Matematik A, STX

13–08–2015

Løsningsforslag uden hjælpemidler // www.matematikhfsvar.page.tl

---

Opgave 1

Indsættes $x=7$ fås

$y=3\cdot 7+4=21+4=25$. dvs når x–værdien er 5, så er y–værdien 25.

Når x vokser med 5, så vokser y med 15, da hældningskoefficienten er 3.

Opgave 2

Man har fået angivet vækstraten, som er 4.5% (eller 0.045), så fremskrivningsfaktoren er $a=1+0.045=1.045$ og en passende model er

$f(t)=213\cdot 1.045^{t}$

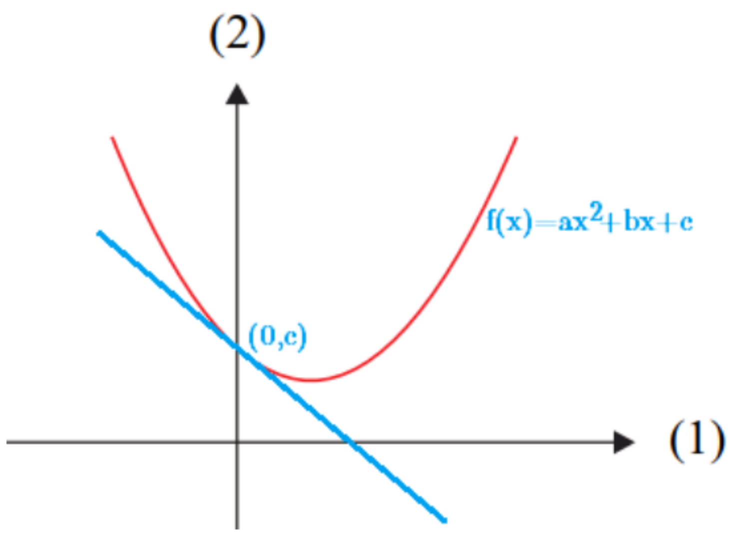
Hvor $f(t)$ er prisen, målt i kr. til tidspunktet t, målt i år efter 2015.

Opgave 3

Man kan se, at $a-$værdien er større end 0, da grenene vender opad (grafen er konveks). Endvidere ses det, at $b-$værdien er mindre end 0, da grafen ligger i første kvadrant, og tangenten til grafen for f i punktet $(0,c)$ er aftagende. (Se skitse). Endelig er $c-$værdien større end 0, da grafen for f skærer $y-$aksen over $x-$aksen. Grafen skærer aldrig $x-$aksen, så diskriminanten er negativ, hvilket betyder der ingen reelle løsninger er til ligningen $f(x)=0$.

Så kort:

$a>0,\ b<0,\ c>0$ og $d<0$.



Opgave 4

Der er givet en kasse. Volumen af en kasse er

$V=l\cdot b\cdot h$ her er $l=$længde, $b=$bredde og $h=$højde. I dette tilfælde (på figuren) er

$l=3\cdot h+4$, $b=2l+1$ og $h=h$, kig på $b=2l+1$, her kan l erstattes med $3\cdot h+4$, så

$b=2\cdot(3\cdot h+4)+1=6h+9$. Indsættes det hele i volumen formlen, så er

$V=(3\cdot h+4)\cdot(6\cdot h+9)\cdot h$ præcis som det man ønskede.

Opgave 5

Funktionen $f(x)$ differentieres vha. produktreglen.

