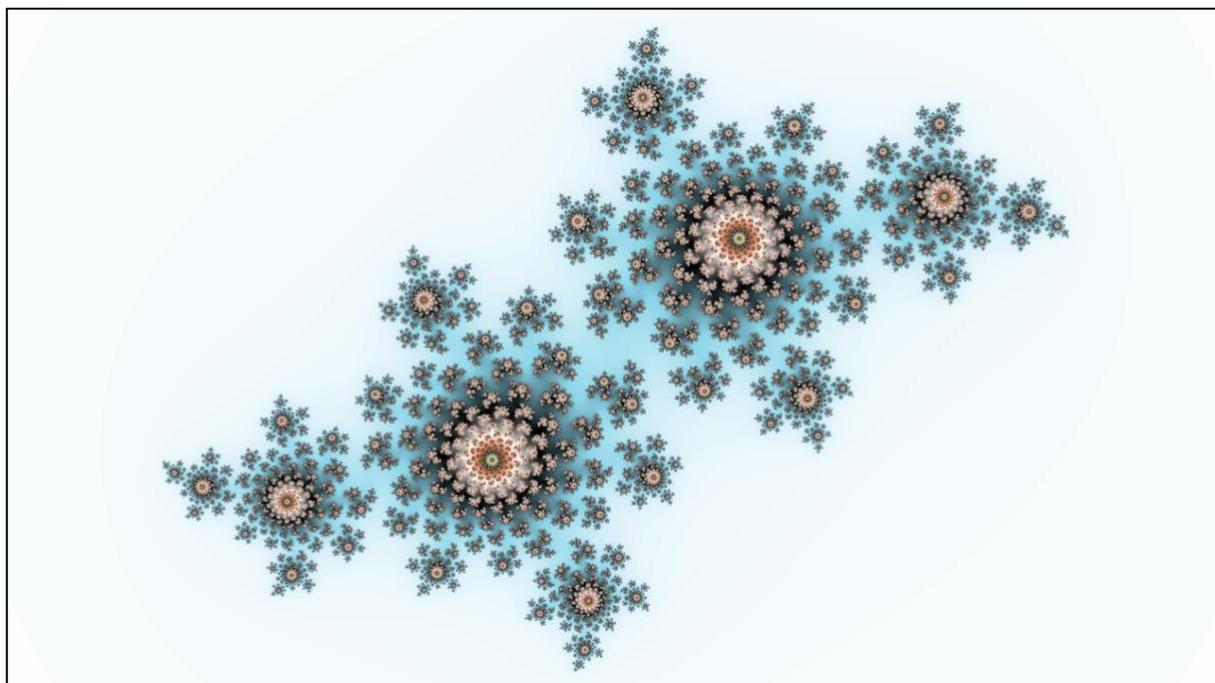


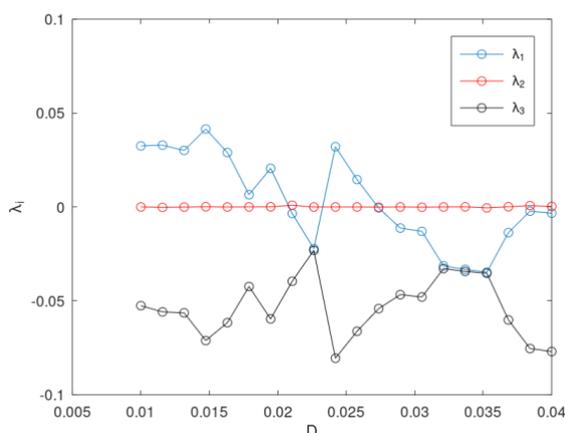
Abschätzung der fraktalen Dimension chaotischer Attraktoren mittels Kaplan-Yorke-Vermutung

Jason von Juterczenka (16), Schülerforschungszentrum Nordhessen

Chaosforschung | Fraktale Dimension | Ljapunow-Spektrum | Attraktoren

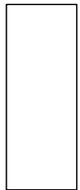


Chaotische Systeme unterliegen einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Dies wirft für mich die Frage auf, welche Mechanismen qualitativ den Verlauf der Trajektorie im Phasenraum bestimmen. Ich vermute, dass eine gebrochene Dimensionalität des zugrundeliegenden Attraktors oder dessen Einzugsbereichs ursächlich ist. Um dies zu überprüfen, analysiere ich mein Problem sowohl auf theoretischer Basis rechnerisch und geometrisch als auch durch numerische Computersimulationen chaotischer Systeme, die ich mithilfe von Poincaré-Abbildungen und Schwingungsdiagrammen auswerte. Mir ist es gelungen, mithilfe des Ljapunow-Spektrums und der Kaplan-Yorke-Vermutung Einblicke in die fraktale Struktur des Attraktors und dessen



Jugend forscht 2022,
Landeswettbewerb Hessen,
Kategorie Physik

PHYSIK



Inhalt der Arbeit

1. Einführung	1
1.1 Messungen mit dem Chaospendel	1
1.2 Wissenschaftliche Fragestellungen	1
1.3 Sensitive Abhängigkeit	1
2. Simulation dynamischer Systeme	2
2.1 Fadenpendel	2
2.2 n -Körper-Probleme	2
— 2.2.1 Divergente Ljapunow-Exponenten	3
2.3 Gekoppelte Kreisbewegungen	4
2.4 Chaospendel	5
2.4.1 Lagrange-Formalismus	5
2.4.2 Poincaré-Schnitt	6
3. Ein neues Modell der Bifurkation	6
3.1 Hausdorff-Dimension	6
3.1.1 Kaplan-Yorke-Vermutung	6
3.2 Dimensionsproblem des Chaospendels	7
4. Messungen mit dem Pohlschen Resonator	7
4.1 Experimentelles Setup	7
4.2 Schwingungsdiagramme	8
4.3 Fourieranalyse	8
4.4 Zersplitterung des Torus-Attraktors	9
5. Simulation des Pohlschen Resonators	10
5.1 Weg ins Chaos	11
5.2 Ljapunow-Spektrum	12
6. Kaplan-Yorke-Dimension	12
6.1 Beispielrechnung	12
6.2 Attraktordimension und LE-Spektrum	12
7. Ergebnisse	13
8. Diskussion	14
8.1 Einschränkungen	14
8.2 Fraktale Quantenunschärfe?	14
8.3 Ausblick	15
I. Anhang	

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

1. Einführung

Als ich 2016 auf der Suche nach einem Forschungsthema den Begriff „Chaostheorie“ las, sah ich darin zunächst eine Paradoxie: Eine Theorie ist schließlich eine *Ordnung*, die viele erfahrene Phänomene durch einen möglichst kleinen Satz von Regeln erklärt und Vorhersagen ermöglicht – für den Begriff „Chaos“ schien in der Wissenschaft kein Platz zu sein.

1.1 Messungen mit dem Chaospendel

Dies weckte mein Interesse: Aus zwei Metallstangen aus dem Baumarkt, einem Kugellager und einer Verpackung als Farbpunkt konstruierte ich ein

kleinem Abstand ε einer außerhalb und einer innerhalb des Einzugsbereichs eines fraktalen Attraktors liegen könnte und beide somit völlig unterschiedliche weitere Verläufe nehmen könnten. Da ein Phasenraum-Volumen ein Energievolumen darstellt, wäre die Entwicklung des Systems demzufolge von der Anfangsenergie abhängig, manifestiert in einer oder mehreren Variablen. Dies führte mich zu folgenden **Fragestellungen**:

- 1.) Was zeichnet Systeme mit sensitiver Abhängigkeit von den Anfangswerten aus?
- 2.) Welcher Mechanismus ist dafür ursächlich? (Vermutung: *Fraktaler Attraktor*)



einfaches Chaospendel mit optischer Messkonstruktion. 3.) Welche Konsequenzen (Energieerhaltung, Unschärfe, ...) ergeben sich daraus?

Abb.1 | Eine Auswahl der aus am getriebenen Chaospendel gewonnenen Messdaten selbst aufgezeichneten Phasenraum-Diagramme an meinem Arbeitsplatz im SFN

Ich zeichnete aus experimentell erhobenen Daten Phasenraum-Diagramme auf und beobachtete, dass sich das Pendel – sobald es zu einem Überschlag kommt – trotz gleich gemessenem Auslenkungswinkel unterschiedlich verhält.

1.2 Wissenschaftliche Fragestellungen

Ich vermutete fraktale Strukturen im Phasenraum als geometrische Ursache dieser Sensitivität, denn ich stellte mir vor, dass von zwei Startpunkten mit

Ich begann mit theoretischer Vorarbeit.

1.3 Sensitive Abhängigkeit (SDIC)

Eine Funktion f sei im Folgenden sensitiv abhängig von ihren Anfangsbedingungen, wenn der Betrag der Differenz zweier beliebiger Ableitungen größer ist als ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Als quantitatives Maß für die SDIC nutze ich das Spektrum der Ljapunow-Exponenten nach ALEXANDER MICHAJLOWITSCH LJAPUNOW (1857-1918).

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Der Ljapunow-Exponent (LE) ist der Wachstumsfaktor des Abstands benachbarter Phasenraum-Trajektorien. Pro Freiheitsgrad existiert ein LE, für das Vorliegen von SDIC ist i.d.R. der größte Exponent λ_{max} relevant. Ich fand einen Näherungsterm¹, den ich umformen konnte, wobei $D_0 = |a_0 - b_0|$ der Anfangsabstand der Startpunkte a_0 und b_0 ist.

$$D(t) \approx D_0 \cdot 2^{\lambda \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{t} \cdot \log_2 \left(\frac{D(t)}{D_0} \right) \approx \lambda$$

Bei $\lambda_{max} > 0$ divergieren Trajektorien exponentiell, sodass parameterabhängig Chaos auftreten kann. Allerdings ist es umständlich ein Ljapunow-Spektrum, in der Regel ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$) notiert, aus experimentellen Messwerten zu bestimmen, da kein vollständiger Satz von Zustandsgrößen vorliegt, sondern i.d.R. nur eine skalare Größe als Funktion der Zeit. Mittels eines Einbettungsverfahrens kann dieses Problem zwar gelöst werden², doch ich suchte nach einer einfacheren Lösung.

