Matematik A-niveau STX
7. december 2019

Dette er minimale løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 07/12/19. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: matematikuniverset@hotmail.com

Delprøve 1.

OPGAVE 1.

(a) $\vec{s}'(t)$ udregnes.

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} 2t-7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(b) Løs ligningen $x(t) = 0$.

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \Longleftrightarrow (t-2)(t-5) = 0 \Longleftrightarrow t = 2 \vee t = 5. \tag{2}$$

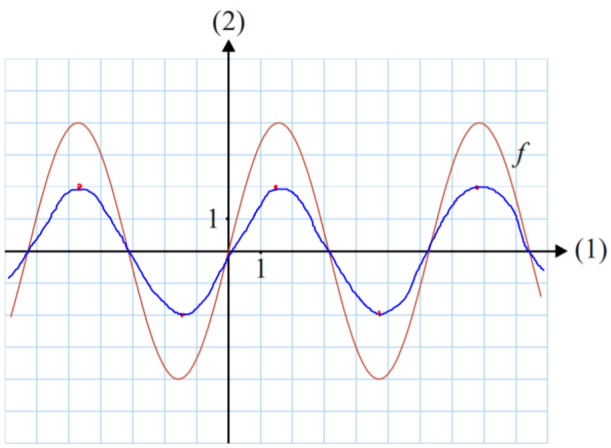
Skæring med andenaksen betyder, at $x = 0$. Så derfor udregnes $y(t)$,

$$y(2) = 2 \cdot 2 = 4, \tag{3}$$
$$y(5) = 2 \cdot 5 = 10. \tag{4}$$

Dvs. (0;4) og (0;10).

OPGAVE 2.

(a) $A = 2$, giver grafen.



OPGAVE 3.

(a) Ligningen løses vha. nulreglen.

$$x^3(2x-6)=0 \Longleftrightarrow x^3=0 \vee 2x-6=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=3. \tag{5}$$

OPGAVE 4.

(a) Funktionen differentieres.

$$f'(x)=2e^{2x}+2x=y'. \tag{6}$$

V.S: $y'=2e^{2x}+2x$.
H.S: $2\cdot(y+x-x^2)=2\cdot(e^{2x}+x^2+x-x^2)=2e^{2x}+2x$.
Begge sider passer $\Longrightarrow$ $f(x)$ er en løsning.

OPGAVE 5.

(a) Anvend formelsamlingen! $C(5,7)$ og radius $r=5$.

(b) Kan løses på flere måder. Her vises en af måderne. l er tangent til cirklen. Opstil en vektor $\overrightarrow{CP}$.

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}8-5\\11-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Indsættes i linjens ligning,

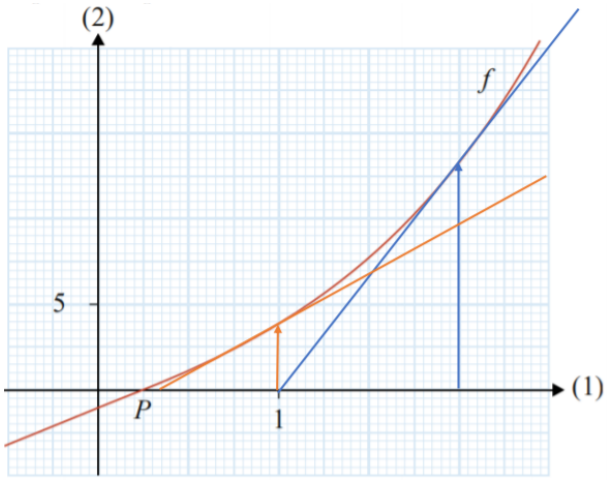
$$3(x-8)+4(y-11)=0 \Longleftrightarrow 3x+4y=68. \tag{8}$$

Eksplicit form:

$$y=17-\frac{3x}{4}. \tag{9}$$

OPGAVE 6.

(a) Aflæst: $x_1 = 1$ og $x_2 = 0.35$.



(b) x_1 beregnes vha. Newton-Raphsons metode med startgættet $x_0 = 2$.

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{\frac{3}{4} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 1}{\frac{9}{4} \cdot 2^2 + 4} = 2 - \frac{13}{13} = 1. \tag{10}$$

OPGAVE 7.

