G07-Feszito-EA-200402.tex, 20.04.02.

7. Feszítőfák

Dr. Szalkai István

2020.04.02.

Definíció: *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf* $T = (W, F) \subsetneqq G$ *részgráfja* **feszítőfa** (faváz, spanning tree), *ha* $W = V$ *és* T *fa.* $\square$

Megjegyzések: i) *Részgráf*, de *nem* feszített részgráf,

ii) csak *összefüggő* gráfban létezhet feszítőfa, ÉS minden *összefüggő* gráfban létezik, sőt minimális költségű is,

iii) újabb algoritmus összefüggőség vizsgálatára,

iv) feszítőfák *száma* mátrixokkal meghatározható.

Definíció: i) $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}_+$ *nemnegatív súlyozott élű gráf*, $T = (W, F) \subsetneqq G$ *részgráf* **összsúlya** (*összköltsége*)

$$w(T) := \sum_{e \in T} w(e) \; .$$

ii) $T \subsetneqq G$ **minimális költségű/súlyú** feszítőfa, *HA nincs* $w(T)$ *-nél kisebb súlyú feszítőfa* G *-ben; azaz* G *minden* $R \subsetneqq G$ *feszítőfájára* $w(R) \geq w(T)$. $\square$

Kruskal algoritmusa

"Kruskal" vagy "Prim" algoritmusa ?
Joseph Bernard **Kruskal** Jr. (1928-2010) amerikai, 1953 -ban,
Robert Clay **Prim** (1921-) amerikai, 1957 -ben,
Vojtěch **Jarník** (1897–1970) cseh, 1930-ban,
Edsger Wybe **Dijkstra** (1930-2002) holland, 1959 -ben, => DJP *algorithm*

Algoritmus (Kruskal)

Adott: $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}_+$.

Lépésenként konstruálunk

$$T_1 \subsetneqq T_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq T_{n-1} \subseteqq G$$

részgráfokat G -ben úgy, hogy T_i mindig fa.

START: T_1 := minimális súlyú éle G -nek:

$$T_1 := \{e_1\} \ .$$

CIKLUS: T_i már adott. Keresendő $e_{i+1} \in E$ amelyre

$T_i \cup \{e_{i+1}\}$ fa ÉS $w\,(e_{i+1})$ minimális ilyen . (!)

Ekkor legyen

$$T_{i+1} := T_i \cup \{e_{i+1}\} \quad .$$

□

Tétel: T_{n-1} *valóban egy minimális költségű feszítőfa.* Bizonyítás: Tankönyvben. □

Megjegyzések: **i)** e_{i+1} megtalálása $\mathcal{O}(n^2)$ lépés, tehát az egész algoritmus $\mathcal{O}(n^3)$.

Adatok megfelelő tárolása => $\mathcal{O}(n^2)$ -re csökkenthető.

ii) mohó (**greedy**) algoritmus.

Nem minden feladatra adható mohó algoritmus, pl. legrövidebb út keresése. **Greedoids**.

Az adatok optimális tárolása

Módszer:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adjacencia mátrix, $w : E \to \mathbb{R}_+$ -t tárolja.

Bővítsük ki két újabb oszloppal.

" +1 " - oszlop j -dik sor := v_j csúcs legkisebb *távolsága* (pillanatnyi) T_i részfától, vagy 0 vagy $+\infty$.

" +2 " - oszlop j -dik sor := a fenti él másik végpontja vagy *üres*.

START: $e_1 \in E$, $w(e_1)$ minimális, $e_1 = \{a_0, b_0\}$

=> a_0 és b_0 csúcsok " +1 " - oszlopába 0 , " +2 " - oszlopába a "másik" ,

TÖBBI CSÚCS: a_0 és b_0 közül melyikhez van *közelebb* (össze van-e kötve), vagy $+\infty$,

CIKLUS: a " +1 " - oszlop legkisebb pozitív eleme $= e_{i+1}$, 0 -ra állítjuk.

végpontjai " +2 " - oszlop v_{i+1} és a (bal oldali) oldalléc.

Többi, nem fában levő csúcs: az új v_{i+1} -hez közelebb van-e mint eddig T_i -hez,

vagyis a " +2 " -oszlopot és v_{i+1} oszlopát kell összehasonlítanunk. $\square$

Megjegyzések:

Az algoritmus legkésőbb $n-1$ lépés után megáll, a feszítőfa **élei** a +2 -dik oszlopban találhatóak.

Minden ciklus $\mathcal{O}(n)$, az egész algoritmus $\mathcal{O}(n^2)$ lépést igényel.

Példa

Az üresen hagyott cellákban $+\infty$ áll.