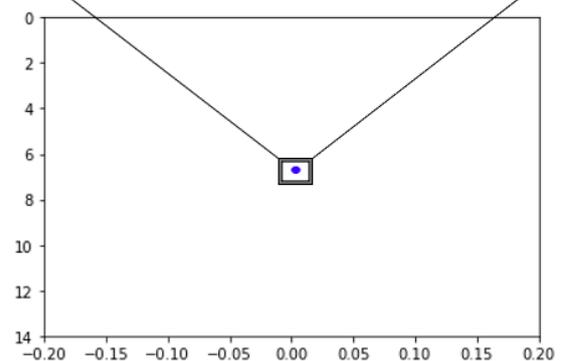
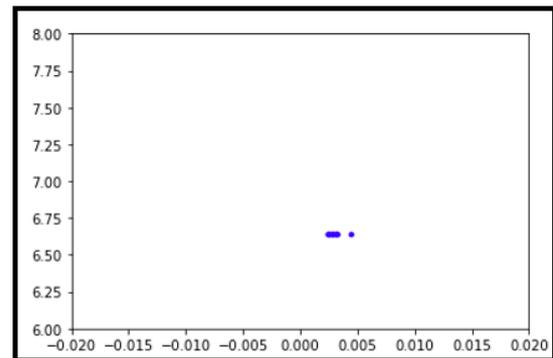
2. Simulation dynamischer Systeme

Aus diesem Grund wechselte ich von meinem experimentellen Aufbau zur Nutzung von Simulationen. Da dies kein Informatik-Projekt ist und es mir um die induktive Beantwortung meiner Forschungsfrage ging, griff ich wann immer möglich auf vorhandene Simulationen zurück modifizierte sie. Ein grundsätzliches Problem dabei bestand in der Tatsache, dass sich bei chaotischen Systemen kaum beurteilen lässt, ob Simulationsergebnisse sinnvoll sind – sonst müsste ich schließlich nicht simulieren. Ich musste die Simulation also so kleinschrittig prüfen, dass ich den späteren Daten vertrauen kann. Bevor ich mich chaotischen Attraktoren zuwandte, simulierte ich daher zunächst astronomische Systeme, deren Dynamik durch das Newtonsche Gravitationsgesetz verstanden ist, sodass ich die Simulationsergebnisse mit den erwarteten Resultaten vergleichen und dadurch

Probleme ausfindig machen konnte. Dabei gewann ich Erfahrung im Umgang mit numerischen Zeitschritten und testete die Bestimmung des Ljapunow-Exponenten.

2.1 Fadenpendel

Da es sich nicht um eine gedämpfte Schwingung (Punktattraktor), sondern um eine zyklische Bewegung unter Einhaltung der Energieerhaltung handelt, folgt ein reibungsfreies Fadenpendel nach



meinen Überlegungen einem Kreisattraktor. Beim Auftragen der Durchstoßpunkte der Phasenraum-Trajektorie mit einer niederdimensionalen Hyperebene („Poincaré-Schnitt“), bestätigt sich periodisches Verhalten.

Zudem lässt sich grob das Ausmaß numerischer Fehler abschätzen.

2.2 n-Körper-Probleme

¹ Vgl. Feldman: Chaos and Fractals, 2012, S.96

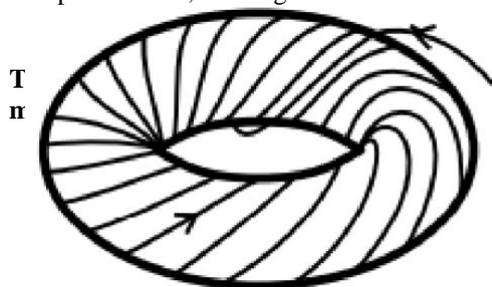
² Vgl. Leven, Koch, Pompe: Chaos in Dissipativen Systemen, 1989, S.65-71

$D_0(x)$	λ_{max}	$\sum_{i=1}^f \lambda_i$
1 AE	$3,12664 \cdot 10^{-6}$	$7,534 \cdot 10^{-6}$
10 AE	$3,02660 \cdot 10^{-6}$	$7,202 \cdot 10^{-6}$
100 AE	$3,02650 \cdot 10^{-6}$	$6,869 \cdot 10^{-6}$
1.000 AE	$3,02660 \cdot 10^{-6}$	$6,537 \cdot 10^{-6}$

Die Trajektorie eines Zweikörpersystems ist unter Ausschluss numerischer Fehler geschlossen, dies zeigte sich auch bei meiner Simulation der Mondbahn.

Abb.3 | Eindimensionaler Kreisattraktor eines streng periodischen reibungsfreien Oszillators

Unter der Annahme, dass sowohl der maximale Exponent als auch die Summe aller Exponenten mit Berücksichtigung numerischer Fehler als null zu interpretieren ist, bestätigt dies die Stabilität sowie



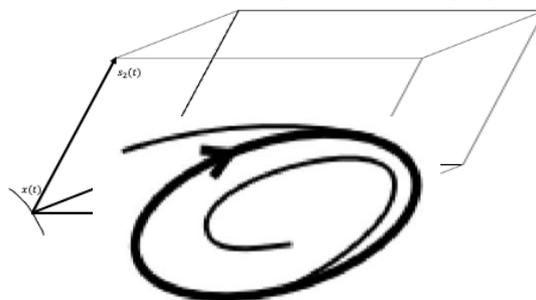
die Energieerhaltung des Systems. Außerdem ist es sinnvoll, dass der Exponent nicht monoton mit D_0 steigt oder sinkt. Dennoch stellte mich diese etwas willkürliche Interpretation nicht ganz zufrieden. Ich simulierte auch Dreikörpersysteme, die Bewegungsgleichungen sind durch nicht algebraische Integrale analytisch unlösbar, der Kreisattraktor wird durch den dritten Körper zu einem Torus aufgezogen.

³Vgl. Leven, Koch, Pompe: Chaos in Dissipativen Systemen, 1989, S.64

Abb.4 | Geschlossene Trajektorie auf der Oberfläche eines 2-Torus als Attraktor

Dieser Torus kann bei ganzzahligem Verhältnis zwischen den Frequenzen der Oszillatoren schon bei kleinen Störungen instabil werden. Demzufolge wollte ich auch hier LE bestimmen, die Beträge der resultierenden Werte waren allerdings erneut zu klein, um sinnvoll ausgewertet werden zu können. So kam es vor, dass ich – deduktiv vorgehend, bereits ein bestimmtes Ergebnis erwartend – Werte als null interpretieren musste, die einen größeren Betrag hatten als solche, die ich als negative oder positive Exponenten ungleich null sehen musste. Auf diese Weise war kein Verlass auf meine Daten, die Interpretation war willkürlich.

2.2.1 Divergente Ljapunow-Exponenten. Ich suchte nach einer Erklärung für die geringen Beträge der Ljapunow-Exponenten. Dabei dachte ich auch an meine wissenschaftshistorischen Recherchen in der Phase der Ideenfindung: Chaosforschung galt vor der Entdeckung des Lorenz-Systems im Jahre 1963 oft eher als ein Problem der Informatik, nicht als ein physikalisches Forschungsfeld, denn so wie die Periheldrehung der Merkurbahn auch ohne das physikalisch neue Prinzip der Relativität mittels Rechengenauigkeiten (Planet „Vulkan“) in der Newtonschen Mechanik erklärt werden kann, so können Rundungsfehler auch in nicht sensitiven Systemen scheinbar chaotisches Verhalten erzeugen oder physikalische Phänomene imitieren. Ljapunow-Exponenten können in Simulationen divergieren, was klar wird, wenn man die LE über das Volumen eines von den Störungsvektoren aufgespannten



Parallelepipeds beschreibt.³

Abb.5 | Parallelepiped

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

$$\lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln Vol_n(t). \quad (2.1)$$

Da das Volumen des Parallelepipedes zum Zeitpunkt t folglich durch

$$\langle Vol_n(t) \rangle_t = Vol_n(0) \cdot e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \quad (2.2)$$

bestimmt ist, kann es in chaotischen Systemen (bei $\lambda_{max} > 0$) bei kleiner Anfangsstörung extrem verzerrt werden, sodass numerische Ermittlung versagt.

Um extrem lange Simulationszeiten aufgrund astronomischer Zeitspannen, auf denen sich das System

charakteristischerweise chaotisch verhält (die sogenannte Ljapunow-Zeit) zu umgehen, nahm ich nun wieder das Chaospendel in den Fokus.