$f'(x)=\left(x\cdot e^x\right)'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x+x\cdot e^x$. Dette erstatter så dy/dx og $f(x)$ indsættes i y, så

$$e^x+x\cdot e^x=\frac{x\cdot e^x+x\cdot x\cdot e^x}{x}\Rightarrow e^x+x\cdot e^x=\frac{x\cdot\left(e^x+x\cdot e^x\right)}{x}\Rightarrow e^x+x\cdot e^x=e^x+x\cdot e^x$$

Vi kan slutte, at $f(x)$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 6

Integralet bestemmes vha. substitution. Lad $t=x^3+2x+4$, så er $\frac{dt}{dx}=3x^2+2$, og $dx=\frac{1}{3x^2+2}dt$

Integralet omskrives så

$$\int_0^2\left(\frac{3x^2+2}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3x^2+2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=\int_0^2 t^{-1/2}\ \mathrm{d}t=\left[2\cdot t^{1/2}\right]=\left[2\sqrt{t}\right]$$

Bemærk, at sidste del kunne der ikke sættes grænser på. Nspire skal have tilføjet den mulighed. Tilbage er der blot at indsætte den oprindelige funktion $t=x^3+2x+4$ funktion ind i resultatet og så bestemme området der bliver integreret over.

$2\sqrt{x^3+2x+4}$ fra 0 til 2, så $2\sqrt{2^3+2\cdot 2+4}-2\sqrt{0^3+2\cdot 0+4}=2\cdot 4-2\cdot 2=4$

Matematik A, STX

13–08–2015

Løsningsforslag med hjælpemidler // www.matematikhfsvar.page.tl

---

Opgave 7a

Hvis to vektorer skal være ortogonale, så skal deres skalarprodukt være 0. Bemærk, at vi ikke lægger vægt på vektorens pil i denne løsningsfil. Vektor a er: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ og vektor b er: $\begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix}$, så løses ligningen $\text{solve}(2\cdot t+5\cdot 3=0,t) \blacktriangleright t=\frac{-15}{2}$ så det er denne værdi der gør, at vektor a og b er ortogonale, idet deres skalarprodukt vil være 0.

Opgave 7b

Man løser ligningen

$$\text{solve}\left(\cos(45)=\frac{2\cdot t+5\cdot 3}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{t^2+3^2}},t\right) \blacktriangleright t=-1.28571 \text{ or } t=7.$$

Så dermed blev værdierne af t fundet. Det er disse der giver vinklen mellem a og b på 45 grader.

www.matematikhfsvar.page.tl

Opgave 8a

Tabellens data indlæses i et regneark.

	A årstal	B biler
=		
1	0	244643
2	2	263039
3	4	281634
4	6	298329
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

A **årstal**

LinRegMx **årstal**,**biler**,1: CopyVar **stat.RegEqn**,**f1**: **stat.results**

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"Lineær regression (mx+b)"} \\ \text{"RegEqn"} & \text{"m}\cdot\text{x+b"} \\ \text{"m"} & 8982.65 \\ \text{"b"} & 244963. \\ \text{"r²"} & 0.999416 \\ \text{"r"} & 0.999708 \\ \text{"Resid"} & \text{"\{...\}"} \end{bmatrix}$$

her er tallet $a=8982.65$ og $b=244963$. Modellen er

$f(t):=8982.65\cdot t+244963 \blacktriangleright$ *Udført*

Opgave 8b

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, efter 2007, vokser antallet af danske familier med 2 personbiler med 8983.

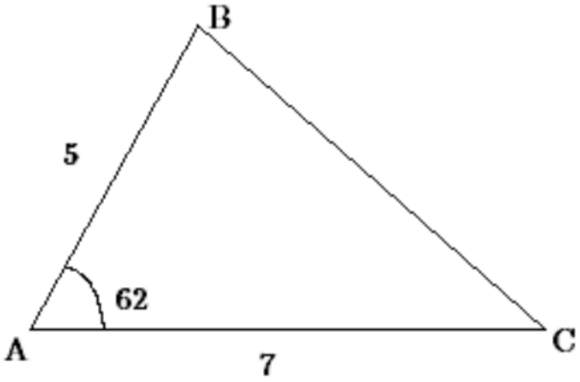
År 2020 svarer til $t=13$, så i år 2020 er der:

$f(13) \blacktriangleright 361737.$

Familier med 2 personbiler i Danmark.