A választott minimális súlyú **élt** minden ciklusban kiszíneztük.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		**2**					4	2	
B	2		12					2	14
C		12		12					5
D			12						6
E						18			16
F					18		20		
G	4					20		5	15
H	2	2					5		9
I		14	5	6	16		15	9	

	1.		**2.**		**3.**		**4.**		**5.**		**6.**		**7.**		**8.**	
	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2
A	0	B	0	B	0	B	0	B	0	B	0	B	0	B	0	B
B	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A
C	12	B	12	B	12	B	**5**	I	0	I	0	I	0	I	0	I
D							6	I	**6**	I	0	I	0	I	0	I
E							16	I	16	I	**16**	I	0	I	0	I
F					20	G	20	G	20	G	20	G	**18**	E	0	E
G	4	A	**4**	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A
H	**2**	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A
I	14	B	9	H	**9**	H	0	H	0	H	0	H	0	H	0	H

Tehát a feszítőfa élei (az első és utolsó oszlop alapján) $\{A,B\}$, $\{C,I\}$, $\{D,I\}$, $\{E,I\}$, $\{F,E\}$, $\{G,A\}$, $\{H,A\}$ és $\{I,H\}$.

Utazó ügynök metrikus gráfokban

Speciális gráfokban közelítő (majdnem optimális) de *gyors* algoritmus egy $\mathcal{NP}$ *-teljes* problémára!

Definíció: A $G = K_n$ *teljes gráfon* $w : E \to \mathbb{R}_+$ *súlyfüggvény* **metrikus**, *ha teljesül* háromszög-egyenlőtlenség:

$$\forall x, y, z \in V \qquad w(x,z) \le w(x,y) + w(y,z) \quad . \qquad \Box$$

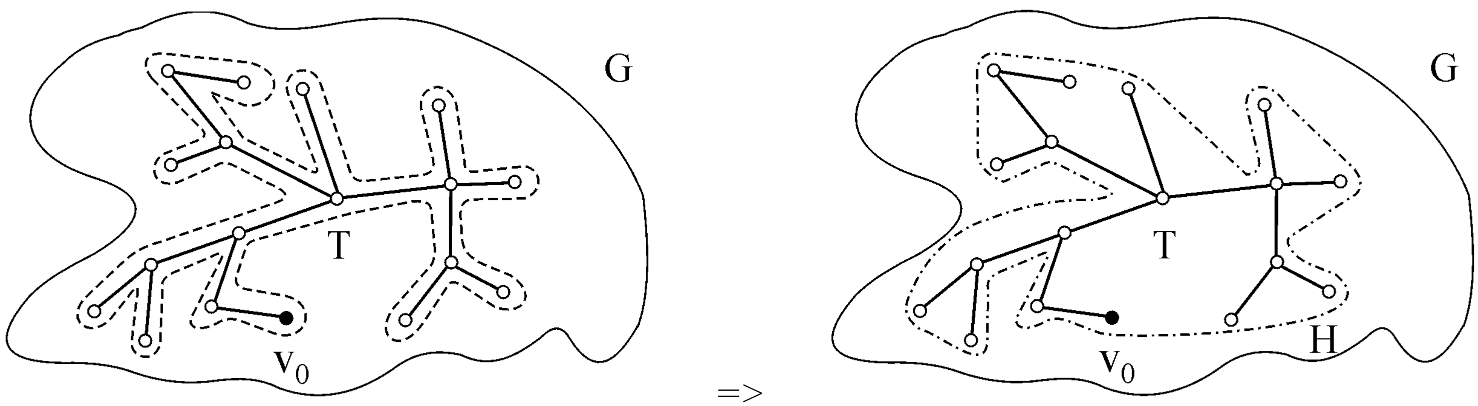
Tétel: *K_n -ben tetszőleges metrikus súlyfüggvény esetén $\mathcal{O}(n^2)$ időben találunk az optimálisnál legfeljebb* kétszer *hosszabb Hamilton kört.*

Algoritmus: (1) $T \subsetneqq K_n$ egy minimális feszítőfa.

(2) A síkon "körbejárjuk" a fát mindkét oldalán.

(3) A csúcsismétlődéseket megszüntetjük.

Ez legfeljebb $\mathcal{O}(n^2)$ lépés. $\Box$



Kérdés: az így kapott H-körnek mennyi a súlya?

(4) $w(T) \le w(H_0)$ ahol T a feszítőfa, H_0 egy minimális Hamilton kör.

(5) T éleit kétszer jártuk végig: $w(\text{- - -}) = 2 \cdot w(T)$.

(6) Ha csúcsismétlődést megszüntetünk akkor $w(v,x) \le w(v,u) + w(u,x)$,

azaz $w(\text{......}) \le w(\text{- - -})$,

(7) Tehát $w(\text{......}) \le w(\text{- - -}) = 2w(T) \le 2 \cdot w(H_0)$. $\Box$

Megjegyzés: Kissé bonyolultabb módon a $\le 2\cdot$ és a $\mathcal{O}(n^2)$ futásidő csökkenthető.