2.3 Gekoppelte Kreisbewegungen

Dazu untersuchte ich zunächst ohne Berücksichtigung der mechanischen Kräfte gekoppelte Kreisbewegungen. Dafür wandte ich auf einen Punkt $P(x|y)$ die Rotationsmatrix A an, um den um den Winkel α gedrehten neuen Punkt $P'(x'|y')$ zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Im nächsten Schritt verschob ich diese Kreisbewegung innerhalb des Koordinatensystems, indem ich durch eine Translationsmatrix eine Störung auf das System wirken ließ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Wie sich leicht erkennen lässt, bewirkt die 3x3-Translationsmatrix eine **Verschiebung** um a und b der ursprünglichen **Positionen** x und y . Diese zunächst statische Translation lässt sich auch pro Zeitschritt in eine Schleife einbinden, sodass die Bewegung nicht nur einmalig im Koordinatensystem verschoben wird, sondern auch die

Geschwindigkeiten sich ändern und Epizykel („Kringel“) entstehen. Ich wollte nun die Aufhängung des einen Pendels selbst in eine Rotationsbewegung versetzen, um zwei gekoppelte Oszillatoren und damit einen auf Störungen sensibel reagierenden Torus-Attraktor zu erhalten. Außerdem fügte ich einen linearen Reibungsfaktor μ hinzu, um zu überprüfen, ob der reibungsbedingte Übergang der Bewegung in eine einfache Kreisbewegung mit den zwischen 2016 und 2019 experimentell am Chaospendel gesammelten Daten zum Bruch der Ergodizität durch Reibung übereinstimmt.⁴

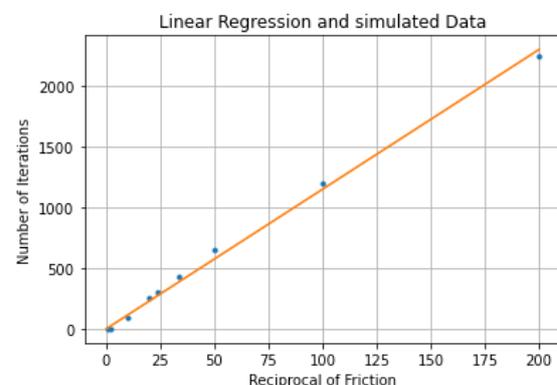
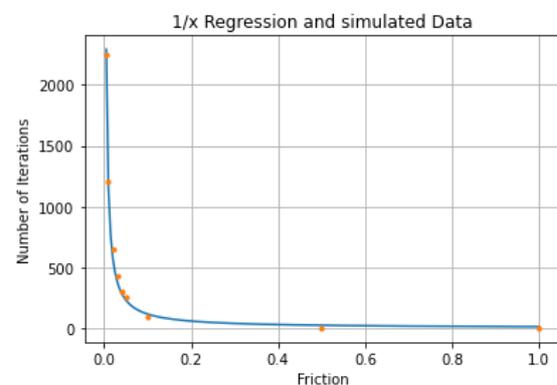
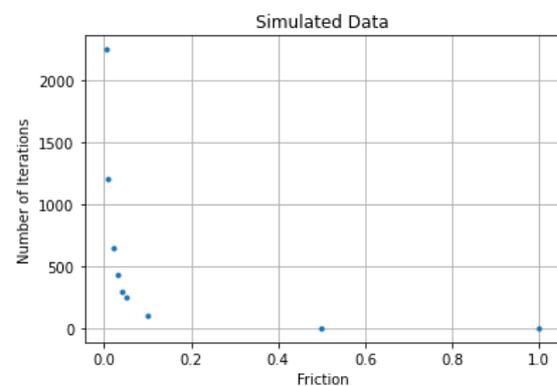
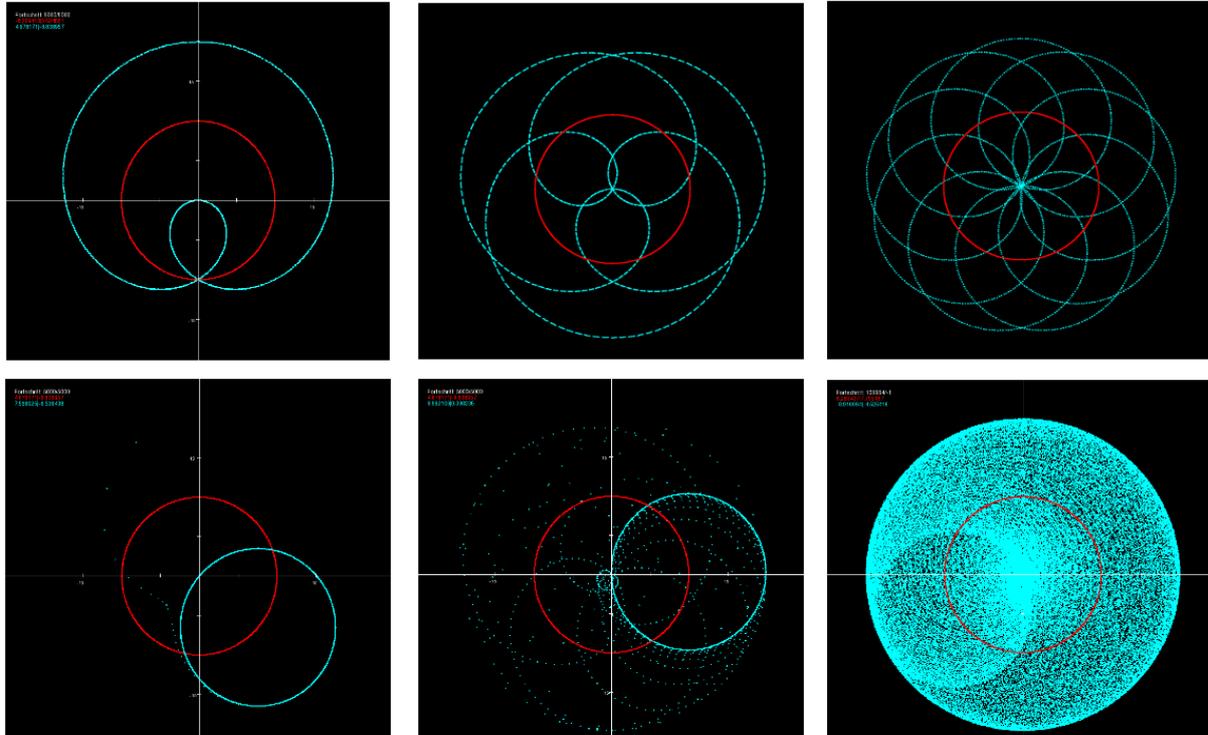


Abb.6 | Die Anzahl der bis zum Übergang in eine einfache Kreisbewegung benötigten Iterationen gegen den Reibungsfaktor aufgetragen, mit einer 1/x-Regressionshyperbel. Darunter die linearisierten Daten mit Regressionsgeraden, $R^2 = 0,997$ bei Voraussetzung einer Ursprungsgeraden (eigene Messung).

⁴ Untersuchung eines Chaospendels mithilfe des Ortsraums, Schüler experimentieren 2019

Dies lässt sich damit erklären, dass eine Rückkopplung zwischen den Pendeln durch die fixen Grundfrequenzen unterbunden wird und der Torus-Attraktor nur durch die wirkenden mechanischen Kräfte zu einem seltsamen Attraktor werden kann.

Die Reibung zeigt den erwarteten Effekt, die Anzahl



der Iterationen, nach der die gekoppelten Kreisbewegungen in eine einfache Kreisbewegung übergegangen sind (s. Abb.7), ist umgekehrt proportional zum Reibungsfaktor. Dieses Ergebnis ist physikalisch sinnvoll, bei einer Reibung von null **Abb. 7: Oben: kraftfreie gekoppelte Kreisbewegungen bei $f_1 = 1$ und $f_2 = 10$ (rot und cyan), unten: gedämpfte gekoppelte Kreisbewegungen bei $\mu = 0,1$, $0,05$ und $0,01$** von eins kommt es gar nicht erst zu einer Kopplung. Das Bestimmtheitsmaß ist überraschend hoch, berücksichtigt man die Tatsache, dass ich das Erreichen der einfachen Kreisbewegung rein optisch „nach Eindruck“ beurteile.

Allerdings zeigte sich unabhängig vom Verhältnis der Grundfrequenzen kein sensitives oder quasi-periodisches Verhalten, die Bahnen verliefen ohne Reibung streng periodisch in sich geschlossen.

2.4 Chaospendel

2.4.1 Lagrange-Formalismus. Ich begann, mein Problem physikalisch zu analysieren und stellte fest, dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade f durch Aufstellen von Zwangsbedingungen reduzieren lässt, denn das Pendel ist nur auf einer festgelegten Kreisbahn. Daher konnte ich die insgesamt sechs Phasenraum-Koordinaten x, y, z, p_x, p_y, p_z durch den kleineren Koordinatensatz $\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2$ ersetzen. Dies sind generalisierte Koordinaten, die im Lagrange-Formalismus Verwendung finden. Dabei handelt es sich um eine von JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-

1813) eingeführte Formulierung der Newtonschen Mechanik. Mittels der neben Lagrange selbst von

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

LEONHARD EULER (1707-1783) entwickelten Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich die Bewegungsgleichung des Systems aufstellen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} = 0$$

In den meisten Fällen gilt dabei für die Lagrange-Funktion L :

$$L = T - V \quad (2.6)$$

Da ich im Alter von zehn Jahren mit meinem Projekt begann, war es für mich entscheidend Wege zu finden, mathematische Probleme möglichst stark zu vereinfachen, weshalb ich den Lagrange-Formalismus einsetzte. Für das Chaospendel lautet der Term für die potentielle Energie

$$V = mgl(2 \cos\phi_1 + \cos\phi_2), \quad (2.7)$$

jener für die kinetische Energie⁵

$$T = ml^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_2^2 + ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (2.8)$$

Auf diese Weise lässt sich das Chaospendel mit Kräfte rückkopplung simulieren.

2.4.2 Poincaré-Schnitt. Da das Chaospendel jedoch selbst mit generalisierten Koordinaten im Zustandsraum vierdimensional ist, benötigt es hier einen Poincaré-Schnitt. Die Verteilung der Schnittpunkte mit der Hyperebene im Phasenraum ermöglicht ebenso eine Analyse des Systems wie der Phasenraum selbst. Für chaotische Systeme ist neben einem positiven größten LE ein bei $t \rightarrow \infty$ innerhalb energetischer Grenzen vollständig mit Punkten gefüllter Poincaré-Schnitt charakteristisch.

