Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Probeklausur
Wintersemester 2011/12

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (0 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Sie brauchen keine Begründungen anzugeben. Markieren Sie Sie die *richtigen* Aussagen. Richtige Markierungen liefern $\frac{1}{2}$ Punkt, falsche $-\frac{1}{2}$ Punkt, nicht beantwortete 0 Punkte. Die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe ist mindestens Null. Die Punkte aus diesen Multiple Choice-Aufgaben gehen nicht in die Gesamtwertung zur Klausurzulassung ein.

wahr	falsch	
☐	☐	Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.
☐	☐	Jedes homogene lineare Gleichungssystem in $\mathbb{R}$, das zwei Lösungen hat, hat unendlich viele.
☐	☐	$17 \equiv 3 \pmod 7$.
☐	☐	$8^3 \equiv 8 \pmod 3$.
☐	☐	Für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}_k$ ein Körper.
☐	☐	Es seien v, w Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Der Vektor $u = \langle v, w\rangle v - \|v\|^2 w$ steht senkrecht auf v.
☐	☐	Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$. Wenn $v \perp w$, dann folgt $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$.
☐	☐	Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Es gilt $\langle v - w, v + w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$.
☐	☐	Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = a\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.
☐	☐	Es seien $A = \{(-3, 14) + (2, 6)\cdot\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ und $A' = \{(-7, 2) + (\frac{5}{6}, \frac{15}{6})\cdot\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Es gilt $A = A'$.
☐	☐	Die drei Punkte $(1, 2, 0), (1, 1, 1)$ und $(0, 0, -1)$ liegen auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$.
☐	☐	Es sei V ein K-Vektorraum und (a, b, c) sei in V linear unabhängig. Dann ist für beliebige $\lambda, \mu, \nu \in K$ auch $(\lambda a + \mu b + \nu c, b, c)$ linear unabhängig.
☐	☐	Es sei U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V. Aus $u, v \notin U$ folgt $u + v \notin U$.
☐	☐	Es sei U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V. Aus $u \notin U, v \in U$ folgt $u + v \notin U$.
☐	☐	Es gibt eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mit $\psi(x) = x^2, \psi(x^2) = x$.
☐	☐	Es ist $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.
☐	☐	Es ist $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.
☐	☐	Es seien A, B und C beliebige Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
☐	☐	Jede lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $\dim\ker(F) = 0$ ist injektiv.
☐	☐	Für jede Matrix gilt: Zeilenrang = Spaltenrang.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Definieren Sie den Begriff der linearen Hülle.

b) Der Unterraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ sei durch die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Wählen Sie aus diesen Vektoren eine Basis von W.

c) Geben Sie die Koordinaten für jeden dieser Vektoren bezüglich der von Ihnen gewählten Basis an.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

a) Definieren Sie die beiden folgenden Begriffe: Gruppe, Untergruppe einer Gruppe.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe $(B, \circ)$ und eine Untergruppe $U \subsetneq B$ an.

c) Geben Sie ein Kriterium zum Nachweis der Untergruppeneigenschaft an.

d) Es sei $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe aller invertierbaren reellen 2×2 - Matrizen und sei

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, \, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

eine reelle Matrix, und $F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & A \cdot x \end{cases}$ die durch A gegebene lineare Abbildung.

a) Geben Sie eine Basis von $Ker(f)$ an.

b) Geben Sie eine Basis von $Im(f)$ an.

c) Finden Sie zwei Basen $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte).
Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3, d.h. Polynome $p(x)$ der Form $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Wir definieren ein Skalarprodukt auf V durch

$$\langle p, q \rangle := \frac{1}{2} \cdot a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2 \cdot a_3 b_3$$

für beliebige Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$.
Wir betrachten nun die Polynome $p_1(x) := 2x^2$, $p_2(x) := x + x^3$, $p_3(x) := 2x - x^2 + x^3$, sowie den Unterraum U von V, welcher durch diese drei Polynome aufgespannt wird.

a) Wie ist die zum Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehörende Norm $\| \cdot \|$ definiert?

b) Bestimmen Sie $\|p_1\|$.

c) Warum bilden p_1, p_2, p_3 keine Orthonormalbasis von U?

d) Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Polynome p_1, p_2, p_3 aus.

e) Beweisen Sie: Zwei orthogonale und normierte Vektoren sind stets linear unabhängig.

Abgabe:
Montag, 13.02.2012 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.