Matematik B-niveau HF
15. august 2019

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 15/08/19. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: `matematikuniverset@hotmail.com`

OBS: Vi har ikke fået den rigtige version. Derfor kan du ikke se løsningerne til opgave 3. Har du det rigtige sæt? Send gerne. ☺

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Udtrykket reduceres.

$$2ab - a^2 + (a-b)^2 = 2ab - a^2 + a^2 + b^2 - 2ab = b^2. \tag{1}$$

Opgave 2.

(a) Funktionen f differentieres.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{2}$$

som findes i formelsamlingen formel (112) s. 21. Man kan også udlede det.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{3}$$

(b) Funktionen g differentieres. Formlen benyttes nedenfor:

$$g'(x) = [a(b(x))]' = a'(b(x))b'(x). \tag{4}$$

Man har $a(x) = 2x - 4$ og $b(x) = \sqrt{x}$. Dermed er $a'(x) = 2$ og $b'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Så,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}. \tag{5}$$

Opgave 3.

(a) Send rigtige opgavesæt. Omhandler stykvise funktioner.

Ikke desto mindre finder vi bare på vores egen forskrift, som vi vil vise er splejset i $x = 1$. Lad f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases} = \begin{cases} x+1, & -3 < x < 1 \\ -x^2+2x+1, & 1 \leq x < 5 \end{cases}. \tag{6}$$

Vi vil vise, at denne er splejset i $x = 1$ ved at udregne $f(1)$. Man har

$$f(1) = \begin{cases} f_1(1) \\ f_2(1) \end{cases} = \begin{cases} 1+1=2 \\ -1^2+2\cdot 1+1 = -1+2+1 = 2. \end{cases}. \tag{7}$$

Da $f_1(1) = f_2(1)$ er ens, så er f splejset i $x = 1$.

Opgave 4.

(a) Sandsynligheden $P(X \geq 6)$ bestemmes. Man adderer bare sandsynlighederne fra tabellen, så

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 8) = 0.2 + 0.1 = 0.3. \tag{8}$$

(b) Middelværdien μ bestemmes.

$$\mu = 0.25\cdot 0 + 0.15\cdot 2 + 0.30\cdot 4 + 0.2\cdot 6 + 0.10\cdot 8 = 3.5. \tag{9}$$

(c) Sandsynligheden $P(X < \mu = 3.5)$ bestemmes. Man adderer bare sandsynlighederne fra tabellen, så

$$P(X < 3.5) = P(X = 0) + P(X = 2) = 0.25 + 0.15 = 0.4. \tag{10}$$

Opgave 5.

(a) Ligningssystemet løses.

$$x + y = 1, \tag{11}$$
$$2x - y = 14. \tag{12}$$

Vi isolerer y i (11) først.

$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x. \tag{13}$$

Indsættes i (12). Man får,

$$2x - (1-x) = 14 \Leftrightarrow 2x - 1 + x = 14 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5. \tag{14}$$