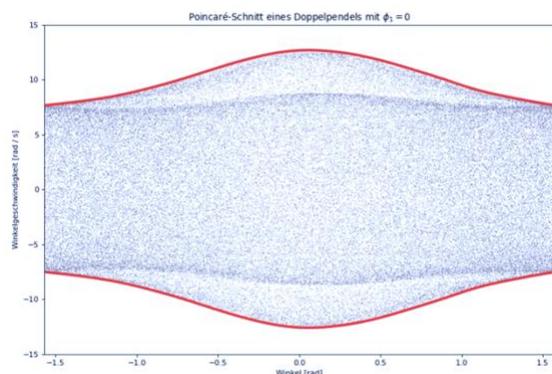


Abb.8 | Simulierte Poincaré-Abbildung mit ϕ_2 und ω_2 auf der Ebene $\phi_1 = 0$. Die rote Linie zeigt die energetische Limitierung.

Ich trug in Abb.8 alle Winkel und Winkelgeschwindigkeiten des zweiten Pendels, also ϕ_2 und ω_2 auf, wenn der Winkel des ersten Pendels $\phi_1 = 0$ ist. Da dies in einer numerischen Simulation kaum exakt der Fall ist, erlaubte ich einen Toleranzbereich, trug also alle Punkte unterhalb einer festen Differenz auf. Ein Kriterium für Chaos besteht in einem sich vollständig mit Punkten anfüllenden Poincaré-Schnitts, da dies einen einfachen Zusammenhang zwischen Winkel und Winkelgeschwindigkeit (wie in Abb.2) ausschließt. Da Chaos nur in sensitiven Systemen auftreten kann, fand ich damit eine Möglichkeit, sensitiv abhängige Systeme zu charakterisieren.

3. Ein neues Modell der Bifurkation

Zur Überprüfung der anfangs geäußerten Vermutung, die sensitive Abhängigkeit sei geometrisch als Konsequenz eines fraktalen Attraktors zu interpretieren, musste ich nun dessen Dimension berechnen. Es gibt verschiedene Dimensionsbegriffe, welche die topologische Dimension um nicht ganze Zahlen erweitern, in den meisten Fällen aber identisch sind.

3.1 Hausdorff-Dimension

Die Hausdorff-Dimension, eingeführt von FELIX HAUSDORFF (1886-1942), gibt die lokale Metrik an, indem das Objekt mit einer Anzahl $N(r)$ von Kugeln des Radius r bedeckt wird. Die Hausdorff-Dimension entspricht dann der Zahl D , durch die $N(r)$ bei $r \rightarrow 0$ polynomiell mit $\frac{1}{r^D}$ wächst. Folglich ist

$$D = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)} \quad (3.1)$$

Dies ist eine vereinfachte Definition.

3.1.1 Kaplan-Yorke-Vermutung. Da ich mich aber für den Zusammenhang zwischen einer

⁵ Vgl. Bohn: A Student's Guide to Analytical Mechanics, 2018, S.196-198

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

dynamischen Eigenschaft der Trajektorie, nämlich den LE und der statischen Eigenschaft des Attraktors, also der Dimension, interessierte, wählte ich eine spezielle Methode nach JAMES A. YORKE (*1941) und JAMES L. KAPLAN zur Ermittlung der Hausdorff-Dimension des Attraktors. Die Kaplan-Yorke-Vermutung liefert eine ungefähre Abschätzung der Hausdorff-Dimension des Attraktors auf Basis der LE bzw. legt sie dessen physikalische Obergrenze fest. Es gilt $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Der Parameter j ist definiert durch

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad (3.3)$$

und

$$\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \quad (3.4)$$

Wie Formeln (5.4) und (5.5) festlegen, ist j das größte i , für das die Summe aller LE positiv oder null

sich über die Veränderung der Attraktordimension beschreiben.

3.2 Dimensionsproblem des Chaospendels

Wie sich Formel (5.3) entnehmen lässt, benötigt es für Berechnung der KY-Dimension das gesamte Ljapunow-Spektrum, welches für höherdimensionale Systeme mit $D > 3$ nur schwierig zu ermitteln ist. Bei maximal drei Dimensionen lässt sich der fehlende Ljapunow-Exponent aus der Differenz der Summe aller LE, die gemäß dem Satz von Liouville nach JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) der Divergenz entspricht, und der Summe des größten und des kleinsten, der über den größten Exponenten des

adjungierten Systems ermittelt werden kann, berechnen. Da das Chaospendel aber von vier LE charakterisiert wird und diese Methode daher nicht funktioniert, wechselte ich für die Beantwortung des zweiten Teils der Fragestellung das Forschungsobjekt.



Abb.9 | Mein Versuchsaufbau für Messungen mit dem Pohl'schen Resonator

- Ⓐ Farbpunkt
- Ⓑ Erreger mit Spiralfeder
- Ⓒ Wirbelstrombremse
- Ⓓ Netzteil der Wirbelstrombremse (0~30V/0,5A)
- Ⓔ Videokamera
- Ⓕ Antrieb
- Ⓖ Netzteil des Schrittmotors (DC 1~32 V / 0~20 A)

bleibt, wenn sie in absteigender Größe geordnet sind. Addiert man dann einen weiteren LE hinzu, also λ_{j+1} , wird die Gesamtsumme aller LE negativ. Ich stellte mir die Frage, wieso die Dimension als Eigenschaft des Attraktors und die LE als Eigenschaft der Trajektorie auf diese Weise zusammenhängen und vermutete, Bifurkation lasse

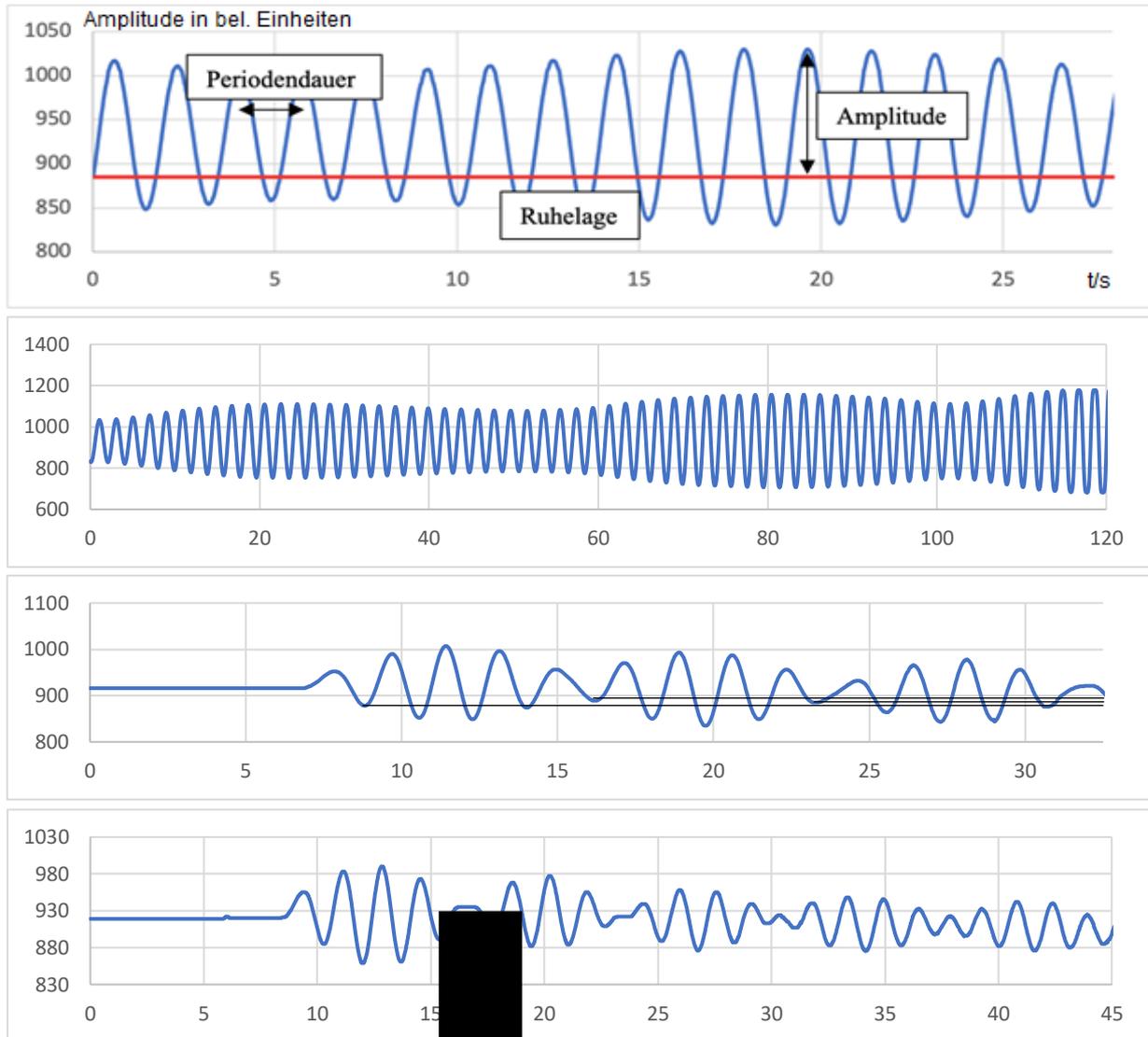
4. Messungen mit dem Pohl'schen Resonator

Meine Wahl fiel auf das Pohl'sche Rad, benannt nach ROBERT WICHARD POHL (1884-1976), mit $D = 3$, da ich bei Recherchen auf keine Publikationen über die Entwicklung der

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Attraktordimension bei verschiedenen Dämpfungen
gestoßen bin.

asymmetrisch eine kleine Unwucht, damit das Systemverhalten nichtlinear wird.