Opgave 9a

Trekanten tegnes, så det nemmere at se hvad der sker.



Lavet i MS Paint. Man bestemmer a vha. cosinusrelationerne.

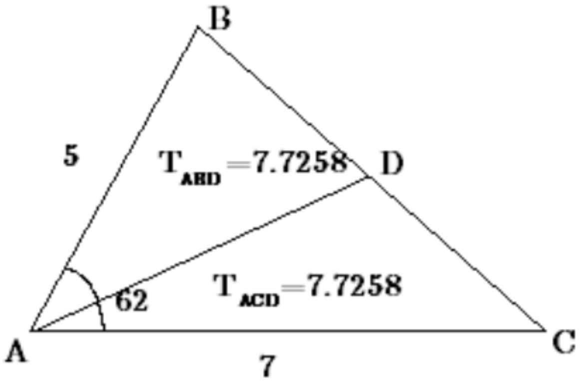
$a=\sqrt{5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos(62)}$ ▸ $a=6.41381$ som er længden af a. Vinkel C bestemmes vha. sinusrelationerne. Så man har: $c=\sin^{-1}\left(\frac{\sin(62)\cdot 5}{6.41381}\right)$ ▸ $c=43.4971$

Opgave 9b

Arealet af trekanten ABC bestemmes.

$t=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot \sin(62)$ ▸ $t=15.4516$ det halve svarer til $\frac{15.4516}{2}$ ▸ 7.7258

En ny skitse laves.



Arealformlen for ABD anvendes.

$\text{solve}\left(7.7258=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot a\cdot \sin(43.4971),a\right)$ ▸ $a=3.20691$

Opgave 9b fortsat

Så kan man anvende cosinusrelationerne til at finde afstanden $|AD|$. Vi kalder denne linje for m.

$m=\sqrt{(3.20691)^2+7^2-2\cdot 3.20691\cdot 7\cdot \sin(43.4971)}$ ▸ $m=5.32739$

Som er den ønskede længde $|AD|$.

www.matematikhfsvar.page.tl

Opgave 10a

Førsteaksen har ligningen $y=0$. Indsættes denne i cirklens ligning, så bestemmes x. Man får

$\text{solve}\left((x-3)^2+(0-5)^2=25,x\right)$ ▸ $x=3$, og da der kun er en værdi af x, så er den tangent.

Opgave 10b

Linjen omskrives til $4x-3y=0$, så retningsvektoren er $r=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$. Af det findes normalvektoren

$n=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$. Centrum anvendes som et fast punkt og en ny linje l opstilles.

$3\cdot(x-3)+4\cdot(y-5)=0$ ▸ $3\cdot x+4\cdot y-29=0$

Dernæst isoleres y i ovenstående linje. $\text{solve}(3\cdot x+4\cdot y-29=0,y)$ ▸ $y=\frac{-(3\cdot x-29)}{4}$ som indsættes i cirklens ligning.

$\text{solve}\left((x-3)^2+\left(\frac{-(3\cdot x-29)}{4}-5\right)^2=25,x\right)$ ▸ $x=-1$ or $x=7$