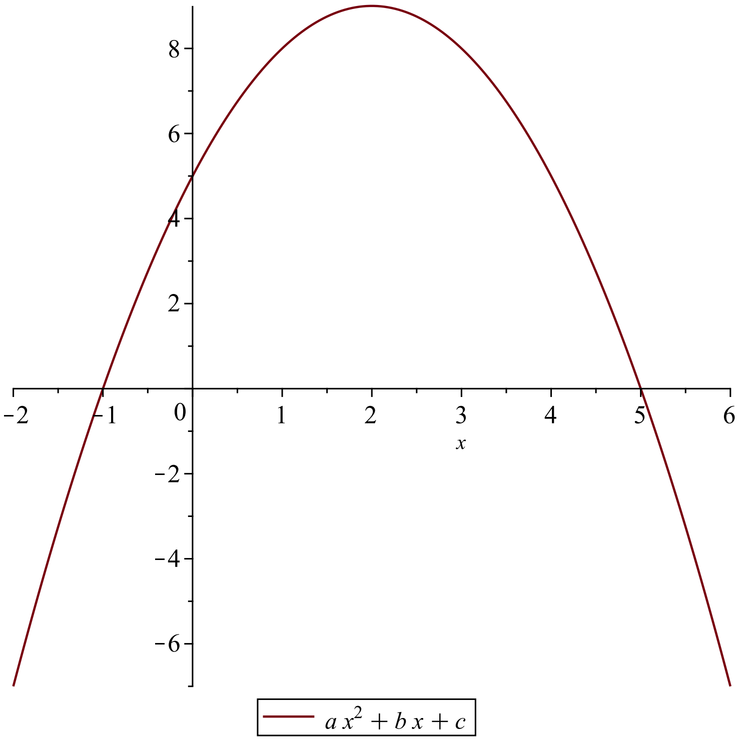
Så $x = 1$ indsættes i (13),

$$y = 1 - 5 = -4. \tag{15}$$

Dvs. løsningen til ligningssystemet er $x = 5 \wedge y = -4$.

Opgave 6.

(a) Funktionen tegnes. Vi snyder lidt i Maple. ☺



(b) Fortegnet for b og c kan man aflæse af grafen ovenfor. Man har, at $b > 0$, da toppunktet ligger i første kvadrant og $a < 0$. (Alternativt: Hældningen for tangenten i (0,c) er positiv!). Tallet $c > 0$, da grafen har skæring med den positive del af y-aksen.

Kommando til plottet.

```
plot(-x^2+4*x+5,x=-2..6,legend=a*x^2+b*x+c)
```

Opgave 7.

(a) Der forsvinder hvert år $200000\text{km}^2 = 2 \cdot 10^5\text{km}^2$. I år 2030 findes der ikke noget uberørt skov i år 2030. Derfor kan man konstatere, at der i år 2019 var

$$200000\text{km}^2 \cdot 11 = 2200000\text{km}^2 = 22 \cdot 10^5\text{km}^2. \tag{16}$$

Delprøve 2.

Se næste side. Løsninger er lavet i Maple 2020.

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik B delprøve 2, 15. august 2019.

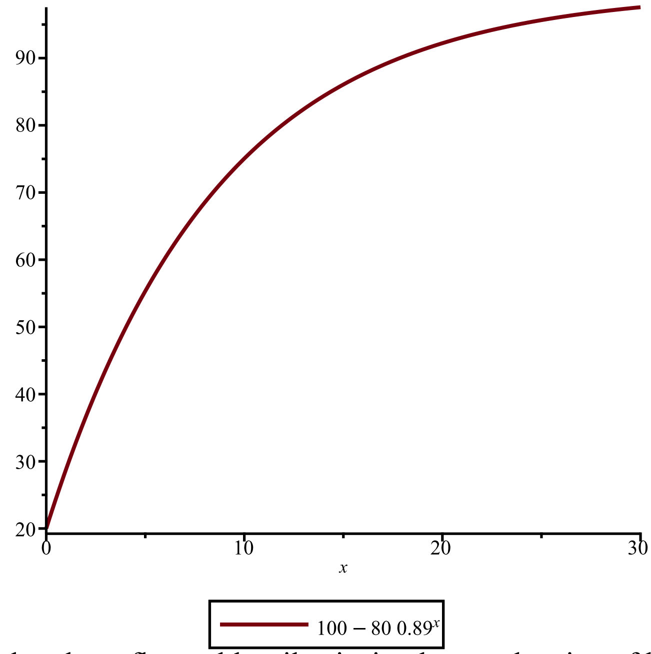
Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 8: Funktionen defineres.

$f(x) := 100 - 80 \cdot 0.89^x :$

(a) Grafen for f tegnes i de første 30 minutter.

$plot(f(x), x = 0..30, legend = f(x))$



(b) For at finde tidspunktet kartoflen er klar til spisning kræver løsning af ligningen $f(x) = 93$.

$solve(f(x) = 93)$

$$20.90480312 \quad \textbf{(1)}$$

Efter ca. 21 minutter er kartoflen spiseklar.

(c) Tallet $f'(10)$ bestemmes og fortolkes.