4.1 Experimentelles Setup

Das Pohlsche Rad ist ein meist
Drehschwinger, welcher durch einen Er
einstellbarer Frequenz um eine Drehfeder r
durch eine Wirbelstrombremse gedämp
Installiert man asymmetrisch eine M
schwingt das Rad nun periodisch um ein
rechts oder links des Lots, gleichzeitig mus
Term des rücktreibenden Drehmoments M_D
nun noch $m \cdot g \cdot r_0 \cdot \sin(\varphi)$ addiert
wodurch das System nichtlinear wird, zw
Ruhelagen erhält und sich chaotisch verhält
Ich nutzte ein Pohlsches Rad
Physiksammlung meiner Schule und

Anschließend variierte ich in Messreihen bei
konstanter Erregerfrequenz die Dämpfung. Dabei
zeichnete ich die Bewegung des Drehpendels mit
einer Videokamera auf und wertete die Videos
mittels der Software *Measure Dynamics* aus. Um
auch den Einschwingvorgang zu erfassen, startete
jede Aufnahme in der Ruhelage. Um die
Einstellungen des zu didaktischen Zwecken
genutzten Pohlschen Rads in

abgeleitete SI-Einheiten zu transferieren, lässt sich
die magnetische Flussdichte B der Spule mittels

A

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

einer Hall-Sonde als proportional zur am Netzteil eingestellten Spannung U bestimmen.

4.2 Schwingungsdiagramme

Amplitude und Periodendauer lassen sich in Schwingungsdiagrammen (s. Abb. 10-13) ablesen, dadurch lässt sich erahnen, ob eine Schwingung harmonisch oder chaotisch ist oder ob eine Schwebung durch sich überlagernde Frequenzen vorliegt. Indem ich parallele Linien in die Perioden der Schwingungsdiagramme einzeichnete, konnte ich die verschiedenen Perioden grob auseinanderhalten.

Um Periodenverdopplung schneller für größere Datenmengen erkennen zu können und auch eng beieinanderliegende Frequenzen zu trennen, also leichte

Schwebungen von harmonischen Schwingungen unterscheiden, analysierte ich die Datensätze im Anschluss an die Betrachtung der Diagramme noch auf

eine weitere Weise: Die Fourier-Transformation.

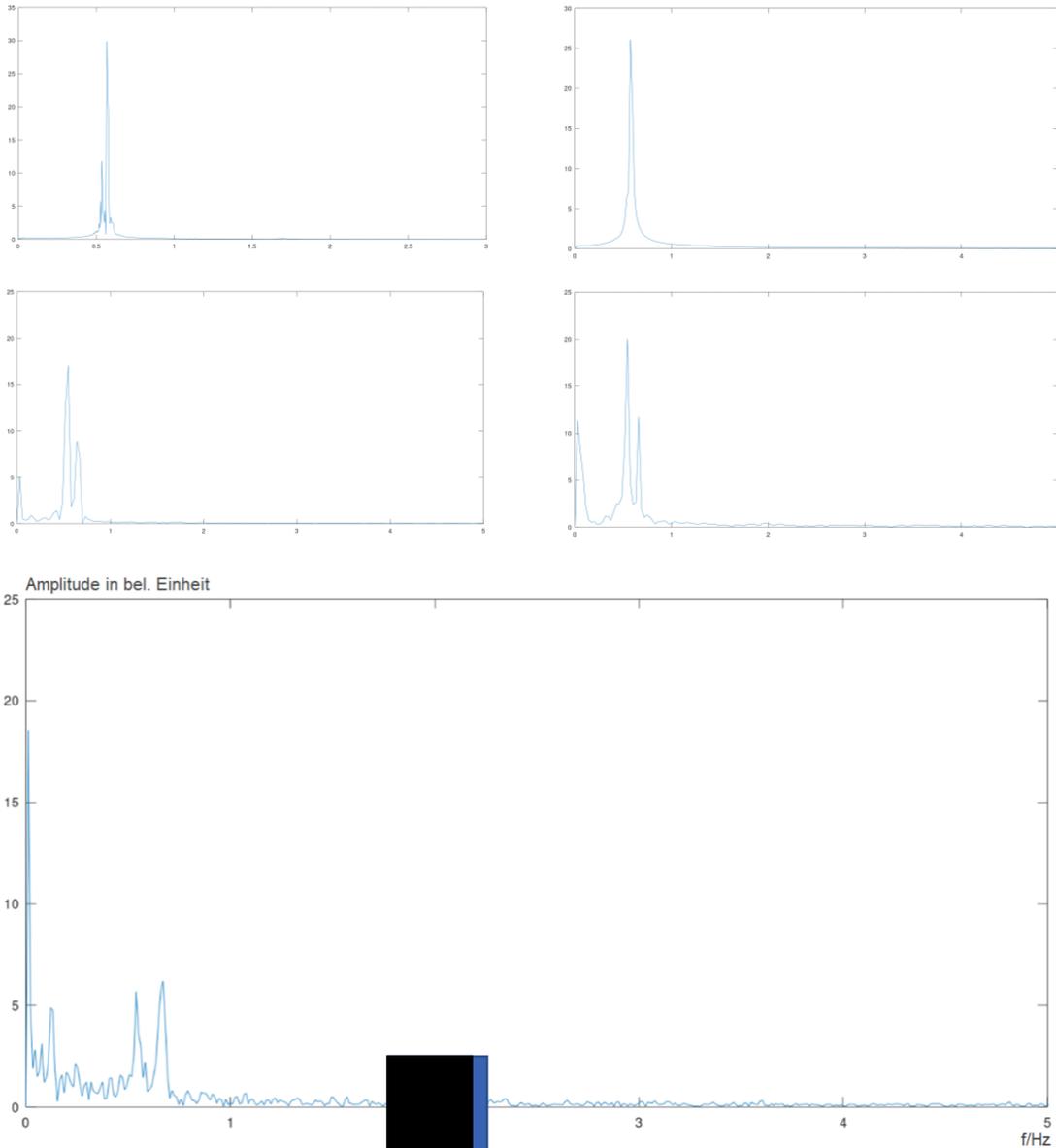
4.3 Fourieranalyse

Die Fast Fourier Transformation (FFT) nach JOSEPH FOURIER (1768-1830) transferiert eine Schwingung in einen Frequenzraum, legt also dessen Frequenzspektrum offen und ermöglicht somit das

Abb.13

Abb.15

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

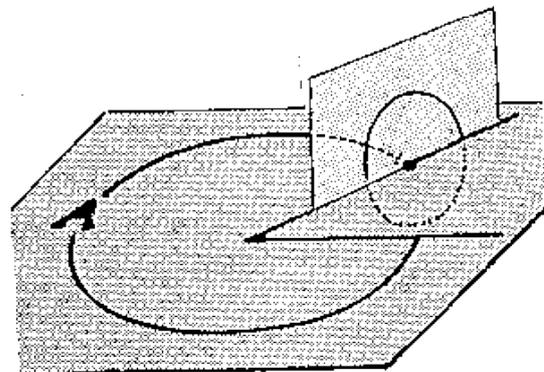


Erkennen sich überlagernder Perioden, die Wege ins Chaos sind. Mittels MATLAB mit meinen Daten eine Fourieranalyse durchgeführt beachtete ich das Sampling-Theorem und folgende Frequenzspektren.

4.4 Zersplitterung des Tours-Attraktors

Bei einer Schwebung durch Überlagerung Perioden, was nur durch eine weitere System möglich ist, wird der Kreisattraktor (s. Abb. 14) einer harmonischen Schwingung zu einem 2-Ton

weiteren Bifurkationsschritten „zersplittert“ dieser Torus zu einem seltsamen Attraktor mit fraktaler



Dimension und verursacht eine chaotische Bewegung der Trajektorie. Dieser „Weg ins Chaos“ über den in immer engeren Schritten erfolgenden

Abb.14

Abb.16

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Zerfall von Perioden bei Variierung eines Bifurkationsparameters μ ist das, was ich in den Schwingungsdiagrammen und Frequenzspektren zu erkennen glaubte.

So wie der eindimensionale Grenzzyklus den nulldimensionalen Punktattraktor und die zweidimensionale Torusoberfläche den Grenzzyklus steigert, so entspräche ein seltsamer Attraktor einer Steigerung der Dimensionalität des Torus bei nicht-chaotischen Werten des Bifurkationsparameters: Seine Dimension müsste somit stets kleiner als die einbettende Dimension des Phasenraums sein. Dieses Konzept lässt sich durch Ermittlung der fraktalen Dimension des Attraktors überprüfen. Da der Attraktor eines Systems dessen Verhalten bei $t \rightarrow \infty$ beschreibt, ist

es erheblich einfacher ihn durch Simulationen zu ermitteln, bzw. dessen fraktale Dimension zu beweisen, als durch Messreihen. Daher wechselte ich von Messungen mit meinem Pohlschen Resonator zu einer Simulation.