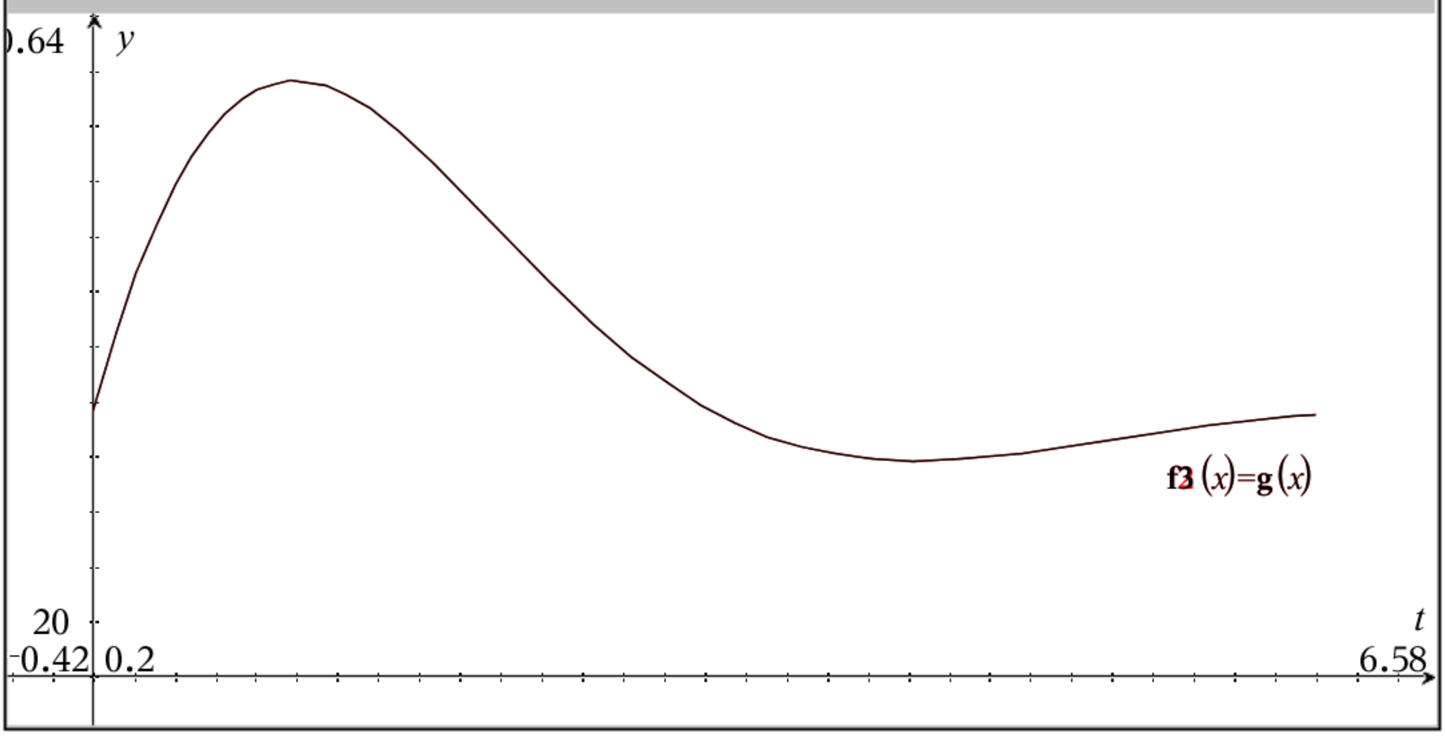
Så kan man få y−koordinaterne ved at indsætte ovenstående i linjen l.

$y=\frac{-(3\cdot -1-29)}{4}$ ▸ $y=8$ og $y=\frac{-(3\cdot 7-29)}{4}$ ▸ $y=2$. Så er P(−1,8) og Q(7,2).

Opgave 11a

Modellen defineres. (Grafen kan ikke lide t, så der bruges x).

$g(x):=96+263\cdot e^{-0.63\cdot x}\cdot \cos(1.03\cdot x-1.57)|0\le x\le 6$ ▸ *Udført*



Opgave 11a fortsat

Da grafen ikke kunne lide t, så laves en ny definition.

$g(t):=96+263\cdot e^{-0.63\cdot t}\cdot \cos(1.03\cdot t-1.57)|0\le t\le 6$ ▸ *Udført*

Man indsætter $t=2$ så

$g(2)$ ▸ 170.598 så er glukosekoncentrationen på 170.598mg/dl.