(a) Se fortegnet i eksponenten. Kun $h(x)$ kan ikke være svaret, da fortegnet er positivt.

OPGAVE 8.

(a) Integralet fortæller, at sandsynligheden for at den stokastiske variabel ligger mellem 7 og 13 er $P(7 \leqslant X \leqslant 13)$.

(b) Da middelværdien er $\mu = 10$ og integralet giver sandsynligheden 0.8, så kan vi konstatere, at σ ikke kan være 3 ($\sigma \neq 3$), fordi

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [10 - 3; 10 + 3] = [7; 13]. \tag{11}$$

Jf. formelsamlingen er området ca. $68.27\% = 0.6827$ og ikke 0.8, $\implies \sigma \neq 3$.

OPGAVE 9.

(a) Punktet P udtrykt ved k er,

$$k^2 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = k \tag{12}$$

Dvs. $P(k,0)$. (Overvej hvorfor det er 0 som andenkoordinat.)

(b) Arealet af M bestemmes vha. integral.

$$A_M = \int_0^k (k^2 - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - xk^2\right]_0^k = \frac{2k^3}{3}. \tag{13}$$

Arealet af $OPQR$ er,

$$A_{OPQR} = k \cdot f(0) = k \cdot (k^2 - 0^2) = k^3. \tag{14}$$

Forholdet er

$$\frac{A_{OPQR}}{A_M} = \frac{\frac{2k^3}{3}}{k^3} = \frac{2}{3}. \tag{15}$$

Delprøve 2.

Se næste side. Løsninger er lavet i Maple 2020.

Opgave 10:

a)

$f(x) := \ln(x) - 3 \cdot x^2 + 10 :$

$\int f(x)\, dx + k$

$$-x^3 + 9x + x\ln(x) + k \qquad \textbf{(1)}$$

Som er stamfunktionen til $f(x)$. Konstanten findes.

$solve\left(-x^3 + 9x + x\ln(x) + k \Big|_{x=1} = 20, k \right)$

$$12 \qquad \textbf{(2)}$$

Dvs. $k = 12$ og stamfunktionen er

$F(x) = -x^3 + 9x + x\ln(x) + 12.$

$$F(x) = -x^3 + 9x + x\ln(x) + 12 \qquad \textbf{(3)}$$

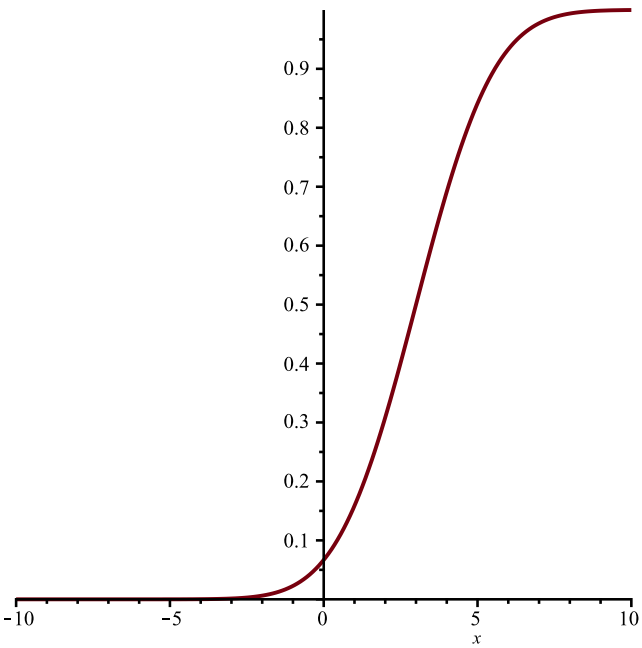
Opgave 11:

a) Tæthedsfunktionen defineres. $f(x) := \frac{1}{\mathrm{sqrt}(2 \cdot \mathrm{Pi}) \cdot 2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-3}{2} \right)^2 \right) :$

Fordelingsfunktionen er $F(x) := \int_{-\mathrm{infinity}}^{x} f(t)\, dt :$

Grafen er:

$plot(F(x))$



b) Sandsynligheden $P(0.5 \le X \le 4)$ bestemmes.