5. Simulation des Pohlschen Resonators

Das Pohlsche Rad ist im Zustandsraum dreidimensional (Auslenkung des Pendels, Winkelgeschwindigkeit des Pendels, Phasenwinkel des Oszillators), durch Betrachtung der Durchstoßpunkte in einer Phasenraum-Hyperebene kann der Zustandsraum aber zu einer Zustandsebene vereinfacht werden. Da einer der drei LE des Pohlschen Rads stets null ist,

muss ich nur zwei der von null verschiedenen Ljapunow-Exponenten ermitteln, sodass der kleinere der beiden direkt über den Satz von Liouville ermittelt werden kann. Ich arbeitete mit einer vorgefertigten MATLAB-Simulation des Pohlschen Resonators (siehe „Unterstützungsleistungen“), aus dessen Output ich die fraktale Dimension des

Attraktors berechnete. Dafür führte ich systematisch bisher über 50 Simulationen mit verschiedenen Anfangsbedingungen durch, und leitete aus den Ljapunow-Exponenten und Zustandsebenen relevante Schlussfolgerungen ab. Die Simulation arbeitet mit dem Runge-Kutta-Verfahren ODE45, durch die veränderliche Punktdichte entstünde bei der Darstellung des Attraktors ansonsten ein zweiter nur in der Simulation existenter Parameter ohne

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

physikalische Entsprechung. Durch äquidistante Interpolation kann diese Variable eliminiert werden.

und Amplitude ein. Bei geringerer Dämpfung tritt Bifurkation ein, der Schwinger wechselt zwischen

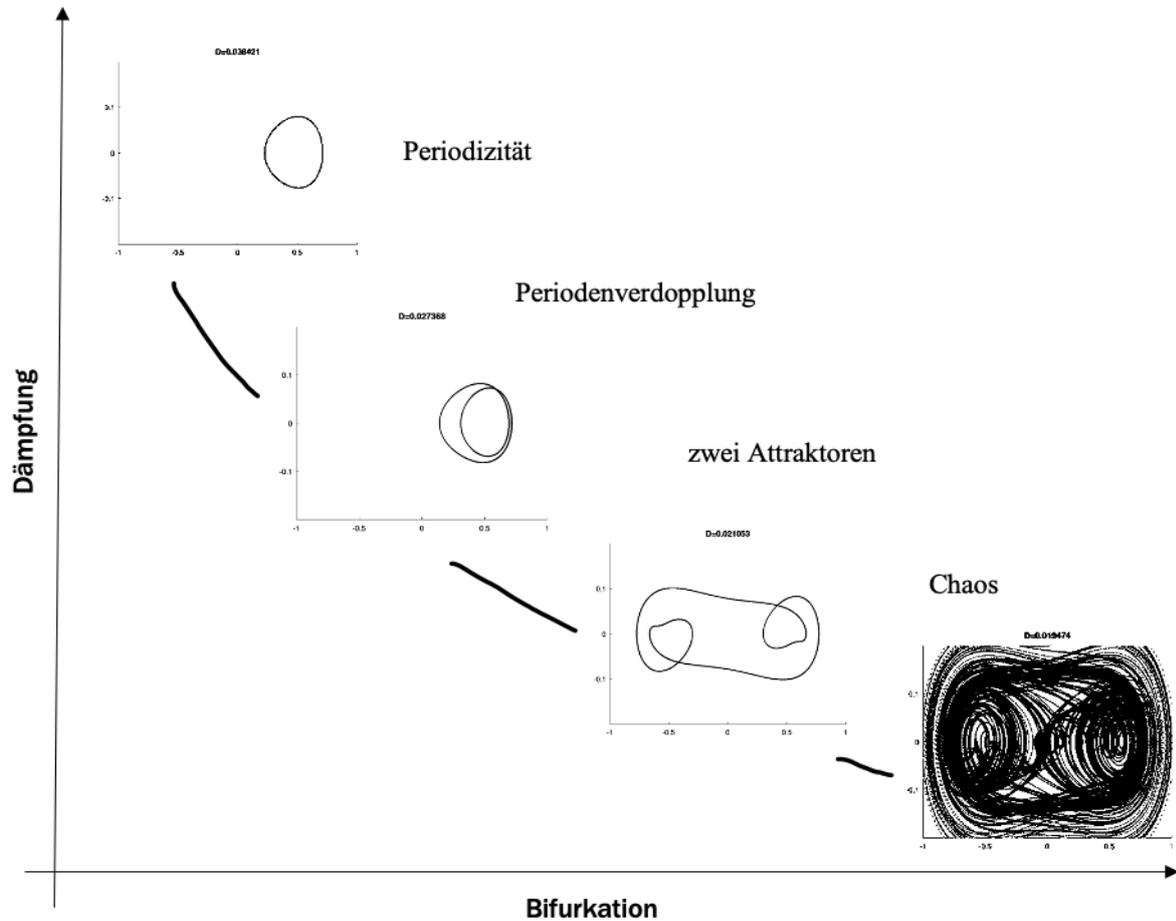


Abb.20 | „Weg ins Chaos“ meines Pohlschen Rads in der Simulation: Eine Periode zerfällt bis die einzelnen Schwingungen nicht mehr zu trennen sind und das Verhalten unvorhersehbar wird.

5.1 Weg ins Chaos

Beim Erstellen der Zustandsebenen des Pohlschen Rads konnte ich mehrere Parameter variieren: Die statische Verdrehung des Pendels als Äquivalent zur Unwucht und die Dämpfung als Äquivalent zur Spannung der Wirbelstrombremse. Beide Parameter sind relevant für die Entwicklung chaotischen Verhaltens, denn mit Veränderung der Dämpfung verschiebt sich die Resonanzfrequenz des Pendels. Die Erregerfrequenz beließ ich innerhalb einer Reihe gleich, um den isolierten Einfluss der Dämpfung zu betrachten. Dabei muss die Einschwingzeit berücksichtigt werden, also die Zeitspanne bis zur Übereinstimmung der Frequenzen von Schwinger und Erreger (Resonanz), bzw. bis zum Erreichen des Attraktors. Nach Ende der Einschwingzeit tritt eine periodische Schwingung mit konstanter Frequenz

zwei Amplituden und das System unterliegt zwei Attraktoren. Dadurch liegt keine Resonanz mehr vor, denn die Amplitude beeinflusst die Pendelfrequenz, die nicht mehr mit der des Erregers übereinstimmt.

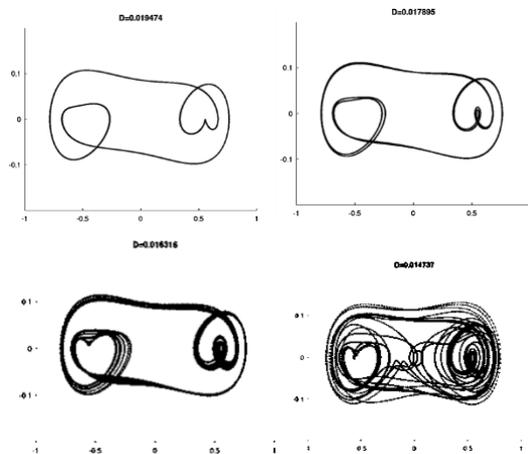


Abb.21-24 | Weitere simulierte Bifurkationsschritte: Ab dem dritten Bifurkationsschritt wird das Systemverhalten

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Da die Bifurkationen immer enger aufeinander folgen, lassen sie sich nicht mehr trennen, sodass das System sich deterministisch chaotisch verhält. Auch die Simulation zeigt diesen Weg ins Chaos. Nun begann ich mit der Berechnung der Dimension, um ein Zusammenhang mit chaotischem Verhalten zu hinterfragen.

5.2 Ljapunow-Spektrum

Als ich dafür die Ljapunow-Spektren auftrug, sah ich zunächst kaum einen Zusammenhang. Die von null verschiedenen Ljapunow-Exponenten wachsen oder fallen nicht streng monoton bei Veränderung der Dämpfung, viel mehr fluktuieren sie. Dies bestätigt die „Fenster im Chaos“, die auch bei Bifurkationsdiagrammen des Pohlschen Rads mit der Dämpfung als Bifurkationsparameter zu beobachten sind, denn nur bei den Dämpfungen, die einen $\lambda_{max} > 0$ zeigen, kann chaotisches Verhalten

$f = 0,01$, $p = 1,05$ und $D = 0,01$ erhalte ich ein Ljapunow-Spektrum von $\lambda = \{0,017; 0,00; -0,037\}$. Es gilt $j = 2$, da

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 0,017 + 0,00 = 0,017 \geq 0 \quad (6.1)$$

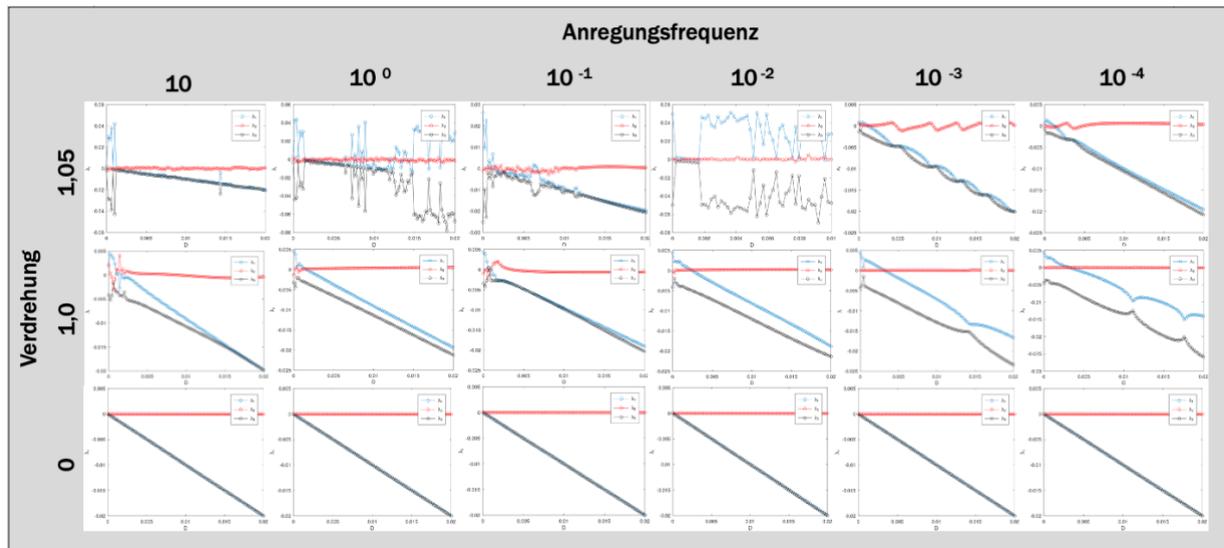
und

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0,017 + 0,00 - 0,037 = -0,02 < 0 \quad (6.2)$$

Folglich konnte ich berechnen

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} = 2 + \frac{0,017 + 0,00}{|-0,037|} = 2,46 \quad (6.3)$$

Das bedeutet anschaulich, dass der Attraktor sowohl Eigenschaften einer Fläche als auch solche eines Volumens aufweist. Damit ist eine fraktale KY-Dimension bei chaotischen Parametern bestätigt. Ich führte die Rechnung für mehrere Einstellungen durch.



auftreten.