Opgave 11b

Man finder den afledede og sætter den lig 0 og løser mht. t. Det vises som et bilag, idet Nspire skal løse ligningen som radianer, men der blev anvendt grader ifm. tidligere opgaver.

Så løsningerne til den afledede er $t=0.991318426$ og $t=4.041408381$. Disse indsættes i $g(t)$, så

$g(0.991318426)$ ▸ 236.833

$g(4.041408381)$ ▸ 116.595

Så den maksimale glukosekoncentration fås ved $t=0.991318426$ som er 236.833mg/dl og minimale glukosekoncentration ved $t=4.041408381$ som er 116.595mg/dl.

Opgave 11c

Da glukosekoncentrationen er aftagende fra 0.991318426 til 4.041408381 er det i dette tidsinterval at det sker. Dette argument er baseret på ekstrema fra opg b og grafen fra opg a.

Opgave 12a

H: Fordelingen forholder sig som angivet, der er ikke tale om valgfusk.

$\frac{30.1}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 1333.43$, $\frac{17.6}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 779.68$, $\frac{12.5}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 553.75$, $\frac{9.7}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 429.71$,
$\frac{7.9}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 349.97$, $\frac{6.7}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 296.81$, $\frac{5.8}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 256.94$, $\frac{5.1}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 225.93$,
$\frac{4.6}{100}\cdot 4430 \blacktriangleright 203.78$

Ovenstående er ret forvirrende, men første udregning viser første ciffer og sådan fortsætter det.

Bemærk, at der er 8 frihedsgrader. Regnes ved formlen:

(antal rækker−1)*(antal søjler−1)

I vores tilfælde:

$(2-1)\cdot(9-1) \blacktriangleright 8$

Opgave 12b

Til højre er de observerende og forventede værdier indtastet.

PVal er p−værdien, og den er på 0.005605 som er mindre end 0.05, dermed afvises nulhypotesen.

	A obs	B forv	C	D
=				=χ²GOF('obs,'forv,8):
1	1261	1333.43	Titel	χ²−Goodness of Fit...
2	784	779.68	χ²	21.6505
3	577	553.75	PVal	0.005606
4	454	429.71	df	8.
5	359	349.97	CompList	{3.9342934387257,...
6	350	296.81		
7	223	256.94		
8	232	225.93		
9	190	203.78		
10				
11				
12				

G10

Opgave 13a

Først opstilles to vektorer.

$\mathbf{ab}:=\begin{bmatrix}0-10\\30-0\\0-0\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}-10\\30\\0\end{bmatrix}$ og $\mathbf{ac}:=\begin{bmatrix}0-10\\0-0\\20-0\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}-10\\0\\20\end{bmatrix}$

Der foretages krydsprodukt.

$\text{crossP}(\mathbf{ab},\mathbf{ac}) ▸ \begin{bmatrix}600\\200\\300\end{bmatrix}$

Planens ligning er

$600\cdot(x-10)+200\cdot(y-0)+300\cdot(z-0)=0 ▸ 600\cdot x+200\cdot y+300\cdot z-6000=0$

Arealet er

$t=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{600^2+200^2+300^2} ▸ t=350$

Så arealet af sejlet er $350m^2$.

Opgave 13b

Parameterfremstillingen laves. Punktet D er fast så er DE retningsvektor.

$\mathbf{de}:=\begin{bmatrix}7-6\\-7--2\\10-9\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}1\\-5\\1\end{bmatrix}$

Parameterfremstillingen er

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-2\\9\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\-5\\1\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}x=t+6\\y=-5\cdot t-2\\z=t+9\end{bmatrix}$

Indsættes parameterfremstillingen i planens ligning, så kan man finde t.

$\text{solve}(600\cdot(6+t)+200\cdot(-2-5\cdot t)+300\cdot(9+t)-6000=0,t) ▸ t=-1$

Koordinatsættet til skudhullet er

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-2\\9\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\-5\\-1\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}x=5\\y=3\\z=10\end{bmatrix}$

Opgave 14a

Differentialligningen løses vha. desolve.