$F(4.) - F(0.5)$

$$0.5858126876 \tag{4}$$

Dvs. $P(0.5 \leq X \leq 4) = 0.586$.

c) Løs ligningen $F(k) = 0.6$.

$$\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,k}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}{2} = 0.6 \tag{5}$$

$with(RealDomain):$
$solve(F(k) = 0.6)$

$$3.506694206 \tag{6}$$

Dvs. $k = 3.51$ for at man får sandsynligheden 0.6.

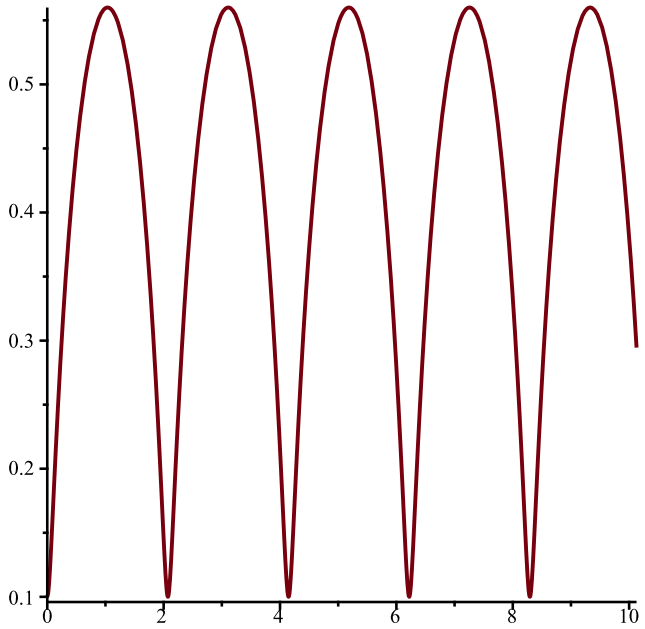
Opgave 12:
a) Punktet er $P(0, 2)$, så
$y' = 8 - 2 \cdot 2$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = 4 \tag{7}$$

Hældningen er 4, svarende til $f'(0) = 4$. Tangentligningen er
$y = 4 \cdot (x - 0) + 2$

$$y = 4x + 2 \tag{8}$$

Opgave 13:
a) Plottet laves.
$with(Gym):$
$plot([4.95 \cdot t - 0.23 \cdot \sin(15 \cdot t), 0.33 - 0.23 \cdot \cos(15 \cdot t), t = 0..2])$



b) Den maksimale højde bestemmes.

$y(t) := 0.33 - 0.23 \cdot \cos(15 \cdot t)$:

Værdimængden for $\cos(15 \cdot t)$ er [-1;1], så

$0.33 + 0.23 \cdot 1$

$$0.56 \tag{9}$$

Dvs. 0.56 er den maksimale højde. Denne kan også findes vha. differentialregning.

Opgave 14:

a) Definér

$y :=$ **proc**(n) **option** *remember*; $y(n-1) + 0.001 \cdot y(n-1) \cdot (2000 - y(n-1))$; **end**:

$y(0) := 8$:

$y(10)$

$$2189.494387 \tag{10}$$

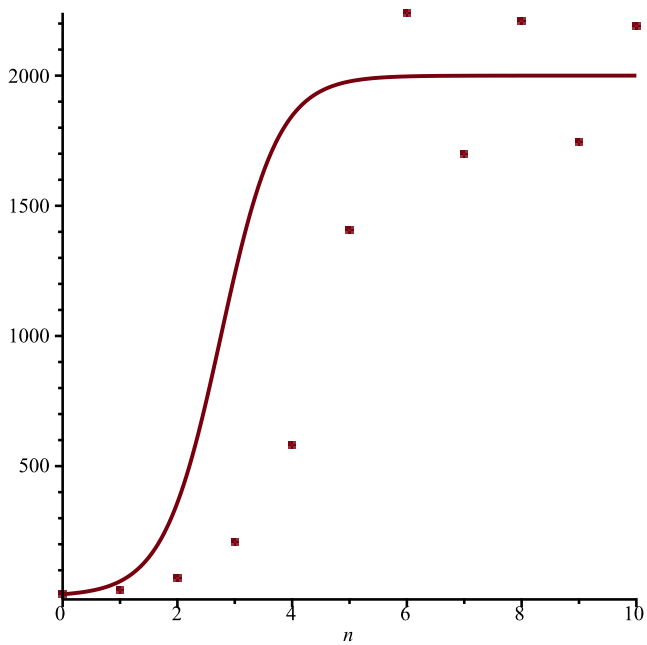
Dvs. der er 2189 antal smittede efter 10 måneder.

b) Det er blot at aflæse. Man får $a = 0.001$ og $M = 2000$.

c) Nedenfor defineres en række koder + differentialligningen løses.