$f'(10)$

$$2.906979858 \quad \textbf{(2)}$$

Tallet fortæller, at efter 10 minutter øges temperaturen hvert minut med 2.9^oC.

Opgave 9:
restart : *with*(*Gym*) :
(a) Afstanden mellem P og l bestemmes.

$$dist(P, l) = \frac{\text{abs}(2\cdot 7 + (-3) - 1)}{\sqrt{2^2 + 1}}$$

$$dist(P, l) = 2\sqrt{5} \tag{3}$$

evalf[5](%)

$$dist(P, l) = 4.4722 \tag{4}$$

Afstanden er ca. 4.47 mellem P og l.

(b) Ligningen for cirklen bestemmes ud fra P og distancen mellem P og l.

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 20 \tag{5}$$

(c) Hældningen for l er $a = 2$. Anvendes $a \cdot c = -1$ hvor c er hældningen for m, har man
solve($2\cdot c = -1$)

$$-\frac{1}{2} \tag{6}$$

Dvs. $c = -\frac{1}{2}$. Hældningsvinklen bestemmes.

$$v = \text{abs}\left(invTan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$v = 26.56505117 \tag{7}$$

Dvs. den spidse hældningsvinkel er $v = 26.6^o$C.

Opgave 10: Funktionen defineres.

$f(x) := 8\cdot\ln(5-x)+x^2-12:$

(a) Ligningen $f'(x)=0$ løses.

$f'(x)=0$

$$-\frac{8}{5-x}+2x=0 \tag{8}$$

solve(%)

$$4,\ 1 \tag{9}$$

Man får $x=1 \vee x=4$. Løsningerne er sande, da de ligger indenfor intervallat $0<x<5$.

(b) Monotoniforholdene for f bestemmes. Fra (a) har man $x=1 \vee x=4$, så der foretages fortegnsvariation. Vælg $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ og $x=\frac{9}{2}$. Man har

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{9}$

$f'(2)=\frac{4}{3}$

$f'\left(\frac{9}{2}\right)=-7$

Af ovenstående kan man lave et monotoniskema.

x	0		1		4		5
$f'(x)$	*Ikke def.*	-	0	+	0	-	*Ikke def.*
$f(x)$	*Ikke def.*	↘	$f(1)=0.09$	↗	$f(4)=4.$	↘	*Ikke def.*

Og udlede, at funktionen $f(x)$ er:

- Aftagende i intervallerne $]0;1]$ og $[4;5[$.

OBS: Åbne endeintervaller!

- Voksende i intervallet $[1;4]$.

(c) På baggrund af (a) har man, at $f'(x)=0$ medfører to skæringer med førsteaksen ved netop $x=1$ samt $x=4$. Den oprindelige funktion har, ifølge (b), et lokalt minimum i $x=1$, og da tallet er større end 0 har man at funktionen ikke skærer førsteaksen i det pågældende interval fra $]0;4]$. Da funktionen gælder i intervallet $0<x<5$ og man ser, at ved $[4;5[$ er funktionen aftagende, så følger det at der skærning med førsteaksen i $[4;5[$, da $f(5)$ giver en singularitet. Derfor vil $f(x)$ have netop én løsning med førsteaksen i $[4;5[$.

Det kan også bekræftes.

fsolve$(f(x)=0,x)$

$$4.724885487 \tag{10}$$

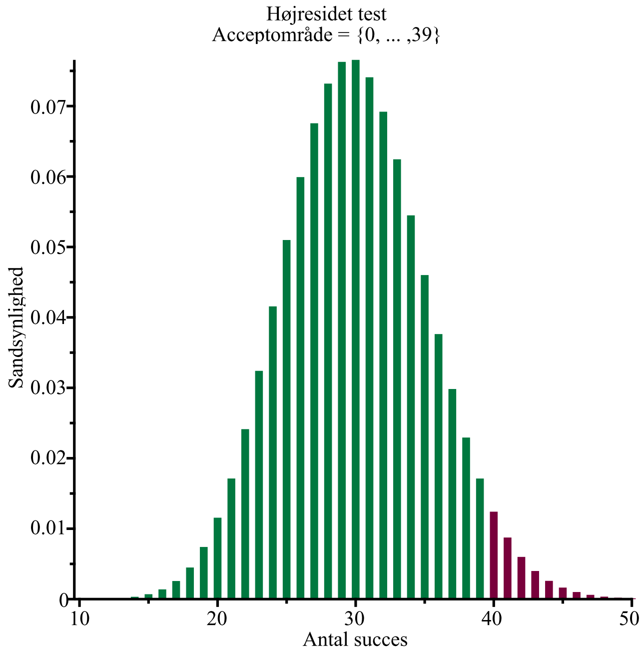
Hvilket ikke kræves af opgaven.