6.2 Fraktale Dimension und LE-Spektrum

Dabei zeigt sich ein Zusammenhang zwischen

6. Fraktale Dimension

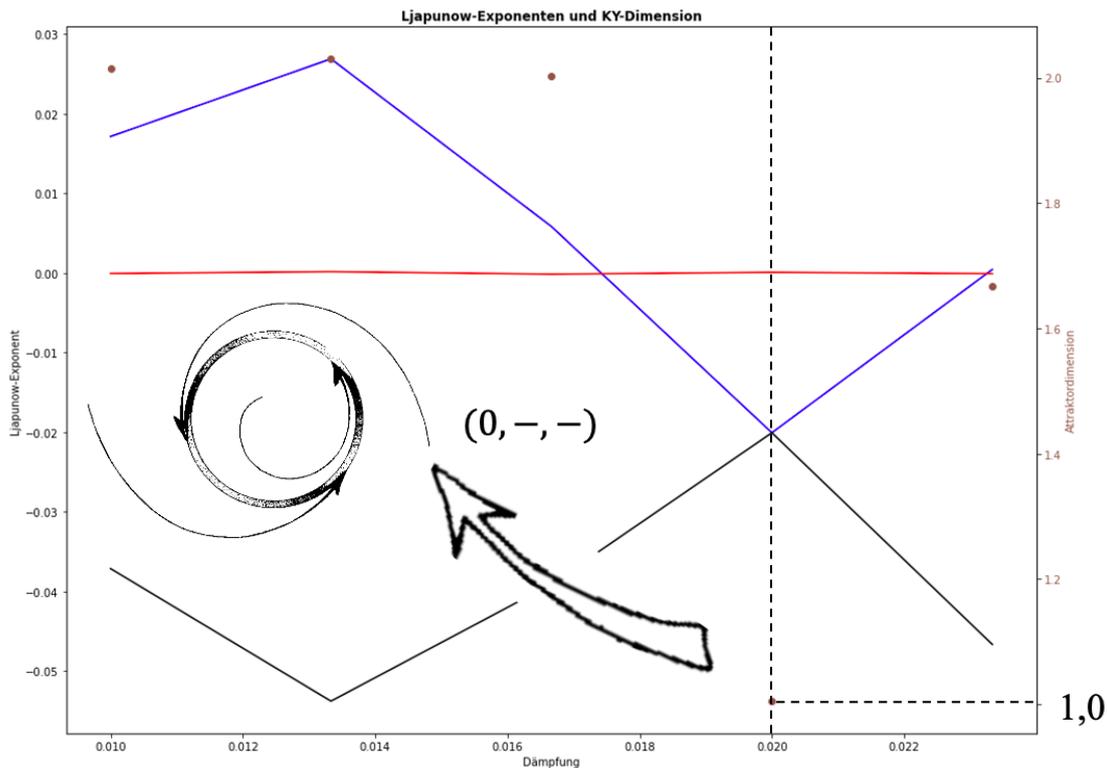
Aus diesen Daten berechnete ich fraktale Dimensionen (s. Abb.43).

6.1 Beispielrechnung

Hier stelle ich den Prozess beispielhaft an einem chaotischen Parametersatz dar. Für die Einstellungen

Dimension des Attraktors und dem LE-Spektrum. Auffällig ist bspw. in Abb. 43 eine qualitative Zustandsänderung bei $D = 0,02$. Ich suchte zunächst nach Fehlerquellen, um das sprunghafte Sinken der KY-Dimension zu erklären,

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren



doch konnte keine identifizieren, sodass es sich um ein reales

- **theoretisch** durch Analyse der Rückkopplungen in den Bewegungsgleichungen und Formulierung empirisch prüfbarer Modelle,
- **experimentell** durch meine Messungen an

physikalisches Phänomen handeln muss. An dem Punkt, an dem λ_1 negativ wird, springt das Schema der Ljapunow-Exponenten von $(+, 0, -)$ auf $(0, -, -)$ und j somit von 2 auf 1. Da $\sum_{i=1}^j \lambda_i = 0$ ist, ist die fraktale Dimension ganzzahlig und ein eindimensionaler Kreisattraktor entsteht. Bei der nächst höheren Dämpfung wird λ_{max} positiv und die KY-Dimension nimmt wieder einen Wert zwischen eins und zwei an, der Attraktor wird seltsam. Auf diese Weise lassen sich die scheinbar willkürlichen Werte des Bifurkationsparameters, bei denen es zu einem Übergang zwischen Ordnung und Chaos kommt, erklären: Wenn der Bifurkationsparameter

chaotischen Systemen und deren Auswertung durch Phasenraumdiagramme, Poincaré-Schnitte, Schwingungsdiagramme und Frequenzspektren,

Abb. 43. | Simuliertes Beispiel für mein Modell der Bifurkation: Bei $D = 0,02$ ereignet sich eine qualitative Zustandsänderung, da λ_1 negativ wird und die Attraktordimension auf 1,0 springt. Folglich handelt es sich um einen Kreisattraktor, der kein Chaos zeugen kann. Es ist allerdings um eine isolierte periodische Lösung, benachbarte Trajektorien auf konvergieren.

bestätigen dies.

7. Ergebnisse

Die Fragestellungen konnten beantwortet werden,

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

- o **numerisch** durch Computersimulationen und deren Auswertung durch Ljapunow-Spektren, Poincaré-Abbildungen und die Berechnung der fraktalen Dimension.

Damit sind ersten beiden Forschungsfragen umfassend beantwortet. Sensitiv abhängige Systeme kann

ich wie folgt charakterisieren:

- o Das Ljapunow-Spektrum chaotischer Systeme folgt i.d.R. dem Schema (+, 0, -).
- o Die Fourier-Transformation eines chaotischen Systems zeigt diffuses Rauschen.
- o Ohne Unwucht kann beim Pohlschen Resonator kein Chaos entstehen ($LE_{max} \leq 0$).

Mein Bifurkationsmodell auf Basis der fraktalen Dimension des Attraktors konnte ich bestätigen:

- o Ein zersplitterter Torus als seltsamer Attraktor mit $D \notin \mathbb{Z}$ erzeugt Chaos.
- o Bei Veränderung des Bifurkationsparameters springt die KY-Dimension zwischen topologischer und einbettender Dimension und wird bei $LE_{max} > 0$ ganzzahlig.
- o Numerische Fehler in Simulationen können einen negativen max. LE erzeugen, wodurch ein Punktattraktor imitiert wird und die KY-Dimension nicht definiert ist.

8.Diskussion

Im Kontext meines nun auch durch experimentelle Daten und Simulationen bestätigten Konzepts (s. Abb.19) habe ich die Formel wie folgt interpretiert.

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$

Der Zähler des Bruchs stellt die divergierende Phasenraum-Komponente dar. Er gibt an wie **chaotisch** der Attraktor ist und verkörpert die Fähigkeit benachbarter Trajektorien exponentiell

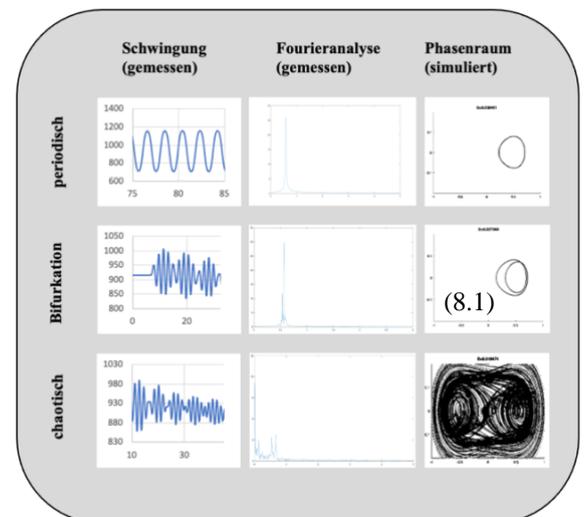
auseinanderzulaufen. Der Nenner drückt die Dissipation aus und gibt somit an wie **attraktiv** der Attraktor ist. Er stellt die Komponente dar, in der Schwingungen abklingen – ist sie null, so existiert kein Attraktor. Der **Umschlagpunkt** ist der „ganze“ Anteil der Dimension, es ist ein Relikt des Torus-Attraktors, dem der seltsame Attraktor durch Bifurkation entspringt.

8.1 Einschränkungen

Folgende Anmerkungen gilt es bei Betrachtung meiner Ergebnisse zu berücksichtigen.