$with(plots)$:

$DiffRens := plot\left([seq([n, y(n)], n = 0..10)], style = point, labels = [n, y_n], symbol = solidcircle\right)$:; $dsolve(\{f'(n) = 0.001 \cdot f(n) \cdot (2000 - f(n)), f(0) = 8\})$; $DiffEqn := plot\left(\frac{2000}{1 + 249\, e^{-2n}}, n = 0..10\right)$:; $display(DiffEqn, DiffRens)$;



Man konstaterer at løsningen til differensligningen svinger omkring bæreevnen.

Opgave 15:

$with(Gym):$

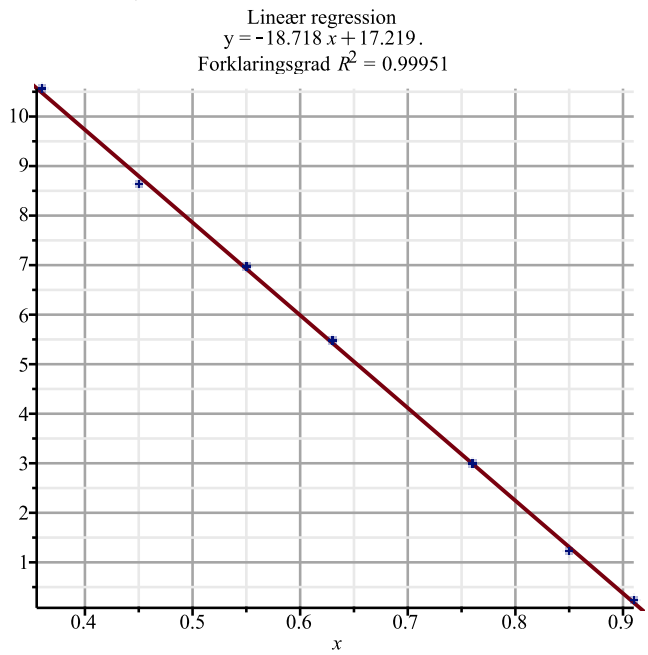
a) Tabellens data indlæses.

$XListe := [0.36, 0.45, 0.55, 0.63, 0.76, 0.85, 0.91]:$

$YListe := [3.25, 2.94, 2.64, 2.34, 1.73, 1.11, 0.49]:$

$YandenListe := (YListe)^{\sim 2}:$

$LinReg(XListe, YandenListe)$



Dvs. $a = -18.718$ og $b = 17.219$.

$f(x) := -18.718 \cdot x + 17.219:$

b) Indsæt 0.2 i x.

$f(0.2)$

$$13.4754 \tag{11}$$

Løs ligningen $v^2 = 13.4754$.

$$v^2 = 13.4754 \tag{12}$$

$solve(v^2 = 13.4754)$

$$3.670885452,\ -3.670885452 \tag{13}$$

Dvs. hastigheden er 3.67m/s.

Opgave 16:

a) Opdel figuren og udnyt omkredsformlen og arealformlen. Udtryk den ene formel ved den anden, dvs. omkredsens h udtrykkes ved x og y og indsættes i arealformlen. Prøv.

b) Funktionen defineres.

$A(x, y) := -x^2 - y^2 - x \cdot y + 360 \cdot x + 360 \cdot y - 32400$:

Det stationære punkt bestemmes.

$solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(A(x, y)) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}(A(x, y)) = 0\right\}\right)$

$$\{x = 120,\ y = 120\} \tag{14}$$

Vha. Gym-pakken kan man bestemme maksimum.

$with(Gym)$:

$A(x, y) \xrightarrow{art}$

$r = -2 \quad s = -1 \quad t = -2$

Diskriminanten er $\Delta = r\,t - s^2 = 3$

Da $\Delta > 0$ og $r < 0$ har funktionen et lokalt maksimum i

$[120, 120]$

og funktionsværdien er 10800

Dvs. $x = 120$m og $y = 120$m giver det største areal.