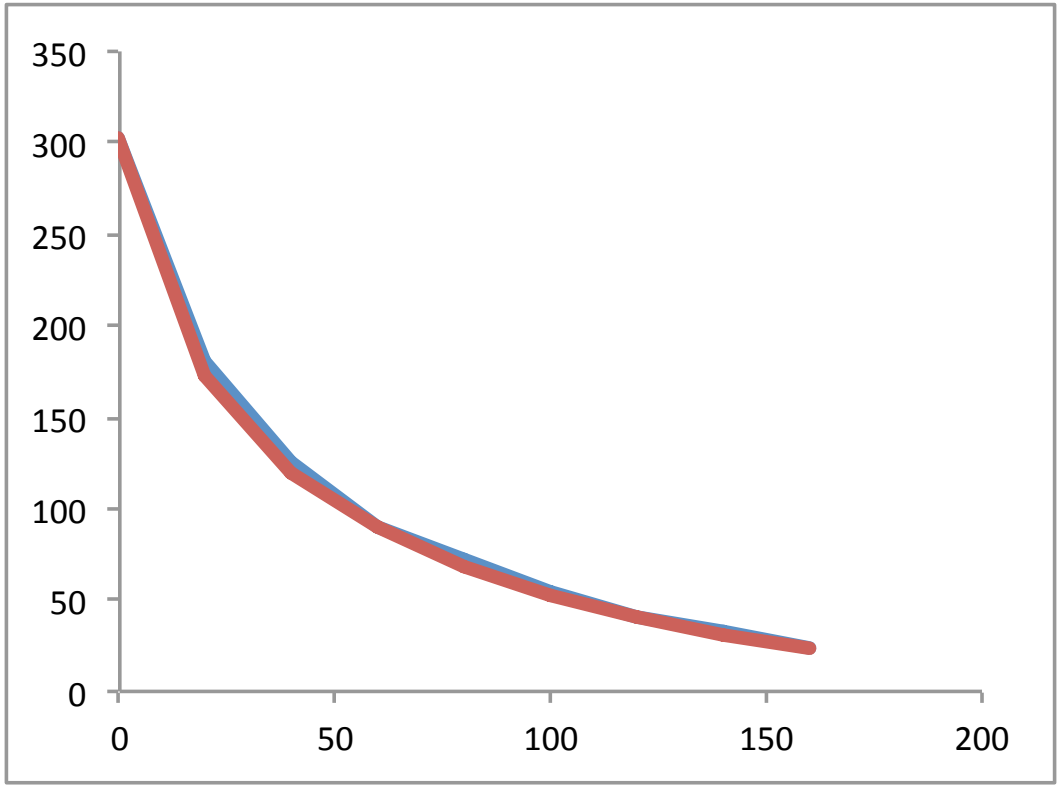
[MS] Melnikov, Smirnov, Dynamic hedging of conditional value-at-risk (2012)

Osłona CVaR za pomocą strategii

c	x	$CVaR^{\alpha}$
20	9.8	172.06
40	9.6	120.23
60	9.4	89.25
80	9.2	67.85
100	9	52.10
120	8.8	40.12
140	8.6	30.84
160	8.4	23.59