8.1.1 Numerische Effekte. Ich beobachtete insofern eine Abweichung von der Theorie, dass nicht immer einer der Exponenten exakt null ist, er lag aber meist in einer Größenordnung von $\pm 10^{-4}$ oder geringer. Damit liegt sein Betrag um mind. zwei Größenordnungen unter den für die anderen Exponenten resultierenden Werten, wodurch deren Berechnung über den Satz von Liouville (s. Abs.5.2) nicht unbrauchbar wird. Es ist allerdings insofern relevant, dass die Ljapunow-Exponenten durch die geringfügigen Schwankungen des i.d.R. null annehmenden Exponenten temporär das Schema (-, -, -) annehmen, wodurch ein Punktattraktor imitiert wird und die KY-Dimension nicht definiert ist, da kein j existiert.

8.1.2 Dimensionsbegriff. Die KY-Dimension stellt

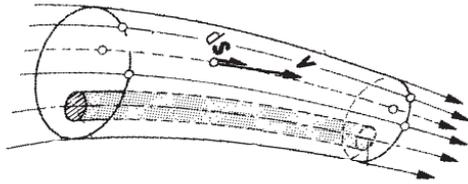


lediglich die Obergrenze für die Hausdorff-Dimension dar. Um die gewonnenen Schlussfolgerungen zu sichern, könnte die

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Boxcounting-Dimension, die i.d.R. mit der Hausdorff-Dimension übereinstimmt, analytisch berechnet werden, wobei der Attraktor mit der Gitterbreite ε „verpixelt“ wird.

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$



Hierbei fiel auf, dass auch ein quantisierter Phasenraum Energieparzellen, also „Kästchen“ des Volumens $\frac{1}{2} h^3 \approx 1,45458154 \cdot 10^{-100} \frac{m^6 kg^3}{s^3}$ aufweist.

8.2 Fraktale Quantenunschärfe?

Die Analogie zwischen den Kästchen der Boxcounting-Dimension und den quantenmechanischen Energieparzellen ließ mich vermuten, dass die von mir beobachteten seltsamen Attraktoren in der Lage sind einen der Quantenunschärfe gleichenden Effekt zu erzeugen.

Diese können aufgrund des Grenzprozesses bei der Berechnung der Boxcounting-Dimension jedoch nur bei Betrachtung der Mikrozustände auftreten. Schließlich ist die fraktale Dimension bei großer **Abbildung: Verpixeltung des Phasenraums für die Boxcounting-Dimension als Quantisierung?** durch Dekohärenz für den gemessenen Makrozustand keine Rolle mehr spielen.

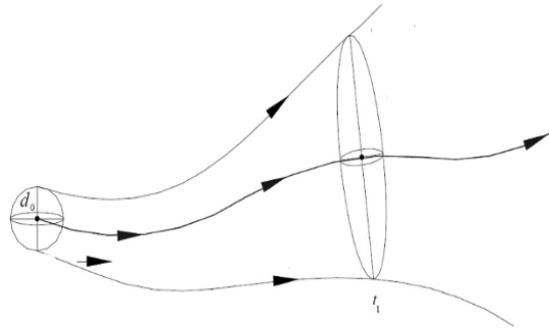
8.3 Ausblick

Eine weitere Analogie besteht zwischen Ausdrücken der Feldtheorien und der Phasenraum-Mechanik, was mich auf die Idee brachte, Phasenraum-

Trajektorien wie Feldlinien in einem Vektorfeld zu behandeln und die Kontinuitätsgleichung anzuwenden.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

In Bezug auf meine Ergebnisse werden die beobachteten Attraktoren dabei zu Senken mit



negativer Divergenz, wodurch ich auch erklären kann, wie die Attraktordimension über das Ljapunow-Spektrum Einfluss auf die Trajektorie nimmt (KY-Vermutung): Der Attraktor bestimmt als Senke, also Endpunkt, bzw. „Endregion“ der Trajektorie, dessen Verlauf so wie eine Masse Gravitationsfeldlinien oder ein Minuspol elektrische Feldlinien lenkt.

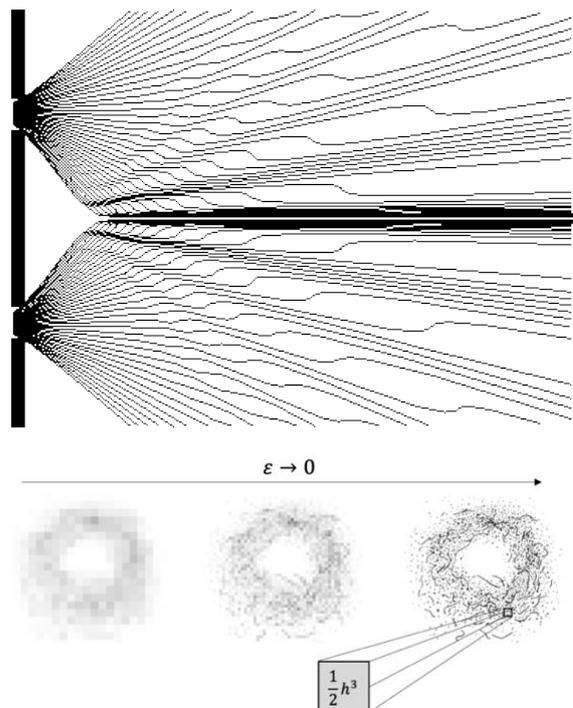


Abb.46 | Beide durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben? Links: Flüssigkeitsstrom in einem Rohr, Rechts: Divergente Phasenraum-Trajektorien in einem chaotischen System.

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

$$\operatorname{div} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \sum_{i=0}^f \lambda_i$$

Setzt man die Summe der LE für die Divergenz ein, ist offensichtlich, dass die zeitliche Änderung der Energiedichte null wird, wenn diese Summe null ist.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=0}^f \lambda_i = 0 \Rightarrow - \sum_{i=0}^f \lambda_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8.4)$$

In konservativen Systemen ist die Summe der LE null. Die Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf Phasenraum-Trajektorien scheint insofern sinnvoll zu sein, dass zutreffende Aussagen erhalten bleiben, wenn ein Phasenraum-spezifischer Ausdruck wie die Summe der LE für die Divergenz eingesetzt wird. Dies bestärkt mich darin, dass die Kontinuitätsgleichung Phasenraum-Trajektorien beschreibt und dies

den Weg zu einer neuen Interpretation der Quantenmechanik ebnen könnte. Die von DAVID BOHM (1917-1992) und LOIUS DE BROGLIE (1892-1987) entwickelte De-Broglie-Bohm-Theorie liefert einen Ansatz, um Ortsraum-Trajektorien von Teilchen zu berechnen. Rein Optisch fällt bereits eine Ähnlichkeit zu Bifurkationsdiagrammen auf, die Maxima erinnern an Attraktoren.

Meine Arbeit hat gezeigt, dass die experimentell und numerisch überprüfbareren Aussagen mit der klassischen Chaostheorie übereinstimmen. Es deuten sich Analogien zu Grundlagen der modernen Physik an, aber es kann nicht Gegenstand dieser Arbeit sein zu erörtern, ob diese Möglichkeit den Test der Erfahrung besteht.

Anhang

Abb.47 | Bohmsche Bahnen am Doppelspalt

10.1 Literaturverzeichnis

Bohn (2018): *A Student's Guide to Analytical Mechanics*

Strogatz (1994): *Nonlinear Dynamics and Chaos*

Argyris et al. (1994): *Die Erforschung des Chaos*

Alligood, Sauer, Yorke (1996): *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*

Briggs, Peat (1993): *Die Entdeckung des Chaos – eine Reise durch die Chaos-Theorie*

Feldman (2012): *Chaos and Fractals: An Elementary Introduction*

Falconer (2014): *Fractal Geometry*

Peitgen (1989): *Chaos und Fraktale*

Leven, Koch, Pompe (1989): *Chaos in dissipativen Systemen*

Stoop, Steeb (2006): *Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen*

Schuster (1995): *Deterministic Chaos – an Introduction*

Reitmann (1996): *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Reguläre und chaotische Dynamik*

Sugihara, Hastings (1996): *Fraktale: Ein Leitfaden für Anwender*

Smith (2010): *Chaos (Reclam Sachbuch)*

Nayfeh, Balachandran: *Applied nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*, University of Maryland, Virginia Polytechnic Institute and State University

Hattori, Ishimura, Ohnishi, Umeki (1992): *Dimension Estimate of the Global Attractor for Forced Oscillation Systems*

10.2 Bildquellen

Abb.3:

<https://itp.tugraz.at/LV/arrigoni/projektpraktikum/paust/f.pdf> (Ausschnitt)

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Abb.4:

<https://itp.tugraz.at/LV/arrigoni/projektpraktikum/paust/f.pdf> (Ausschnitt)

Abb.18/19:

https://science.kairo.at/physics/fba_mandelbrot/kap3.html (Ausschnitte neu zusammengesetzt und bearbeitet)

Abb.46:

https://media.springernature.com/original/springer-static/image/chp%3A10.1007%2F978-3-662-59711-8_17/MediaObjects/978-3-662-59711-8_17_Fig2_HTML.png und

Abb.47: <https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~duerr/Zufall/img27.gif>

Titelbild:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/9e/Julia-Menge_-0.4%2B0.6i.png/1280px-Julia-Menge_-0.4%2B0.6i.png

Alle weiteren Abbildungen habe ich selbst erstellt.

10.3 Unterstützungsleistungen

Bei meiner Forschung unterstützt haben mich

KP Haupt als Projektberater,

Till MacCormac als Projektberater und durch seine Unterstützung beim Codieren,

Prof. Hartmut Hetzler durch die Bereitstellung von Literatur und des Simulationsprogramms des Pohlschen Resonators

und Ilian Eilmes durch eine Einführung in MATLAB,

die alle für das Zustandekommen dieser Arbeit eine gewisse Menge Chaos auf sich nahmen. Ihnen sei gedankt.