Opgave 11: Man har $X \sim bin(100, 0.1)$.
restart : *with*(*Gym*) :
(a) Udregn $P(X=7)$ vha. Maple.
$P(X=7) = binpdf(100, 0.1, 7)$

$$P(X=7) = 0.08889524638 \quad \textbf{(11)}$$

Dvs. sandsynligheden for, at der er netop 7 venstrehåndede personer i stikprøven er 8.9%.

(b) Man anvender en højresidet binomialtest til dette problem. Man kan gøre det vha. Maple.
binomialTest(300, .1, 0.05, *højre*)



Tallet 45 ligger i den kritiske mængde, så nulhypotesen forkastes. Der er flere end 10% af studerende der er venstrehåndet.

I TI-Nspire har man ikke den mulighed at lave en så flot test. Derfor må man gribe opgaven an på en anden måde. Man kan gøre det, at man vælger
invbin(300, 0.1, 0.95)

$$39. \quad \textbf{(12)}$$

Man får de famøse 39. Man kan tjekke, hvad man får til venstre og højre af 39.
bincdf(300, 0.1, 38)

$$0.9450701960 \quad \textbf{(13)}$$

bincdf(300, 0.1, 40)

$$0.9746122400 \quad \textbf{(14)}$$

Dermed er acceptmængden $A = \{0, 1, ..., 38, 39\}$ og den kritiske mængde er $K = \{40, 41, ...299, 300\}$.

Kommandoerne i TI-Nspire er ikke det samme. Fremgangsmåden er dog meget ens. I stedet for *invbin*(300, 0.1, 0.95) skriver du *invBinom*(0.95, 300, 0.1, 1). Klikker du enter får du $\begin{bmatrix} 38 & 0.94507 \\ 39 & 0.962196 \end{bmatrix}$. Herfra kan du afgøre, om 40 ligger i acceptmængden eller ej. Skriv blot *binomCdf*(300, 0.1, 40, 300).

 matematikuniverset@hotmail.com

Opgave 12:

restart :; *with*(*Gym*) :

(a) Der foretages polynomiel regression.

$L1 := [1.5, 3, 5]:$

$L2 := [2, 1.4, 2]:$

$f(x) := evalf[3](\,PolyReg(L1, L2, 2, x)\,):$

Dermed er forskriften for andengradspolynomiet igennem B, C og D bestemt til

$f(x)$

$$0.200\,x^2 - 1.30\,x + 3.50 \tag{15}$$

(b) Opstilling af en halvcirkel ud fra O har man

$g(x) := \mathrm{sqrt}\left(\sqrt{1.5^2+2^2}^{\,2} - x^2\right)$

$$g := x \mapsto \sqrt{\left(\sqrt{6.25}\right)^2 - x^2} \tag{16}$$

Her er $\sqrt{1.5^2+2^2}$ afstanden fra O til B.

Hvis der skal være en glat overgang i B, skal $f'(1.5) = g'(1.5)$ være sandt. Man tester.

$f'(1.5) = g'(1.5)$

$$-0.7000 = -0.7500000000 \tag{17}$$

Da man ikke får ens resultater på begge sider af lighedstegnet, så følger det at konturen ikke har en glat overgang i B.

(Man kunne fristes til at tro at der er, netop fordi hvis man tegner situationen, så ser man at $f(x)$ og $g(x)$ er ud fra hinanden i B. Funktionen er derfor splejset i netop B, men ikke glat. Dog er det ikke det, der spørges efter.)