$\text{deSolve}\left(s'=1.2-\frac{6\cdot s}{100-2\cdot t} \text{ and } s(0)=0,t,s\right) ▸ s=0.00024\cdot t\cdot(t-100.)\cdot(t-50.)$

Så funktionsforskriften er

$s(t):=2.4\text{E-}4\cdot t\cdot(t-100.)\cdot(t-50.)$ ▸ *Udført*

Opgave 14b

Det tidspunkt der er mest salt i karret er fundet ved den afledede.

$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(s(t))=0,t\right) ▸ t=21.1325 \text{ or } t=78.8675$

Da t=78.8675 ikke er med i definitionsmængden, så anvendes t=21.1325, så det er det tidspunkt, hvor saltindholdet er maksimal. Dette eftervises vha. fortegnsvariation.

$s1(t):=\frac{d}{dt}(s(t))$ ▸ *Udført*

$s1(20) ▸ 0.048$

$s1(22) ▸ {}^-0.03552$

Så det passer.

Opgave 15a metode 1

Man kan løse den på forskellige måder.

$f(x):=\frac{1}{x}$ ▸ *Udført*

$\text{solve}(f(x)=5,x) ▸ x=\frac{1}{5}$

Da grafen er symmetrisk om $y=x$, så er arealet fra $x=0$ til $x=1/5$ bestemt vha. arealformlen A=h*g hvor h=5 og g=1/5, og fra 1/5 til 5 er arealet fundet vha. integralregning. Så derfor er området:

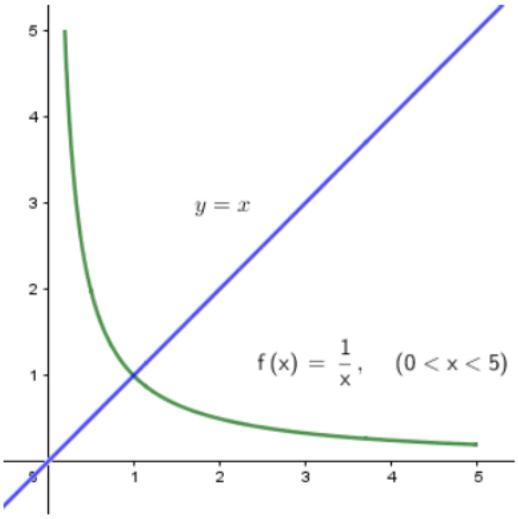
$m=\frac{1}{5}\cdot 5+\int_{\frac{1}{5}}^{5} f(x)\,dx ▸ m=4.21888$

Opgave 15a metode 2

funktionen er symmetrisk om y=x, så ligningen $\text{solve}(f(x)=x,x)$ ▸ $x=-1$ or $x=1$ da −1 ikke er i definitionsmængden, anvendes x=1. Der udspændes en trekant fra 0 til 1 og linjen y=x, resten løses vha. integralregning. Dermed er

$$m=2\cdot\int_0^1 x\ dx+2\cdot\int_1^5 f(x)\ dx \ ▸\ m=4.21888$$

Der ganges med 2, idet den er symmetrisk.



Opgave 15b

Her viser det sig at være en god idé at anvende metode 1 fra opgave a.

Man beregner volumen af en cylinder fra 0 til 1/5 og så resten vha. volumeformlen.

$V=h\cdot \text{Pi}\cdot r^2$

Her er $h=1/5$ og $r=5$. Volumeformlen for resten af funktionen går fra 1/5 til 5.

$$v=\frac{1}{5}\cdot\pi\cdot 5^2+\pi\cdot\int_{\frac{1}{5}}^{5}(f(x))^2\ dx \ ▸\ v=30.7876$$

Som er den volumen man får, når $f(x)$ drejes 360^o om førsteaksen.