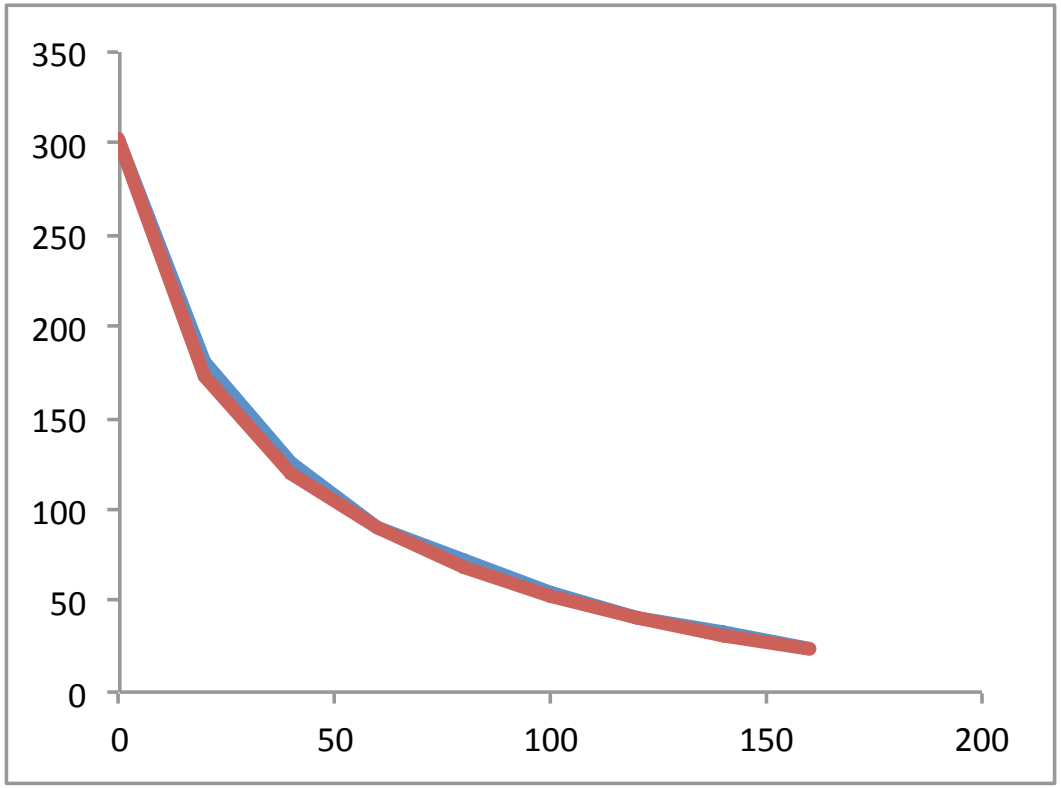
- Parametry: $S(0) = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 0.2$ $r = 3\%$, $T = 1$.
- Ceny realizacji: $K_1 = 80$, $K_2 = 90$, $K_3 = 100$, $K_4 = 110$, $K_5 = 120$.
- Inwestujemy: $V_0 = 1000$.

Osłona CVaR za pomocą strategii



- Parametry: $S(0) = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 0.2$ $r = 3\%$, $T = 1$.
- Ceny realizacji: $K_1 = 80$, $K_2 = 90$, $K_3 = 100$, $K_4 = 110$, $K_5 = 120$.
- Inwestujemy: $V_0 = 1000$.

Uwagi końcowe



- Istnieją analityczne wzory na *VaR* i *CVaR* pozycji osłanianych europejskimi opcjami sprzedaży.
- Optymalizacja pozycji osłaniającej jest problemem liniowym.
- Tego typu osłona daje podobne wyniki do osłony za pomocą strategii rebalansowanych w sposób ciągły.

Bibliografia

[FL] Föllmer, Leukert, Efficient hedging: Cost versus shortfall risk (2000)

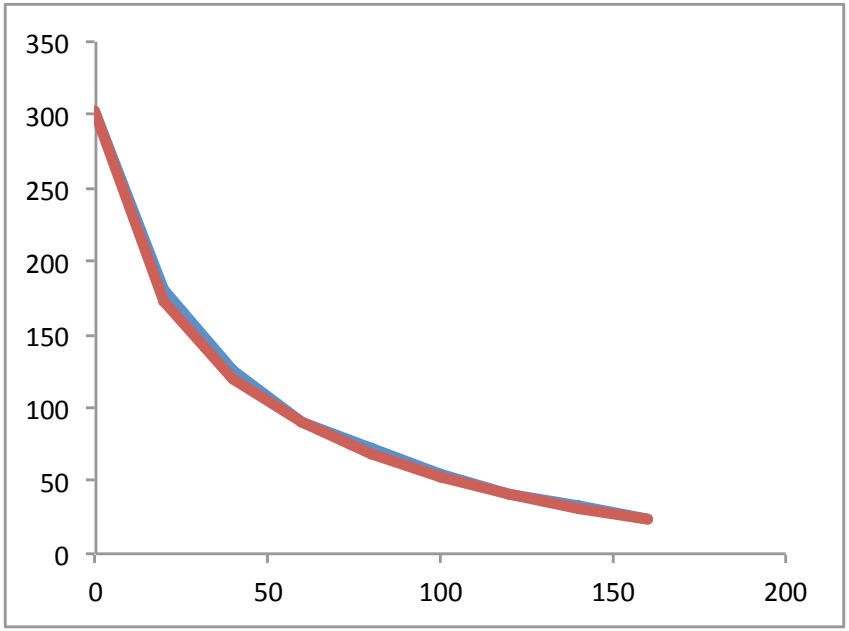
[RU1] Rockafellar, Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk (2000)

[RU2] Rockafellar, Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions (2002)

[MS] Melnikov, Smirnov, Dynamic hedging of conditional value-at-risk (2012)

[C1] M.C. Portfolio Theory and Risk Management, CUP (2014)

[C2] M.C. Hedging Conditional Value at Risk with options, EJOR (2015)



Bardzo dziękuję za uwagę.